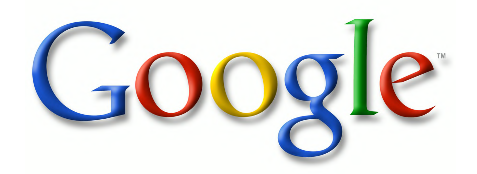
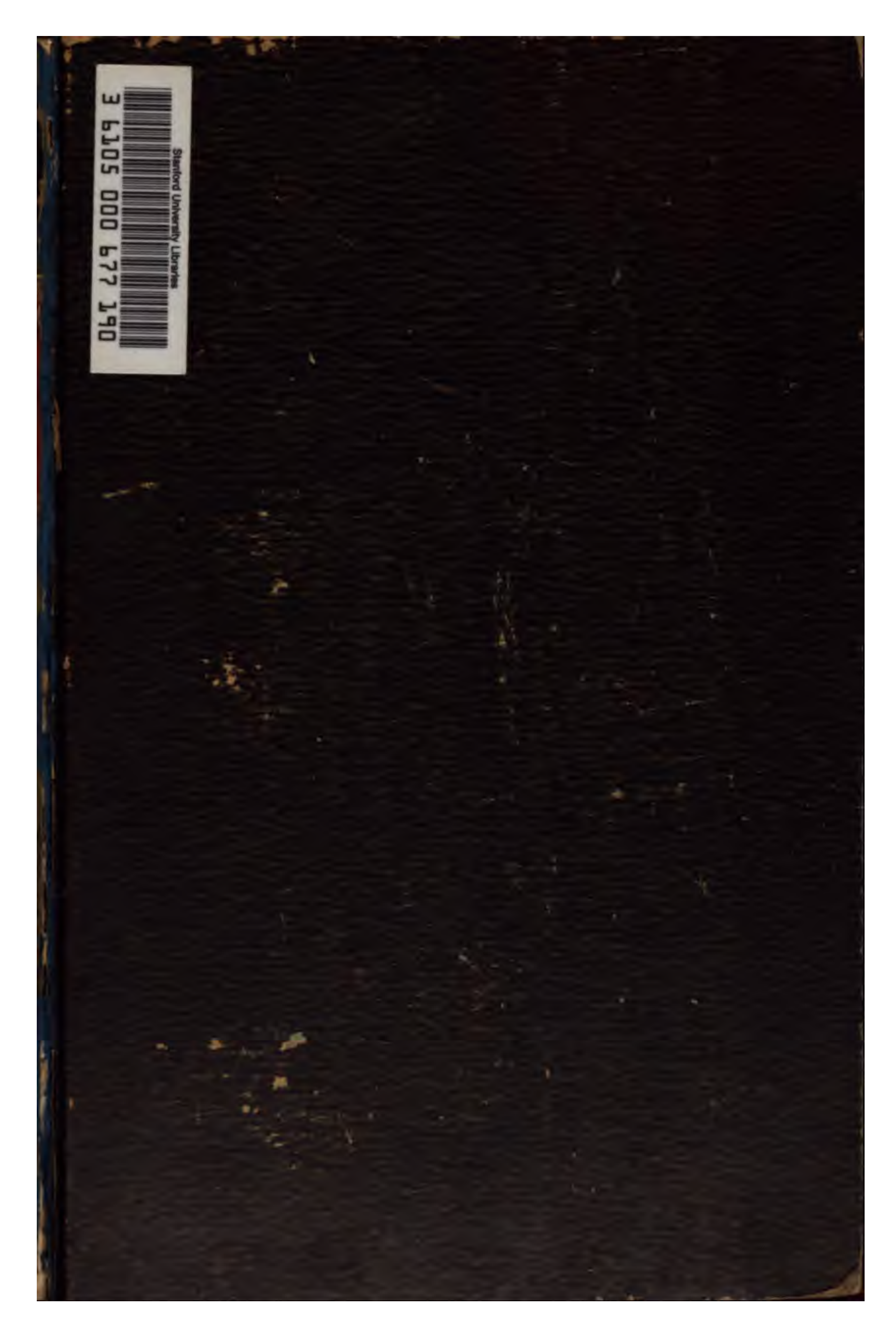
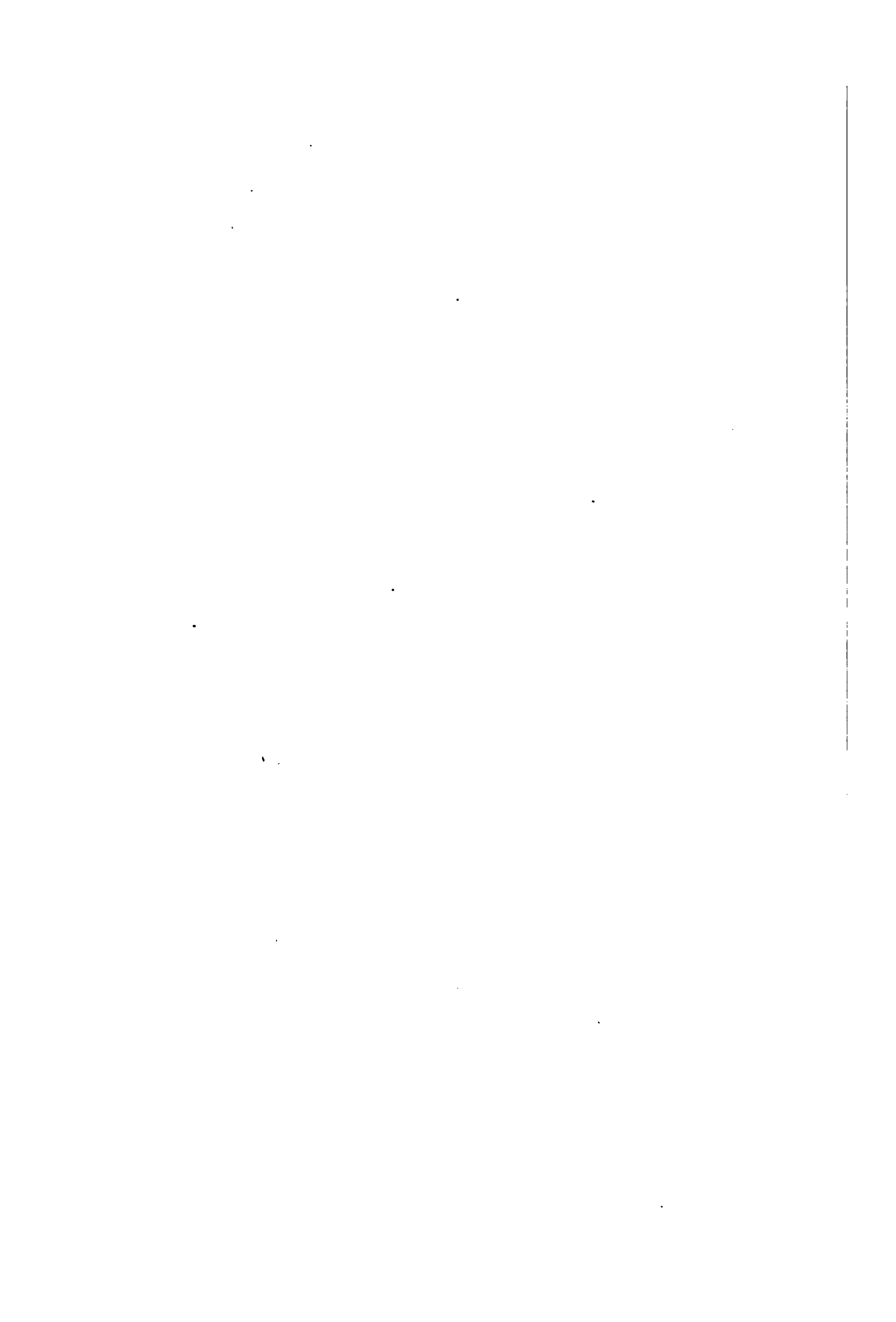



Stanford University Libraries
3 6105 000 677 190





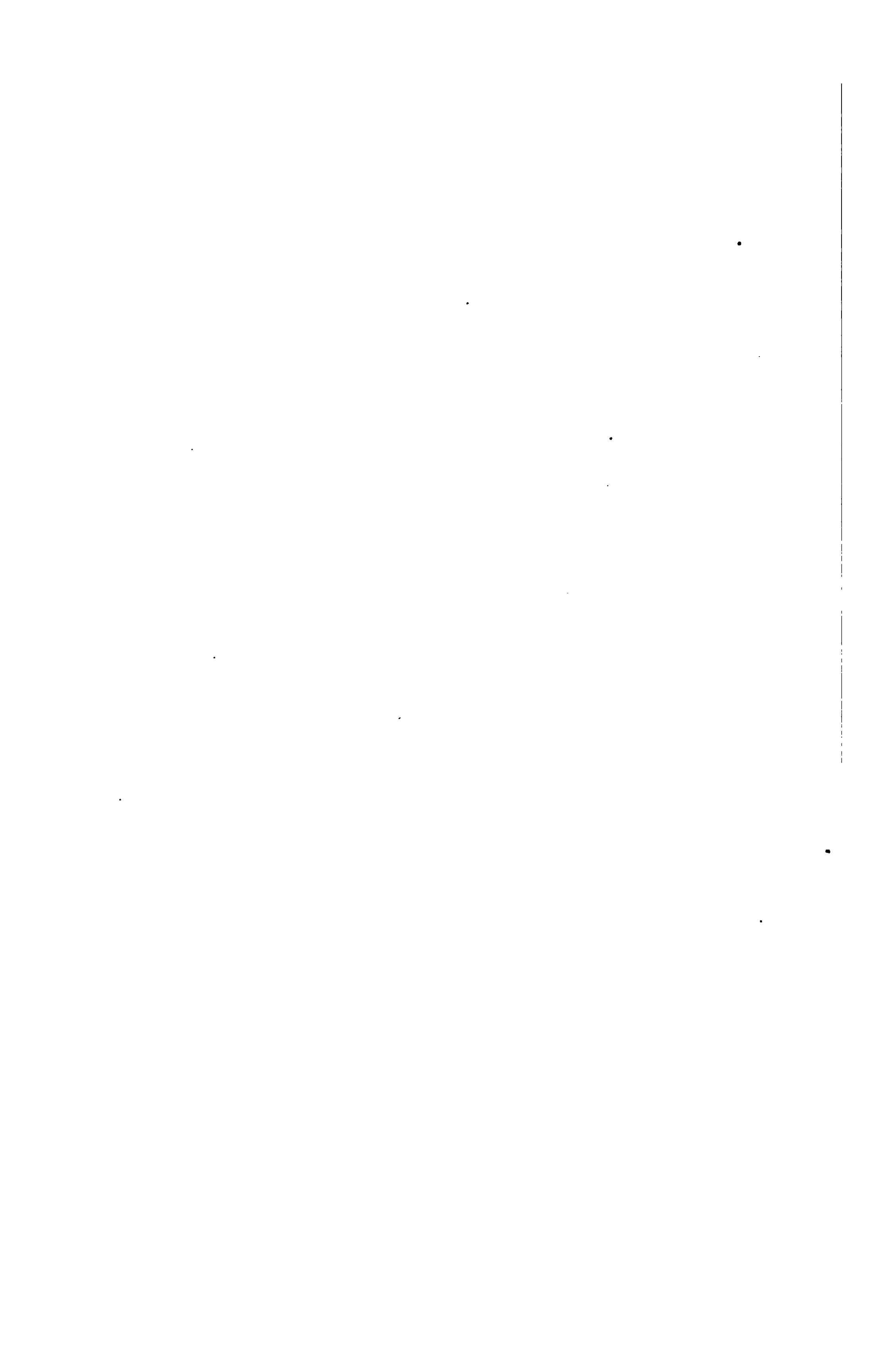


ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

ERGÄNZUNGSBAND VIII.



ANNALEN

DER

PHYSIK

UND

CHEMIE.

HERAUSGEGEBEN ZU BERLIN

VON

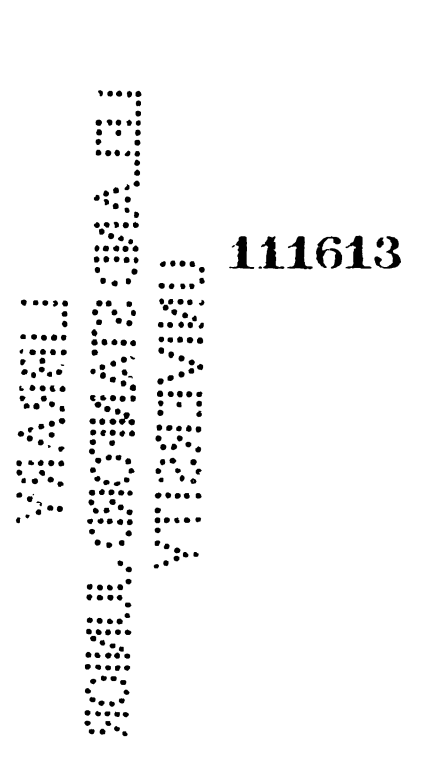
J. C. POGGENDORFF.

ERGÄNZUNGSBAND VIII.

NEBST ZEHN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1878.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Inhalt

des Ergänzungsbandes VIII der Annalen der Physik und Chemie.

Erstes Stück.

Seite

I. Ueber das elektrische Leitungsvermögen des Wassers und einiger anderer schlechter Leiter; von F. Kohlrausch . 1

II. Die Glimmercombination von Reusch und das optische Drehungsvermögen von Krystallen; von L. Sohncke . . . 16

III. Ueber die Bestimmung der Constanten für die Absorption des Lichtes im metallischen Silber; von W. Wernicke . . 65

IV. Die Interferenz des gebeugten Lichtes; von E. Lommel . 82

V. Die Grundprincipien der Edlund'schen Elektrodynamik; von O. Chwolson 140

VI. Volumchemische Studien; von W. Ostwald 154

VII. Ueber den Einfluſs des Trichterventils auf die elektrischen Funkenentladungen in der Luft; von W. Holtz 168

VIII. Ueber ein elektrisches Flugrad nach Art des Radiometers; von Demselben 172

IX. Dampfstrahl-Luftpumpe; von N. Teclu 174

Zweites Stück.

Seite

I. Untersuchungen über die Natur des Vocalklanges; von Felix Auerbach 177
II. Die Interferenz des gebeugten Lichtes; von E. Lommel (Schlufs) 225
III. Ueber die Spannung flüssiger Lamellen; von Carl Sondhaufs 266
IV. Ueber ein dioptrisches Fundamentalgesetz; von R. Most . 299
V. Ueber die Complementarfarben des Gypses im polarisirten Lichte; von F. v. Kobell 348

Drittes Stück.

I. Ueber die Magnetisirung ellipsoidisch geformter Eisen- und Stahlkörper und die Veränderung des temporären und permanenten Magnetismus; von A. L. Holz 353
II. Einige wesentliche Verbesserungen an einfachen und zusammengesetzten Influenzmaschinen; von W. Holtz 407
III. Ueber die neuste Form der einfachen Influenzmaschine und ihren Gebrauch; von Demselben 431
IV. Zur Theorie der Dispersion und Absorption des Lichtes in doppeltbrechenden Mitteln. Dichroismus und Dispersion der optischen Axen; von E. Ketteler 444
V. Berichtigung zu einer Notiz des Hrn. Lommel betreffend die Theorie der Fluorescenz; von A. Wüllner 474
VI. Erwiderung auf die von Hrn. Chwolson der unitarischen Theorie der Elektricität gemachten Einwürfe; von E. Edlund 478
VII. Ueber die Quetelet'schen Interferenzstreifen; von Carl Exner 488

Seite

VIII. Erklärung der Farbenringe einaxiger Krystallplatten im polarisirten Lichte bei Einschaltung Fresnel'scher Parallelepipede; von W. Pscheidl 497

IX. Elektrische Staubfiguren im Raum; von E. Lommel . . 506

X. Beiträge zur Geschichte der physiologischen Optik (Farbenkreisel und binoculares Sehen); von W. v. Bezold . . . 510

XI. Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft . 515

Viertes Stück.

I. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit schlechtleitender Körper, insbesondere der Gesteine und Hölzer; von E. Less . . . 517

II. Ueber absolute Graduirung elektrischer Inductionsapparate und über elektrische Zeitmessung mit Hülfe des eben aperiodisch sich bewegenden Magnetes; von A. Christiani 556

III. Ueber Behandlung Noë'scher Sternsäulen; von Demselben 579

IV. Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetz der Elektrodynamik, von H. Lorberg 581

V. Ueber das Grundgesetz der Elektrodynamik; von Demselben 599

VI. Theorie der Circularpolarisation; von V. v. Lang 608

VII. Ueber die Krystallisation des Markasits und seine regelmäſsigen Verwachsungen mit Eisenkies; von A. Sadebeck 625

VIII. Ueber Himmelswärme, Temperatur des Weltraums und mittlere Temperatur der Atmosphäre; von O. Frölich 664

IX. Ueber die Absorption des Lichts durch Wasser und Steinöl; von J. L. Schönn 670

X. Ueber das Dichtigkeitsmaximum einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser; von F. Kohlrausch 675

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. — E. Lommel, Fig. 1, S. 88; Fig. 2, S. 89; Fig. 3, S. 91; Fig. 4, S. 97; Fig. 5, S. 109; Fig. 6, S. 122; Fig. 7, S. 130; Fig. 7a, S. 132; Fig. 8, S. 133; Fig. 8a, S. 133.
Taf. II. — F. Auerbach, Fig. 1, S. 216; Fig. 2, S. 220; Fig. 3a—c, S. 223.
Taf. III. — R. Most, Fig. 1, S. 301; Fig. 2, S. 304; Fig. 3, S. 315; Fig. 4, S. 316; Fig. 5, S. 318; Fig. 6 u. 7, S. 319; Fig. 8, S. 321; Fig. 9, S. 328; Fig. 10, S. 330.
Taf. IV. — A. L. Holtz, Fig. 1-6, S. 388.
Taf. V. — A. L. Holtz, Fig. 7—10, S. 388.
Taf. VI. — W. Holtz, Fig. 1—15, S. 431 u. flgde.
Taf. VII. — C. Exner, Fig. 1, S. 490; Fig. 2, S. 496; Fig. 3, S. 489 Anm. — E. Lommel, Fig. 4, S. 507; Fig. 5, S. 508.
Taf. VIII. — E. Less, Fig. 1, S. 522; Fig. 2 u. 3, S. 524. — A. Christiani, Fig. 4—6, S. 570; Fig. 7 u. 8, S. 575; Fig. 9, S. 576.
Taf. IX. — A. Sadebeck, Fig. 1—12, s. S. 663.
Taf. X. — A. Sadebeck, Fig. 1—6, s. S. 664.

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.

Band VIII. ERGÄNZUNG. Stück 1.

I. *Ueber das elektrische Leitungsvermögen des Wassers und einiger anderer schlechter Leiter;* *von F. Kohlrausch.*

(Der Münchener Akademie der Wissenschaften im Auszuge vorgelegt am 5. November 1875.)

Es giebt kaum eine Gröſse, über welche so verschiedene Angaben gemacht worden sind, wie über das elektrische Leitungsvermögen des Wassers. *Setzt man, was in der vorliegenden Mittheilung stets geschieht, das Leitungsvermögen des Quecksilbers* $= 10^{10}$, und reducirt hierauf, soweit es erforderlich und möglich ist, die vorhandenen Angaben, so ist das Leitungsvermögen des Wassers gleich

80	nach Pouillet,
70	„ Becquerel,
15	„ Oberbeck,
4,5	„ Rossetti,
2,16 (bei 15,5°)	„ Quincke,
1,33 (bei 20°)	„ Magnus.[1]

Freilich sind die meisten von diesen Bestimmungen nur nebenbei gemacht worden; die Bestimmungsmethode ist wegen der Polarisation nicht einwurfsfrei; auch in der Reduction von den Einheiten der Verfasser auf das Quecksilber liegt theilweise eine Unsicherheit. Allein alles dieſs

1) Pouillet, Wiedemann Galv. (2) I, S. 316; Becquerel, nach einer Angabe von Rossetti, Atti Veneti (4) III, 2170; Oberbeck, Pogg. Ann. CLV. 600; Rossetti, l. c. 2171; Quincke, Pogg. Ann. CXLIV, 22; Magnus, Berl. Mon.-Ber. 1861. 72. Wenn in einem der genannten Aufsätze mehrere Leitungsvermögen angegeben sind, ist oben der kleinste Werth angeführt.

zusammengenommen, kommt nicht in Betracht, wo es sich um die Aufklärung so groſser Unterschiede handelt, wie die obigen.

Wenn ich die Meinung äuſsere, daſs die Ursache dieser Unterschiede wohl in geringen Verunreinigungen besteht, welche schon in chemisch kaum nachweisbarer kleiner Menge das Leitungsvermögen des Wassers bedeutend vergröſsern, so wiederhole ich damit nur die Ansicht vieler Physiker. Quincke[1]) z. B. fand zuerst, daſs selbst die Spuren von Glassubstanz, die sich im Wasser auflösen, das Leitungsvermögen sehr stark vermehren. Oberbeck (l. c.) vermuthet, daſs sorgfältige Reinigung einen erheblich kleineren Werth ergeben werde, als den obigen.

Es schien mir der Mühe werth zu sein, dem Wasser eine besondere Untersuchung des Leitungsvermögens zu widmen, was bis jetzt nicht geschehen ist. Ich destillirte deſswegen Wasser unter verschiedenen Umständen, wobei das Destillat von allen Körpern auſser Platin und Luft fern gehalten werden konnte. Von den zahlreichen Bestimmungen will ich zuerst diejenigen mittheilen, welche nach meiner Ansicht zu dem reinsten Wasser geführt haben, dann aber auch einige andere, die als Illustration zu der Empfindlichkeit dienen können, welche dem Widerstande des Wassers als Reagens auf seine Reinheit zukommt. Einige meteorische Wasser und zur Vergleichung mit dem Wasser noch Alcohol und Aether füge ich hinzu.

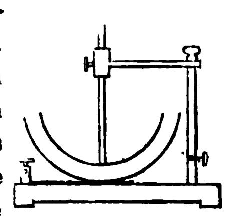
Zur Widerstandsmessung dienten inducirte Wechselströme mit dem Weber'schen Elektrodynamometer in der Wheatstone'schen Brücke, wie dieſs früher beschrieben worden ist.[2]) Doch konnte nicht immer mit zwei gleichen Verzweigungswiderständen beobachtet werden, weil der zu messende Widerstand häufig viel gröſser war als der auf dem Stöpselrheostat zur Verfügung stehende von 12000 Siem. Man nahm alsdann die Zweigwiderstände im Verhältniſs 1:10 oder auch wohl 1:100. Die Controle derartiger Be-

1) Quincke, Pogg. Ann. CXIII, 519.

2) Kohlrausch und Grotrian, Pogg. Ann. CLIV, 2.

stimmungen zeigte, dafs diese von Siemens bezogenen Widerstandsrollen durch die Art ihrer Aufwindung gegen Extraströme so gut wie vollständig gesichert sind, wie ich diefs auch von den Siemens'schen Widerstandsscalen wiederholt bestätigen kann.

Für genügende Isolation der Leiter war Sorge getragen, und man versicherte sich bei der Bestimmung sehr grofser Widerstände stets über den Maximalbetrag etwaiger Nebenschliefsungen durch den Tisch u. dgl.



Während der Widerstandsbestimmung war das Wasser nur mit Platin in Berührung. Es befand sich nämlich in einer Platinschale (Kugelschale von 45^{mm} Halbmesser), welche zugleich als eine Elektrode diente, während eine zweite, ungefähr concentrisch angebrachte kleinere Platinschale (35^{mm} Halbmesser) mit ihrer äufseren Seite die zweite Elektrode bildete. Die Elektroden waren gegeneinander verstellbar, hatten aber bei den meisten folgenden Bestimmungen einen constanten Abstand von beiläufig 1^{cm}.

Der Raum zwischen den Platinschalen wurde bis zu einer eingeritzten Marke mit dem Wasser (etwa 60 Gr.) gefüllt. Den Quecksilberwiderstand des Raumes bestimmte man empirisch, indem Flüssigkeiten eingefüllt wurden, deren Leitungsvermögen mittelst des Gefäfses No. VI, (Ann. CLIV, 14.) ermittelt worden war. Diese Flüssigkeiten waren entweder ein weniger reines Wasser ($k\,10^{10} = 23$) oder wäfsrige Lösungen von 0,02 Proc. Kochsalz (330), 0,003 Proc. Schwefelsäure (200), oder 0,25 Proc. Essigsäure (300).

Für die meist gebrauchte Stellung fand sich hieraus der Quecksilberwiderstand zwischen den Platinschalen gleich

0,00000149 Siemens.

In diese Zahl, mit 10^{10} multiplicirt, wurden die gefundenen Widerstände dividirt, um die Leitungsvermögen zu erhalten.

Da man über die Gesetze sehr schwacher kurz dauernder Ströme, für welche ja schliefslich einmal die Ohm'schen Gesetze aufhören werden, nichts weifs, so ist es nicht überflüfsig, zu bemerken, dafs die Reductionen mit den verschiedenen obigen Flüssigkeiten keine Unterschiede lieferten, welche auf das Aufhören des Ohm'schen Gesetzes schliefsen lassen. Ebenso habe ich bei den Bestimmungen des Wassers selbst, trotz Anwendung verschiedener Stromstärken, stets Resultate gefunden, deren Unterschiede auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dafs die Zahlen dieses Aufsatzes nicht den Anspruch auf äufserste Genauigkeit erheben. Wegen der sehr ungleichen Widerstands-Capacität des Gefäfses No. VI und des Raumes zwischen den Platinschalen (200:1) und der oft sehr grofsen Widerstände (bis 150000 Siem.) waren die Beobachtungsfehler theilweise beträchtlich. Ferner scheute ich mich, die Platinelektroden zu platiniren, weil das grofse Absorptionsvermögen des Platinschwarz die Reinigung erschweren würde. Also sind die Elektroden (44 bez. 90□^{cm}) für stärkere Ströme des Inductors nicht ganz polarisationsfrei. So mag sich die durch die genannten Umstände den Resultaten anhaftende Unsicherheit im ungünstigen Falle wohl einmal auf 5 Proc. belaufen.

Widerstand des reinen Wassers.

Das geringste bei meinen Versuchen erzielte Leitungsvermögen besafs ein Wasser, welches folgeweise über einen Zusatz von etwas übermangansaurem Kali, Aetzkali, saurem schwefelsauren Kali destillirt worden war, um organische Verbindungen zu zerstören, flüchtige Säuren und Ammoniak zurückzuhalten. Die Retorten bestanden aus Glas; als Kühler diente hier ein mit Gold gelöthetes Rohr von Silber; die Kühlfläche wurde durch starken Abflufs des Kühlwassers immer auf niederer Temperatur erhalten; das Sieden geschah in mäfsigem Grade, so dafs etwa in 1 bis 2 Stunden 1 Liter überging. Selbstverständlich wurde der

zuerst übergehende Theil nicht aufgefangen, und ebenso brach man zeitig genug die Destillation ab.

Zum Schluſs wurde das so erhaltene Product noch einmal durch einen kleineren Platinkühler direct in die beschriebene Platinschale destillirt, in welcher sogleich der Widerstand gemessen wurde. Die Platinschalen waren zuvor 4 Stunden mit verdünnter Salpetersäure gekocht, dann ausgespült und mehrere Stunden lang mit Wasser gekocht worden, blieben 16 Stunden lang mit frischem Wasser gefüllt stehen und hatten hierauf schon zu vielen Widerstandsbestimmungen sehr reinen Wassers gedient.

Der gröſste erhaltene Widerstand des Wassers betrug 20900 Siem. bei 21,°5, wonach also ($Hg = 10^{10}$) das Leitungsvermögen des Wassers gleich $\frac{14900}{20900}$ oder

$$0{,}71 \text{ bei } 21{,}^{0}5$$

wäre. Die Zahl ist nur etwa die Hälfte der eingangs angeführten Zahl von Magnus, nur $\frac{1}{120}$ von der gewöhnlich citirten Zahl Pouillet's.

Verglichen mit dem bestleitenden Elektrolyten (HNO_3, 30 Proc.) leitet das Wasser 1080000 mal schlechter; Silber leitet fast eine Billion, Kupfer 86.10^{10} mal besser. Als eine anschauliche Illustration zu der Zahl kann der Ueberschlag dienen, daſs eine Säule obigen Wassers von 1^{mm} Länge einen etwas gröſseren Widerstand bietet, als eine Kupferleitung von gleichem Querschnitt, welche von der Erde nach dem Monde und zurück gespannt wäre.

Aber, obwohl das genannte Wasser jedenfalls zu dem reinsten jemals dargestellten gehört, so kann ich die Zahl 0,72 vorläufig auch nur als eine obere Grenze ansehen. Die letzte Destillation war nämlich mit Schwierigkeiten verbunden: destillirte man rasch, so wurde das Leitungsvermögen des Destillates gröſser, offenbar wegen mitgerissener Flüssigkeitstheilchen; heizte man aber sehr schwach, so erfolgte das Sieden des bereits sehr reinen Wassers,

trotz eingeworfenen Platinbleches, leicht stofsweise, was dieselbe Wirkung hat wie rasches Sieden. Auch aus dem ferneren Grunde durfte man den Vorgang nicht beliebig verlangsamen, weil nämlich das Destillat durch blofses Stehen in dem Platingefäfse alsbald ein besseres Leitungsvermögen anzunehmen begann (vgl. weiter unten).

Man wird, um diesen Uebelständen zu entgehen, wohl mit einem ganz aus einem edeln Metall gearbeiteten Destillationsapparat arbeiten müssen, und womöglich in einem gröfseren Maafsstabe, als es mir möglich war. Ja, wenn man alle Einwände gegen vollkommene Reinheit des Destillates vermeiden will, so wird nichts übrig bleiben, als im Vacuum zu arbeiten, da ja durch Berührung des Wasserdampfes mit der Luft sich Nitro-Ammoniak-Verbindungen bilden sollen.

Ich will noch folgendes bemerken: Angenommen, das ganz reine Wasser hätte das Leitungsvermögen Null, und man wollte obige Zahl 0,72 aus Verunreinigungen erklären, so würde hierzu beispielsweise ein Gehalt von höchstens $\frac{1}{10^7}$ HCl oder $\frac{5}{10^7}$ NH_4NO_3, d. h. 0,1 bez. 0,5 Mgr. in 1 Liter Wasser ausreichen. Die Chemie würde so kleine Mengen nicht mehr nachweisen können.

Leitungsvermögen verschiedener Destillate.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Leitungsvermögen verschiedener Wasser enthalten, deren Entstehungsweise in den ersten Spalten angegeben wird.

No.	Flüssigkeit, von welcher destillirt wurde.	Kühler.	Leitungs-Vermögen.
1.	Verschieden.	Glas.	5,4 bis 12,8
2.	Verschieden.	Platin.	1,6 bis 1,9
3.	Wasser mit etwas $KHSO_4$.	Glas.	11,1
4.	Destillat No. 3.	Platin.	0,94 bis 1,3
5.	Wasser mit etwas KHO.	Silber.	1,77
6.	No. 5, mit etwas $KHSO_4$.	Silber.	0,99
7.	No. 6.	Platin.	0,78
8.	Wasser mit etwas $KMnO_4$.	Silber.	0,94 bis 1,14
9.	Wasser mit $KMnO_4$ und KHO.	Silber.	1,03 bis 1,9
10.	No. 9, mit etwas $KHSO_4$	Silber.	0,93 bis 1,4
11.	No. 10, langsam destillirt.	Platin.	0,71 22°
12.	Dasselbe, rasch destillirt.	Platin.	1,23 24°
13.	Dasselbe, wieder langsam.	Platin.	0,82 19°

Die Temperatur der Bestimmung liegt im Allgemeinen bei 20 bis 22°.

Aus den ersten Zahlen folgt, daſs das Niederschlagen des Dampfes in einem Glaskühler zu einem etwa 5mal gröſseren Leitungsvermögen führte, als im Platinkühler, was ohne Zweifel von aufgelöster Glassubstanz herrührt. Auch der Silberkühler lieferte immer etwas höhere Zahlen als der von Platin.

Anderseits ergab aber auch der Platinkühler, wenn der destillirten Flüssigkeit nicht Zusätze gegeben waren, welche Ammoniak und Säure zurückhielten, Zahlen, die nicht unter 1,6 liegen, obwohl theilweise dasselbe Wasser mehrmals destillirt wurde. Diese Zahl kommt den von Magnus und von Quincke angegebenen nahe.

Zu No. 10 und 11 ist zu bemerken, daſs etwa 1 Gr. des Zusatzes auf 3 Liter Wasser kam. Die Substanz war vorher in etwas Wasser gelöst und mit demselben ausgekocht worden.

Daſs die Zusätze einen reinigenden Einfluſs haben, ist hiernach wohl nicht zu bezweifeln. Ob das Aetzkali oder das doppeltschwefelsaure Kali wirksamer gewesen ist, läſst sich bei der Veränderlichkeit der Resultate nicht erkennen. Ich glaube, daſs diese Schwankungen bei einer und derselben Destillation von mechanischer Ueberführung

der Flüssigkeit herrühren. Dem übermangansauren Kali scheint kein großer Einfluß zuzukommen.

In No. 11 bis 13 zeigt sich die Einwirkung verschieden raschen Siedens. Bei den langsamen Destillationen wurden 60 Gr. etwa in 20 Min., bei der raschen in 8 Min. übergeführt.

Man sieht aus obiger Zusammenstellung, daß mehrere Versuche schließlich zu Werthen geführt haben, welche bei 0,7 bis 0,8 liegen. Dieß könnte daher rühren, daß dem reinen Wasser ein Leitungsvermögen von diesem Betrage zukommt, aber auch davon, daß die Versuchsverhältnisse schließlich zu demselben Rest von Unreinigkeiten führten.

Meteorische Wasser.

Von zwei Regenwassern, am 11. und 12. September 1874 bei einem länger dauernden Landregen in Darmstadt aufgefangen, erhielt ich die Zahlen $k.\,10^{10} = 19{,}1$ und 17,3 bei etwa 13°, also beiläufig 25mal so groß als der kleinste gefundene Werth 0,71. Bei dem Auffangen des Wassers wurde natürlich möglichste Sorgfalt angewandt, und die nahe Uebereinstimmung beider Zahlen scheint dafür zu sprechen, daß der Zustand des Regens selbst sie bedingt. Man wird nachher sehen, daß destillirtes Wasser bei dem Stehen an der Luft in einigen Tagen zu einem Leitungsvermögen von ähnlicher Größe kommt.

Kleiner waren die Zahlen, welche frisch gefallener Schnee ergab, den man möglichst sorgsam aufgelesen und geschmolzen hatte. Drei Proben, am 25./26. December 1874, also zu einer Zeit, wo die industriellen Verunreinigungen der Luft ziemlich ausgeschlossen waren, von nächtlichen Schneefällen in Darmstadt entnommen, gaben 9,5; 4,1 und 19,8, bei etwa 15°. Dabei war die kleinste von diesen Zahlen erhalten von dem Schnee, welcher ohne künstliche Erwärmung in einer Flasche geschmolzen war. Mit Rücksicht darauf, daß das Wasser etwa 24^h mit den Glaswänden in Berührung gewesen war, muß man schließen,

dafs der Schneefall sehr reines Wasser brachte. Am 15. Februar 1875 erhielt ich von nächtlich gefallenem Schnee die Zahl 10,3 bei 17°.

Nicht undenkbar erscheint, dafs die gröfsere Reinheit des Schneewassers mit der niedrigeren Temperatur zusammenhängt, bei welcher der Niederschlag stattfand.

Fortgesetzte Beobachtungen über das Leitungsvermögen meteorischer Wasser könnten eine Bedeutung haben, indem sie den einfachsten Maafsstab für eine mittlere Reinheit des Niederschlages geben.

Der Einflufs der Zeit auf das Leitungsvermögen des Wassers.

Ohne Ausnahme fand ich, dafs das Leitungsvermögen des Wassers bei dem ruhigen Stehen in der Platinschale fortwährend zunahm. Dabei stand der Apparat auf einer Glasplatte unter einer Glasglocke, freilich nicht ganz dicht schliefsend, weil die Leitungsdrähte zwischen Platte und Glocke hindurchgehen mufsten. Die Zunahme von k. 10^{10} betrug bei reinem Wasser in den vielen beobachteten Fällen zwischen 0,05 und 0,15 stündlich und wurde im Laufe der Zeit im Allgemeinen etwas geringer.

Ich will nur eine Beobachtung, welche auf 44 Tage ausgedehnt wurde, hier mittheilen. Sie betrifft das S. 7 mit No. 7 bezeichnete Destillat, welches ergab:

	Frisch		0,78	nach	46	Stunden	6,0
nach	4,3	Stunden	1,33	„	78	„	8,5
„	5,7	„	1,55	„	174	„	14
„	20	„	3,5	„	1060	„	30

Die letzte Zahl ist blofs eine Schätzung, da in den 44 Tagen etwa $\frac{1}{3}$ der Flüssigkeit verdampft war, aber doch genügend genau um zu beweisen, dafs in dieser Zeit das Leitungsvermögen beiläufig auf das 40fache gestiegen war.

Diese Zunahme auf einen bestimmten Grund zurückzuführen, ist mir nicht gelungen. Dafs sie von einem Reste „Unreinigkeit“ herrühren könnte, welcher trotz sorg-

fältiger Reinigung am oder im Platin haftet, und welcher erst im Laufe der Zeit hervortritt, ist unwahrscheinlich, weil diese Eigenschaft des Platins doch schliefslich hätte aufhören müssen, anstatt sich bei jedem Versuch wieder geltend zu machen. Zweitens könnten die leitenden Bestandtheile aus der Luft stammen, wobei hauptsächlich Kohlensäure und Ammoniak in Frage kommen dürften. Endlich aber könnten sich auch aus dem Wasser in Berührung mit dem Stickstoff der Luft und unter der Mitwirkung der Wärme Nitro-Ammoniak-Verbindungen bilden. Es würde für das obige Leitungsvermögen = 30 etwa 1 Mgr. NH_4 NO_3 in den 60 Gr. Wasser genügen.

Ein Versuch, den Einfluſs der Luft dadurch zu bestimmen, daſs man ihn mittelst der *Luftpumpe* eliminirte, schlug in einer eigenthümlichen Weise fehl. Ich hatte erwartet, daſs das Leitungsvermögen des Wassers unter dem evacuirten Recipienten weniger rasch zunehmen würde, allein gerade das Gegentheil trat ein. Während $k.10^{10}$ unter gewöhnlichem Drucke in 19 Stunden nur von etwa 3,3 auf 3,7 gewachsen war, wuchs es nun unter einem Quecksilberdrucke von 20 bis 30^{mm} in 23 Stunden von 3,8 auf 23,3. Dann lieſs man wieder Luft eintreten, worauf in 2 Stunden eine Zunahme auf nur 23,5 erfolgte, während dann wieder unter kleinem Drucke die nächsten 24 Stunden den Werth 32 herstellten.

Dieses zunächst räthselhafte Verhalten wurde mir erst verständlich, als ich das untersuchte Wasser mit der Saugpipette entfernte. Dabei zeigte sich ganz schwach aber deutlich ein ranziger Geschmack. Offenbar also waren von dem schon alten Fett der Luftpumpe die mit der Zeit gebildeten Fettsäuren unter geringem Drucke merklich verdampft und von dem Wasser aufgenommen worden: ein schlagendes Beispiel, mit welcher Schwierigkeit die Herstellung reinen Wassers verbunden ist.

Lieſs man Kohlensäure zum Wasser treten, so schien das Leitungsvermögen rascher zu wachsen als in gewöhn-

licher Luft. Doch habe ich genau messende Versuche hierüber nicht angestellt.

Dagegen bot noch einen höchst auffälligen Einfluſs Tabaksrauch, welchen man unter die Glocke zum Wasser blies. Während bis dahin das Leitungsvermögen dieses Wassers in 72^h von 1,2 auf 5,3 gestiegen war, wuchs es von da an unter dem Einfluſs des Rauches

in	40^{min}	50^{min}	64^{min}	$4,5^h$
auf	5,8	6,2	6,4	11,8

Man unterlieſs nach dieser Erfahrung natürlich jegliches Rauchen in dem Zimmer, wo destillirt oder der Widerstand bestimmt wurde.

Daſs Wasser in einem Glasgefäſs durch Auflösung von Glas an Widerstand verliert, hat nächst Quincke auch Oberbeck (l. c.) an engen Röhren bemerkt. Auch Rossetti[1]) findet bei seinen Versuchen eine Abnahme des Widerstandes, welche theilweise hierauf zurückkommen dürfte. Wie erheblich der Einfluſs von Glaswänden ist, an denen die heiſsen Wasserdämpfe sich niederschlagen, habe ich S. 7 gezeigt. Kaltes Glas wirkt natürlich viel schwächer. Z. B. konnte von einem Bündel feiner Glasstäbchen, welche man in das Wasser im Platingefäſse einstellte, aus einer graphischen Darstellung der Aenderung des Leitungsvermögens vor und nach diesem Zeitpunkt kein beschleunigender Einfluſs des Glases bemerkt werden. Allein ohne Ausnahme wurde Wasser, welches in gut gereinigten und verschlossenen Glasgefäſsen längere Zeit aufbewahrt gewesen war, nachher besser leitend gefunden als vorher. So war in einem solchen Falle das anfängliche Leitungsvermögen 1,5 in 4 Monaten auf 5 gewachsen.

Man sieht aus dem Mitgetheilten, daſs der Chemiker in dem Leitungsvermögen des Wassers ein Prüfungsmittel auf Reinheit besitzen würde, welches von keinem anderen

1) Rossetti, Atti del Istituto Veneto (4) III, 2171; Pogg. Ann. CLIV. 513.

an Bequemlichkeit und Genauigkeit erreicht wird. Ich glaube, dafs die Abwesenheit aller unorganischer Verbindungen bis zu jeder in Betracht kommenden Grenze durch den Widerstand des untersuchten Wassers leicht zu ermitteln ist. Dasselbe gilt jedenfalls von einer sehr grofsen Zahl organischer Stoffe, worüber aber noch weitere Untersuchungen angestellt werden müssen.

Auf der anderen Seite steht nun fest, dafs von einem bestimmten Leitungsvermögen des gewöhnlich sogenannten reinen Wassers durchaus nicht die Rede sein kann. Und so ist auch das Wasser leider ganz ungeeignet, um eine häufig vorkommende Aufgabe zu lösen, nämlich grofse Leitungswiderstände von bekanntem Betrage herzustellen. Das betreffende Wasser mufs jedenfalls besonders untersucht werden, und auch dann kann man den Widerstand nur auf kurze Zeit als constant ansehen.

Leitungsvermögen einiger anderer schlechter Leiter.

Man zählt häufig Wasser zu den Leitern, Alcohol und Aether dagegen zu den Nichtleitern oder Halbleitern der Elektricität. Nach Saïd Effendi[1]) leitet das Wasser 204mal besser als Alcohol, 250mal besser als Aether. Oberbeck (l. c.) findet die Vergleichungszahlen 7 bez. 20. Ich habe einige Versuche über die genannten Flüssigkeiten angestellt, in derselben Weise wie bei dem Wasser, und bin zu folgenden Resultaten gelangt. Der *käufliche absolute Alcohol leitete in mehreren Proben besser als mein reinstes Wasser*. Ich erhielt die Zahlen 1,8 und 2,0, d. h. etwa das $2\frac{1}{2}$fache von 0,71. Destillation (Glaskühler) über Chlorcalcium ergab 0,5 bis 0,55, gewöhnliche Destillation 0,3. Es scheinen also bei der ersterwähnten Destillation Chlorcalciumtheilchen übergeführt worden zu sein. Aber auch die kleinste Zahl 0,3 ist immer noch fast die Hälfte von der des Wassers. Oberbeck findet, auf Quecksilber zurückgeführt, ungefähr 2,5, also eine Zahl, welche denen meines gewöhnlichen Alcohols nahe steht.

1) Comptes Rendus LXVIII, 1565; 1869.

Viel schlechter als der Alcohol leitete der Aether, welcher ein Leitungsvermögen kleiner als 0,008 zeigte. Genau bestimmen konnte ich diese Zahl nicht mehr, weil die Nebenschliefsungen des ungefüllten Apparates hier in Betracht kamen.

Ich führe noch an, dafs *Essigsäure* (geschmolzener Eisessig) ein Leitungsvermögen von höchstens 0,04 zeigte, und das flüssige *Vierfach-Chlorzinn* ($Sn\,Cl_4$) jedenfalls kleiner als 2. Die letztere Flüssigkeit hatte nämlich in einem Glasgefäfs, dessen Quecksilberwiderstand gleich 0,00023 war, einen Widerstand, erheblich gröfser als 1100000 Siem. Uebrigens ist schon von Faraday die schlechte Leitung dieses Körpers bemerkt worden.

Die Essigsäure leitete also viel schlechter als der Alcohol. Ganz umgekehrt aber verhalten sich beide Flüssigkeiten bei dem Zusatz von Wasser. Nach dem Ausgiefsen der Essigsäure wurde zu dem darin gebliebenen kleinen Reste Wasser gegossen, worauf diese Mischung das Leitungsvermögen 600 hatte. Nach abermaligem Ausgufs und Auffüllen mit Wasser, wobei die Flüssigkeit nicht mehr sauer schmeckte, blieb noch 50, zum dritten Male 10. Ueber Nacht stehen geblieben, hatte diese letztere Flüssigkeit wieder 23 erhalten, so dafs offenbar noch Essigsäure aus dem Platin hervorgetreten war.

Verfuhr man mit dem Alcohol ähnlich, so fand sich nach dem Auffüllen des zurückgebliebenen Tropfens mit Wasser das Leitungsvermögen 5,8, während das betreffende Wasser selbst 5,2 hatte. Es wäre hiernach möglich, dafs auch ein geringer Zusatz von Alcohol das Wasser besser leitend macht, allein der Unterschied ist so klein, dafs er auch durch Zufälligkeiten entstanden sein kann.

$Sn\,Cl_4$ in Wasser gelöst, leitete ziemlich gut, ist aber bekanntlich dann durch Aufnahme von Krystallwasser, oder auch durch chemische Umsetzung ein anderer Körper geworden[1]), so dafs der Fall nicht hierher gehört.

1) Hittorf, Pogg. Ann. CVI, 399.

Isolirung von Reibungselektricität durch das Wasser.

Man kann das geringe Leitungsvermögen des Wassers wohl am deutlichsten zeigen, wenn man *den Widerstand einer Wassersäule mit dem einer Luftstrecke in Concurrenz setzt*, was Oberbeck bereits für Inductionsströme gethan hat. Ich schaltete zwischen die Elektroden einer Holtz'-schen Maschine, deren Schlagweite zur Zeit etwa 20^{mm} betrug, eine Säule gewöhnlichen destillirten Wassers von 1150^{mm} Länge und etwa 0,12□^{mm} Querschnitt. Die Funken hörten bei dieser Nebenschliefsung nicht etwa auf, sondern schlugen noch bei 7 bis 8^{mm} Abstand der Elektroden über. Selbst als in dasselbe Glasrohr eine Salmiaklösung von 0,005 Proc. Salz eingefüllt wurde, blieb die Schlagweite noch gleich 4 bis 5^{mm}. Als freilich der Salmiakgehalt 0,05 Proc. betrug, sah man nur noch Fünkchen, wenn die Kugeln fast ganz zusammengeschoben waren.

Diese Versuche bestätigen nur die Beobachtung Rossetti's[1]), dafs der Strom einer Influenz-Maschine

1) Rossetti, Atti Veneti (4) III, 1772. 2158, Pogg. Ann. CLIV, 507. — Es ist mir wohl erlaubt, bei dieser Gelegenheit einen Ausdruck in dem deutschen Aufsatz zu berichtigen. Daselbst heifst es nämlich: (S. 518) „Kohlrausch hat genaue Proportionalität“ (nämlich der von der Maschine gelieferten Elektricitätsmenge mit der Umdrehungsgeschwindigkeit) „angegeben; er hatte aber bei seinen „Versuchen keine Mittel, die Rotationsgeschwindigheit scharf zu „messen.“

Es wäre diefs ein eigenthümliches Verfahren meinerseits gewesen. Indessen finde ich in meinem Aufsatze (Ueber die von der Influenzmaschine erzeugte Elektricitätsmenge in absolutem Maafse, Ann. CXXXV, 123.) auch nur den Ausdruck „fast genau“, der doch wohl von den Ausdrücken „prossimamente proporzionale“, oder „sehr nahe im geraden Verhältnifs“ welche Rossetti auf seine Versuche anwendet, nicht sehr verschieden ist. Gerade weil ich allerdings die Umdrehungszahlen der Scheibe nur aus den Curbeldrehungen geschätzt hatte, konnte ich den kleinen Abweichungen von der Proportionalität, die in meinen Zahlen sich in dem gleichen Sinne aussprechen, wie bei Rossetti, keine Bedeutung beilegen.

durch Einschaltung einer Wassersäule merklich geschwächt wird; denn die letztere Thatsache zeigt, wie das Ueberschlagen der Funken trotz der Nebenschliefsung, dafs an den Enden der Wassersäule ein merklicher Bruchtheil des Potential-Unterschiedes der Maschine zurückbleibt.

Dagegen möchte ich, im Anschlufs an S. 12 dieses Aufsatzes, über die absolute elektromotorische Kraft des Holtz'schen Elektromotors und den Werth des mechanischen Wärmeäquivalents, welche Rossetti aus seinen Messungen ableitet, bemerken, dafs die Grundlage dieser Bestimmungen mir nicht hinreichend sicher zu seyn scheint. Abgesehen von der Vorfrage, ob die für constante Ströme geltenden Gesetze der Stromarbeit auf die, jedenfalls veränderlichen Ströme der Holtz'schen Maschine übertragen werden dürfen, ist es nach dem Früheren nicht möglich, von irgend einem Wasser von vornherein die Leitungsfähigkeit anzugeben. Es liegt also kein Grund vor, aus welchem das von Rossetti benutzte Wasser, wie er in seiner Berechnung des Wärmeäquivalents annimmt, gerade die Hälfte des Mittels aus den von Pouillet und Becquerel bestimmten Leitungsfähigkeiten gehabt hätte; um so weniger, als Rossetti's eigene Widerstandsbestimmungen eine vielfach geringere Leitungsfähigkeit dieses Wassers ergaben. Die abgeleiteten elektromotorischen

Den von Rossetti und mir verschieden grofs gefundenen Einflufs der Luftfeuchtigkeit auf die Ergiebigkeit der Maschine betreffend, stehen sich einfach zwei Thatsachen gegenüber, die wohl schon dadurch vereinbar sind, dafs wir ja zwei verschiedene Maschinen untersuchten. Ich habe übrigens auch nur gesagt, dafs die Ungleichheit der Ergiebigkeit an den verschiedenen Tagen innerhalb der Beobachtungsfehler lag, und damit vor Allem den Gegensatz zu der sehr veränderlichen Funkenlänge hervorheben wollen. Hätte übrigens die Luftfeuchtigkeit bei meinen Versuchen so stark geschwankt, wie bei denen von Rossetti, nämlich mehr als doppelt so stark als in Wirklichkeit, so wäre vielleicht auch ein über meine Beobachtungsfehler hinausgehender Unterschied der Stromstärken hervorgetreten.

Kräfte und das mechanische Wärmeäquivalent (428^m) sind also ebenfalls um ihr Vielfaches unsicher. Immerhin ist schon beachtenswerth, dafs man auf diesem Wege überhaupt für die letztere Gröfse eine Zahl erhält, welche mit dem bekannten Werthe vergleichbar ist.

Würzburg, Mai 1876.

II. *Die Glimmercombination von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen; von Leonhard Sohncke.*

---

§ 1. Vor einigen Jahren beschrieb Hr. Reusch folgende Erscheinung:[1]) Wenn man eine gröfsere Anzahl (etwa 12 bis 36) Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke so aufeinander schichtet, dafs die (zur Fläche der Blättchen bekanntlich etwa senkrecht stehende) optische Axenebene jedes weiter hinzugefügten Blättchens gegen die des darunter liegenden um 120° im Uhrzeigersinn gedreht ist, so dreht diese Glimmercombination die Polarisationsebene eines senkrecht hindurchgehenden Strahls ebenfalls im Uhrzeigersinn, mit anderen Worten: sie verhält sich im Polarisationsapparat ähnlich wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte *rechtsdrehenden* Quarzes. Hat man in entgegengesetztem Drehungssinn aufgeschichtet, so ist die Combination *linksdrehend.* Die Analogie mit dem Verhalten des Quarz ist so vollständig, dafs man mit 2 entgegengesetzt drehenden Glimmercombinationen sogar die Airy'schen Spiralen eben so schön erhält wie mit 2 entgegengesetzten Quarzplatten.

Diese Entdeckung des Herrn Reusch schien mir sehr

1) Monatsber. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Gesammtsitz. am 8. Juli 1869. Ueber Glimmercombinationen, pag. 530. Auch *diese Annal.* Bd. 138. p. 628.

wichtig, weil sie Licht auf die eigentliche Ursache des optischen Drehvermögens von Krystallen zu werfen versprach. Doch war es hierzu vor Allem nöthig, das Verhalten der Glimmercombination noch eingehender zu untersuchen, als es bisher geschehen war. Es handelte sich besonders um die Beantwortung zweier Fragen: 1) Wie hängt die Erscheinung von der Wellenlänge des angewandten Lichts ab? 2) Wie hängt sie vom *Azimuth* ab, d. h. von dem Winkel, den die Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit der Ebene der optischen Axen des zuerst getroffenen Blättchens bildet? — In Betreff des ersteren Punktes führt nämlich Hr. Reusch nur an, daſs eine gewisse, aus 30 Blättchen gebildete Combination dem Roth eine Drehung von 150° ertheilt habe; und in Betreff des zweiten constatirt er im Wesentlichen nur das Vorhandensein einer solchen Abhängigkeit, ohne sie — wenigstens für paralleles Licht — weiter zu verfolgen.

Indem ich die Glimmercombination hauptsächlich, wenn auch nicht ausschlieſslich, nach diesen 2 Richtungen experimentell studirte, beschränkte ich mich auf die Anwendung *parallelen* Lichts, einmal weil die Erscheinungen hier einfacher sind, dann aber, weil ich die mathematische Theorie der Erscheinungen, welche eine aus 3 Blättchen bestehende Glimmercombination (oder „*Triade*“) bei Anwendung eines senkrecht auffallenden Bündels von Parallelstrahlen darbietet, bereits vollständig entwickelt habe[1]), so daſs sich hier die Ergebnisse der Rechnung und Beobachtung miteinander vergleichen lieſsen.

Die experimentell und theoretisch durchgeführte Ermittelung des Unterschiedes, welcher im Allgemeinen zwischen dem Verhalten der Glimmercombination und dem der optisch drehenden Krystalle besteht, führt zu der bedeutsamen Erkenntniſs, daſs dieser Unterschied mehr und mehr abnimmt — bis zum gänzlichen Verschwinden — wenn man

1) Zur Theorie des opt. Drehvermögens von Krystallen. In: Math. Ann. von C. Neumann. Bd. IX. pag. 504. Vergl. auch Tageblatt der 48. Naturforschervers. Graz 1875. pag. 52.

die Blättchen der Combination in einem bestimmten Sinn mehr und mehr verändert, worüber schon Hr. Reusch eine zutreffende Vermuthung ausgesprochen hat. Hierdurch erwächst nun in der That den an sich schon interessanten Erscheinungen der Glimmercombination eine erhöhte Bedeutung; ***denn sie führen, in vollständiger Uebereinstimmung mit der von mir entwickelten Theorie der Krystallstruktur***[1]) ***zu einer einfachen Vorstellung über den Bau der optisch-drehenden Krystalle und über die Ursache des Drehvermögens derselben.***

Die Abhandlung zerfällt in 3 Abschnitte: der erste enthält die Beobachtungen; der zweite die Vergleichung derselben mit den theoretischen Formeln; der dritte giebt eine kurze Uebersicht über die Resultate und entwickelt die auf das Drehvermögen der Krystalle bezüglichen Folgerungen.

I. Beobachtungen an Glimmercombinationen.

§ 2. ***Material und Apparat.*** Die Beobachtungen wurden erstens an 2 von Hrn. Steeg hergestellten Combinationen von je 24 Blättchen, deren eine rechts, die andere links drehte, angestellt (*R* und *L*); ferner an 3 selbstverfertigten rechtsdrehenden Triaden (*A, B, C.*). Alle 5 Combinationen bestehen aus derselben Glimmersorte, deren scheinbarer Winkel der optischen Axen für das dunkle Roth eines recht homogen gefärbten Glases 70° 57′ beträgt. Die Blättchendicke ist für die Combinationen *R* uud *L* die gleiche; eine ganz genaue Angabe über dieselbe konnte mir Hr. Steeg nachträglich leider nicht mehr machen; ihr ***ungefährer*** Betrag ist $0^{mm},016$ oder noch etws weniger, wie ich durch Messung der Dicke von Blättchen fand, die nach H. Steeg nur um ein ganz Geringes dicker seyn sollen, als die zu jenen 2 Combinationen verwendeten. Von den Triaden *A*, *B*, *C* ist *A* aus den dicksten, *C* aus

3) Die unbegrenzten regelm. Punktsysteme als Grundlage einer Theor. d. Krystallstrukt. Karlsruhe. Braun. 1876. — Auszug davon in diesen Annl. Erg.-Bd VII. pag. 337—390

den dünnsten Blättchen aufgebaut; die mittlere Dicke der einzelnen Blättchen beträgt bei *A* 0^mm^,0181, bei *B* 0^mm^,0125, bei *C* 0^mm^,0099.

Abgesehen von einer Beobachtungsgruppe (§ 4.) sind alle Beobachtungen nach der Broch'schen Methode mit Anwendung von Sonnenlicht angestellt. Das vom Heliostaten durch eine runde Fensterladenöffnung (Durchmesser 4^mm^) horizontal in's Zimmer geworfene Strahlenbündel trifft in 2,5 Meter Entfernung einen Schirm mit eben so grofser Oeffnung. Dicht hinter der Oeffnung steht der *Polarisator*, nämlich ein achromatisirtes Kalkspathprisma von Soleil; von den beiden aus ihm tretenden Strahlenbündeln geht das eine in der ursprünglichen Richtung weiter, es wird allein benutzt, während das andere, zur Seite gebrochene, abgeblendet wird. Etwa in 0^m^,9 Entfernung folgt das als Analysator dienende Nicol'sche Prisma; die Entfernung ist deshalb so grofs gewählt, damit Polarisator und Analysator nicht zu nah an die Heizvorrichtung zu stehn kommen, die bei der Untersuchung des Temperatureinflusses benutzt wird. (§ 6.). Die Stellung des Nicol wird an einem in halbe Grade getheilten Kreise vermittelst Nonius auf ganze Minuten abgelesen. Dieser Kreis ist an demselben starken Fufsbrett befestigt, an dessen anderem Ende der Polarisator angebracht ist. Dicht auf den Analysator folgt ein Spektroskop, und zwar entweder ein geradsichtiges von Browning (§ 3.) oder ein gröfseres Spektrometer von Steinheil. — Zwischen Polarisator und Analysator, von letzterem 0^m^,3 entfernt, ist ein Schirm mit runder Oeffnung (4^mm^ Durchmesser), und dicht dahinter die Glimmercombination angebracht, und zwar so, dafs sie um den senkrecht durch sie hindurchgehenden Strahl als Axe gedreht werden kann. Zu dem Zweck ist sie zunächst mit Klebwachs auf einen axial durchbohrten Kork befestigt; dieser steckt in einer Hülse von Messing, welche sich in einer anderen, feststehenden Hülse drehen kann. Die Stellung des mit der drehbaren Hülse fest verbundenen Arms wird an einem in ganze Grade getheilten Kreise ab-

gelesen. Es ist die Einrichtung getroffen, dafs dieser Arm gerade dann auf 0° zeigt, wenn die optische Axenebene des zuerst durchstrahlten Blättchens horizontal liegt. Um dies zu erreichen, wurde ein weit hervorragendes schmales Stäbchen auf dasselbe Planglas, worauf die Glimmerblättchen liegen, so geklebt, dafs es zur optischen Axenebene des ersten Blättchens senkrecht stand. Der die Glimmercombination tragende Kork liefs sich nun in seiner Hülse leicht so drehen, dafs das Stäbchen vertikal, also jene optische Axenebene horizontal lag, während der Zeiger auf 0 stand.

Der Polarisator behielt in allen Versuchen eine völlig unveränderte Lage, nämlich so, dafs die Polarisationsebene des ohne Ablenkung durchgehenden Strahlenbündels *horizontal* lag. Um dies zu erreichen, wurde die gewöhnliche Schirmöffnung durch eine äufserst feine Oeffnung ersetzt, dann wurde in einiger Entfernung hinter dem Polarisator ein dünner vertical hängender Faden in den Weg des nicht abgelenkten Strahlenbündels gestellt, und darauf der Polarisator so um seine Axe gedreht, dafs beide, jetzt äusserst dünnen, Strahlenbündel den Verticalfaden trafen. Es folgt nun aus der Einrichtung eines achromatisirten Kalkspathprismas, dafs die Polarisationsebene des ungebrochen austretenden Strahls entweder mit der durch beide Strahlen bestimmten Ebene zusammenfällt oder auf ihr senkrecht steht (je nach dem das achromatisirende Glasprisma die Brechung und Farbenzerstreuung des aufserordentlichen oder des ordentlichen Strahls aufhebt). Bei meinem Prisma ist die Polarisationsebene des ungebrochen durchgehenden Strahls senkrecht auf der durch die beiden Strahlen bestimmten Ebene. Also lag die Polarisationsebene des fortan benutzten Strahlenbündels nun möglichst genau horizontal.

Wenn die optische Axenebene des ersten Blättchens aus der horizontalen Lage herausgedreht wird *im Uhrzeigersinn* für den beim Analysator befindlichen Beobachter, so ist der Winkel derselben mit der stets horizontalen Polarisationsebene des auffallenden Strahls als *positives Azimuth* gerechnet, im anderen Falle als *negatives*.

§ 3. *Einflufs des Azimuths auf die Streifenschärfe.* Die Drehung der Polarisationsebene in einem aktiven Krystall zeigt sich bei der Broch'schen Methode in der Weise, dafs bei einer bestimmten Stellung des Analysators *eine* Farbe aus dem Spektrum ausgelöscht wird (bei dickeren Krystallplatten sogar mehrere), nämlich jene, deren Polarisationsebene so weit gedreht ist, dafs sie auf der des Analysators senkrecht steht. Dreht man nun den Analysator im Uhrzeigersinn, so werden — bei rechtsdrehenden Krystallen — nacheinander Farben verlöscht, die mehr und mehr nach dem brechbareren Ende des Spektrums hin liegen, denn die Drehung ist gröfser für die kleinere Wellenlänge; man sieht also den schwarzen Streifen vom rothen nach dem violetten Ende durch das Spektrum wandern, ohne auf diesem Wege ein merklich anderes Aussehen zu gewinnen, höchstens dafs er nach dem Violett hin etwas breiter wird, entsprechend der hier stärkeren Dispersion des Prisma. Bei links drehenden Krystallen wandert der Streif in entgegengesetzter Richtung. Eine Abhängigkeit der Erscheinung vom Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Strahls ist beim Quarz nicht vorhanden und auch sonst wohl nirgends bemerkt worden.

Dafs das Verhalten der Glimmerkombination von dem eben beschriebenen abweicht, lehrt folgende, auf die Combination *R* bezügliche Tabelle, in welcher die bei 37 verschiedenen Azimuthen ausgeführten Beobachtungen zusammengestellt sind. Die einzelne Beobachtung geschah so: Bei festgehaltenem Azimuth j wurde der Analysator (unweit jener Einstellung, bei der das Spektrum zum Theil verdunkelt wird,) im Uhrzeigersinn gedreht, und die dabei eintretenden Veränderungen des Spektrums wurden aufgezeichnet. Als Spectroskop diente ein kleines geradsichtiges von Browning.

Glimmerkombination *R.*

j	Veränderung des Spectrums bei Analysatordrehung im Uhrzeigersinn.
— 90°	In Roth und Gelb kaum eine Verdunkelung wahrzunehmen, erst im *Grün* taucht eine mäfsige Trübung auf und wandert zum violetten Ende.
— 85	Wie vorher, nur dafs die Trübung erst im *Blau* merklicher auftritt.
— 80	Desgleichen, aber die Trübung ist noch weniger merklich.
— 75	*Man nimmt überhaupt kaum wahr, dafs eine Trübung über das Spectrum zieht.*
— 70	Fast ebenso undeutlich.
— 65	Eine wenig stärkere Trübung zieht über das Spectrum.
— 60	Etwa ebenso.
— 55	Im äufsersten *Roth* taucht ein schwarzer Streifen auf, verliert aber plötzlich schon im *Roth* wieder seine Schärfe, und wandert nur als schwache Trübung über das übrige Spectrum.
— 50	Im äufsersten *Roth* taucht ein scharfer schwarzer Streif auf, verliert im *Gelb* seine Schärfe u. s. f. wie vorher.
— 45	Im *Roth* ist der Streif am schärfsten, er verliert sich im *Grün*, u. s. f.
— 40	Im *Roth-Orange* am schärfsten, er verliert sich im Blaugrün (bei Linie F.), u. s. f.
— 35	Im Roth mäfsig dunkel, wird der Streif am schärfsten im *Gelbgrün*, verliert im Blau seine Schärfe, und kommt als mäfsige Trübung an's violette Ende.
— 30	*Der Streif erhält sich auf der Wanderung fast durch das ganze Spectrum; vollkommen scharf ist er im Grün zwischen den Linien E und b.*
— 25	Von Roth an mäfsig trübe, wird der Streif im *Grünblau* (bei F.) ganz scharf, und läfst sich, an Schärfe sehr abnehmend, bis an's Violette Ende verfolgen.
— 20	Erst im *Blau* taucht der Streif stark auf.
— 15	Trübung von *Grün* an merklich, aber erst im *Blau-Violett* ein scharfer Streif.
— 10	Deutlichere Verdunkelung erst von *Blau* an sichtbar.
— 5	Nur mäfsige Verdunkelung zieht über das Spectrum, nach *Viotett* hin zunehmend.
0	Am rothen Ende kaum eine Trübung, im *Grünblau* merklicher, zunehmend nach *Violett* hin.
+ 5	Erst im *Blau-Violett* eine merkliche Trübung.
+ 10	Etwa ebenso.
+ 15	*Es ist überhaupt kaum eine Trübung zu bemerken.*
+ 20	Etwa ebenso.
+ 25	Eine nur wenig stärkere Trübung zieht vorüber.
+ 30	Etwas dunklere Trübung.
+ 35	Am *rothen* Ende taucht eine streifenartige Trübung auf, doch im übrigen Spectrum fehlt ihr die Schärfe gänzlich.
+ 40	Deutlicher Steif im *Roth*, er verliert im *Gelbgrün* seine Schärfe und wandert als Trübung an's violette Ende.

j	Veränderung des Spectrums bei Analysatordrehung im Uhrzeigersinn.
+ 45	Der Streif im *Roth und Gelb* schärfer als vorher, verliert sich im *Grün*, u. s. f. wie vorher.
+ 50	Streif am schärfsten im *Orange*, verliert im *Grün* plötzlich seine Schärfe u. s. f.
+ 55	Streif erhält sich vom Roth bis in's Blaugrün, u. s. f. wie vorher; gröfste Schärfe im *Gelb*.
+ 60	*Streif erhält sich auf der Wanderung fast durch das ganze Spectrum; vollkommenste Schärfe im Grün; überhaupt ist er jetzt am deutlichsten geworden.*
+ 65	Erst im *Grün* taucht der Streif deutlich auf, ist im Anfang des *Blau* am schärfsten; nachher wieder ziemlich verwaschen.
+ 70	Noch sieht man zwar vom Roth an eine Trübung, doch ist sie erst *jenseits F* ein Streifen, freilich nicht ganz scharf.
+ 75	Streif taucht erst noch weiter nach dem *Violett* hin auf.
+ 80	Erst im *Blau* wird überhaupt eine merkliche Verdunkelung sichtbar.
+ 85	Matte Trübung zieht über das Spectrum; erst im Violett etwas dunkler.
+ 90	Etwa ebenso.

Man erkennt, dafs bei den Azimuthen — 75 bis — 70° ***und*** + 15 bis + 20° ***die Verlöschung sämmtlicher Farben am wenigsten gelingt,*** dafs von dort an mit wachsendem Azimuth die Ausbildung eines dunkeln Streifens zunächst stetig zunimmt, und dafs, sobald es überhaupt zu einer deutlichen Streifenbildung gekommen ist, mit weiter wachsendem Azimuth die Stelle seiner gröfsten Schärfe allmählich vom rothen nach dem violetten Ende des Spectrums hinrückt, bis endlich überhaupt kein scharfer Streif mehr auftritt, sondern nur noch eine ebenfalls abnehmende Trübung des blauvioletten Endes des Spectrums. ***Fast vollkommen ist die Uebereinstimmung mit der von drehenden Krystallen dargebotenen Erscheinung bei den Azimuthen*** — 30° ***und*** + 60°. Die scheinbare Breite des Streifens am Orte seiner gröfsten Schärfe ist hier geringer als der Zwischenraum der Linien *b* und *F* im Browning'schen Spectroskop.

Die bei den einzelnen Azimuthen zwischen — 90° und 0° auftretenden Erscheinungen wiederholen sich, wie man sieht, in derselben Reihenfolge bei den Azimuthen

zwischen 0^0 und $+ 90^0$. Dasselbe findet für die Azimuthe in den zwei folgenden Quadranten von 90^0 bis 180^0, und von 180^0 bis -90^0 Statt, wie ausführliche Beobachtungen lehren, die ich der Kürze halber nicht mittheile. Bei solchen Azimuthen, bei denen ein scharfer Streifen sichtbar ist, wurde auch diejenige Stellung des Analysators abgelesen, bei welcher die Mitte des Spectrums (Mitte zwischen *b* und *F*) am stärksten verdunkelt war. (Spalte „Analysator" der folgenden Tabelle.) Wegen der geringen Genauigkeit, die sich hier, noch ohne Hülfsmaſsregeln, nur erreichen lieſs, wurde nur bis auf Viertelsgrade abgelesen. Jede der angegebenen Zahlen ist das Mittel aus 3 bis 5 verschiedenen Einstellungen.

Glimmerkombination *R*.

Azimuth	Analys.	Azimuth	Analys.	Azimuth	Analys.	Azimuth	Analys.
-130^0	$5\frac{1}{2}{}^0$	-40^0	6^0	$+50^0$	$5\frac{3}{4}{}^0$	$+140^0$	$5\frac{3}{4}{}^0$
-120	$10\frac{3}{4}$	-30	$10\frac{1}{2}$	$+60$	10	$+150$	$10\frac{1}{4}$
-110	$10\frac{1}{2}$	-20	10	$+70$	$9\frac{3}{4}$	$+160$	$9\frac{3}{4}$

Diese Zahlen lehren, daſs man bei Azimuthen, die um 90^0 verschieden sind, zur stärksten Verdunkelung der Mitte des Spectrums dem Analysator stets etwa dieselbe Stellung geben muſs. — Also ist folgendes Gesammtergebniſs gewonnen: ***Die von der Glimmerkombination R dargebotene Erscheinung ist für Azimuthe, welche um 90° verschieden sind, dieselbe**; d. h. **die Erscheinungen wiederholen sich in den 4 Quadranten in derselben Weise.***

Auch bei den Triaden *A* und *C* wurde für eine Reihe verschiedener Azimuthe die Verdunkelung bei ihrer Wanderung vom Roth zum Violett verfolgt. Es wurde nur durch die 2 Quadranten von -90^0 über 0^0 bis $+90^0$ beobachtet. Auch hier stellte sich heraus, daſs die Erscheinungen sich in den einzelnen Quadranten in gleicher Weise wiederholen; daher genügt es, sie nur für einen Quadranten mitzutheilen.

Triade *A*.

j	Veränderung des Spectrums bei Analysatordrehung im Uhrzeigersinn.
+ 0°	Schwache breite Trübung zieht vorüber, jedoch viel schmäler als das Spectrum.
+ 10	Die Trübung ist noch matter.
+ 20	Es ist kaum eine Trübung zu bemerken.
+ 30	Die Trübung ist sehr undeutlich.
+ 40	Eine matte Verdunkelung wandert über das Spectrum hin.
+ 50	Von Roth bis Grün erhält sich ein mäſsig dunkler Streif.
+ 55	Verdunkelung noch stärker; besonders deutlicher Streif im Grünblau.
+ 60	*Streif sehr dunkel, besonders deutlich im Blau.*
+ 65	Im Roth taucht ein Streif verwaschen auf, er wird tief dunkel und scharf im Blauviolett.
+ 70	Die Verdunkelung ist weniger intensiv.
+ 80	Viel mattere, verwaschenere Trübung zieht über das Spectrum.
+ 90	Verdunkelung noch geringer.

Obgleich der Streif bei günstigen Azimuthen recht scharf und dunkel war, so lag er doch schief, d. h. seine beiden Enden lagen in verschiedenen Farben. Dies weist auf eine Unvollkommenheit der Triade hin, darin bestehend, daſs verschiedene Stellen derselben etwas verschiedene Dicke haben, so daſs sie auf dieselbe Farbe verschieden wirken. In Folge dieses Umstandes kann die ganze Tabelle nicht den Anspruch auf groſse Zuverlässigkeit machen.

Triade *C*.

j	Veränderung des Spectrums bei Analysatordrehung im Uhrzeigersinn.
+ 0°	Ziemlich starke Trübung, die aber die einzelnen Farben noch erkennen läſst, zieht vorüber; sie ist sehr breit, so daſs sie bei einer gewissen Analysatorstellung das ganze Spectrum bedeckt.
+ 10	Verdunkelung vielleicht ein weniges heller.
+ 20	Die Trübung scheint etwas zuzunehmen.
+ 30	Etwa ebenso; man unterscheidet noch Farben.
+ 40	Die Verdunkelung ist intensiver und vielleicht ein wenig streifenartiger.
+ 50	Wohl noch etwas stärkere Trübung wandert über das Spectrum.
+ 55	Verdunkelung ist so tief, daſs die Farben nicht mehr unterscheidbar.

j	Veränderung des Spectrums bei Analysatordrehung im Uhrzeigersinn.
+ 60	Ganz tiefes Dunkel lagert sich über das Spectrum, jedoch kann man bemerken, dafs das Roth zuerst davon ergriffen und auch zuerst wieder verlassen wird.
+ 65	Etwa ebenso, vielleicht eine Spur weniger dunkel.
+ 70	Verdunkelung noch sehr stark, jedoch etwas geringer wie vorher; man erkennt wieder Farben.
+ 80	Verdunkelung hat noch ein wenig nachgelassen.
+ 90	Vielleicht noch etwas heller.

Ergebnifs: Das Verhalten beider Triaden nähert sich dem des Quarzes am meisten zwischen $j = 55$ *und* 65^0, *während sich die Verdunkelung bei* $j = 10^0$ *bis* 30^0 *am wenigsten intensiv machen läfst. Es ist sehr bemerkenswerth, dafs der Einflufs des Azimuths bei der dünnblättrigen Triade C viel weniger hervortritt als bei der dickblättrigen A.* Die Verdunkelung ist nämlich bei Triade *C* gar nicht sehr verschieden für die verschiedenen Azimuthe, sondern immer ziemlich stark; auch ist sie für alle Farben etwa gleich stark, so dafs nicht das Auftauchen eines schärferen Streifens und wiederum ein Verwaschenwerden desselben wie bei Triade *A* beobachtet wird.

§ 4. *Deutung der Verschiedenheit der Streifenschärfe. Umlaufsrichtung auf der Schwingungsellipse.* Die beschriebenen Erscheinungen lassen nur folgende Deutung zu: Wenn ein einfarbiger gradlinig polarisirter Lichtstrahl senkrecht auf das erste Glimmerblättchen trifft, so liefert er zunächst 2 mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreitende ebene Wellen, bezüglich $\parallel$ und $\perp$ zum Hauptschnitt (hier = Ebene der optischen Axen) polarisirt. Jede derselben erfährt in jedem folgenden Blättchen eine entsprechende Zerlegung. Aus dem letzten Blättchen treten 2 gradlinig polarisirte Strahlen, die bezüglich $\parallel$ und $\perp$ zum Hauptschnitt des letzten Blättchens schwingen und eine gewisse Phasendifferenz besitzen. Sie setzen sich also zu einem *elliptisch polarisirten Strahl* zusammen, der natürlich beim Durchgang durch den Analysator im All-

gemeinen nicht vollständig ausgelöscht werden kann. Denkt man den elliptischen Strahl durch 2 Componenten ersetzt, die ‖ den Axen der Ellipse schwingen, so mufs die stärkste Verdunkelung offenbar dann eintreten, wenn die Polarisationsebene des Analysators senkrecht zur Polarisationsebene derjenigen Componente steht, die ‖ der grofsen Axe schwingt. Geht die Ellipse in eine gerade Linie über, so läfst sich vollständige Verdunkelung erreichen; nähert sie sich einem Kreise, so ist bei Veränderung der Analysatorstellung kaum mehr eine Verdunkelung wahrzunehmen. Hiernach sind die obigen Beobachtungsergebnisse so auszusprechen: *Giebt man dem Azimuth eines einfarbigen, gradlinig polarisirt auf eine Glimmercombination auffallenden Strahls nach einander alle Werthe innerhalb eines Quadranten, so durchläuft die Schwingungsellipse des austretenden Strahls sehr verschiedene Formen, von einer gewissen Form mit geringster Excentricität an bis zur geraden Linie. Letztere tritt in der Nähe von* $j = 60^0$, *erstere bei einem Azimuth zwischen* 10 *und* 30^0 *ein. Für je* 4 *um* 90^0 *verschiedene Azimuthe ist die Schwingungsellipse nach Gestalt und Lage identisch.*

Trotz dieser Identität bleibt es noch zweifelhaft, *ob die Umlaufsbewegung auf der Ellipse immer in demselben Sinn erfolgt.* Zur Entscheidung dieser Frage diente eine Hülfsuntersuchung vermittelst des Babinet'schen Compensators. Mir stand ein Apparat, wie ihn Jamin zur Untersuchung des reflectirten Lichts benutzt hat, zur Verfügung (vergl. z. B. Beers Optik pag. 126.) Als Lichtquelle diente hier eine Gasflamme, von der jedoch, in Folge der Einschaltung eines rothen Glases, nur ziemlich homogenes Roth ins Auge gelangte. Zuerst wurde die Glimmercombination *R* beobachtet. Die sie bildenden Glimmerblättchen liegen unveränderlich auf einer nahezu quadratischen Glasplatte fest. Daher giebt man der Combination einfach dadurch 4 um je 90° verschiedene Azimuthe, dafs man sie nacheinander mit den 4 Kanten auf das Tischchen des Jamin'schen Apparats stellt. Der Polarisator bleibt bei den 4 Auf-

stellungen unverändert; er ist so eingestellt, dafs bei der ersten Aufstellung $j = +60^\circ$ ist. Jetzt kann die Ellipse nicht allzusehr von einer graden Linie verschieden sein, denn für $j = 60^\circ$ gelang ja (§ 3.) die Verdunkelung für fast alle Farben ziemlich vollkommen; am vollkommensten freilich für Grün, während jetzt mit Roth beobachtet wurde. — Es wird nun die kleinste Verschiebung aus der Nullstellung aufgesucht, welche man der vordersten Platte des Compensators ertheilen mufs, um vollständige Auslöschung zu ermöglichen; letztere tritt aber natürlich erst dadurch ein, dafs man auch dem Analysator die richtige Stellung giebt. Man notirt Gröfse und Richtung der Verschiebung v (in Theilstrichen der Compensatorskala), sowie die zur Auslöschung erforderliche Stellung des Analysatorzeigers A, nur bis auf halbe Grade abgelesen. So wurde folgendes gefunden:

Glimmerkombination R.
Rothes Licht.

j	v	A
60°	1,75 rechts	+ 155°
60 + 90	1,77 links	+ 155
60 + 180	1,82 rechts	+ 155
60 + 270	1,71 links	+ 156

Jede der unter v stehenden Zahlen ist das Mittel aus 8 oder 9 Einstellungen (die z. B. für $j = 60^\circ$ zwischen den Extremen 1,46 und 2,16 liegen). Wie man sieht, sind bei 2 um 90° verschiedenen Azimuthen *entgegengesetzte*, aber etwa gleich grofse Verschiebungen des Compensators nöthig, um einen geradlinig polarisirten Strahl austreten zu lassen. Nun mifst die Compensatorverschiebung die Phasendifferenz von 2 gewissen geradlinig polarisirten Theilstrahlen, in welche der einfallende elliptische Strahl zerlegt gedacht werden kann, und welche 2 festen aufeinander senkrechten Richtungen des Compensators parallel schwingen. Für das eine Azimuth ist also der eine dieser Theilstrahlen dem anderen um einen gewissen Betrag vor-

aus, für das um 90° verschiedene Azimuth ist er ebenso viel hinter ihm zurück. In beiden Fällen aber hat die Polarisationsebene des aus dem Compensator austretenden geradlinig polarisirten Strahls dieselbe Lage, denn er wird beidemal durch dieselbe Analysatorstellung vernichtet; somit ist das Amplitudenverhältniſs der beiden austretenden — und folglich auch der beiden eintretenden — Strahlen beidemal dasselbe. Nun setzen sich bekanntlich 2 aufeinander senkrechte Schwingungen von den Gleichungen $x = A_h \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{D_h}{\lambda}\right)$ und $y = A_s \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{D_s}{\lambda}\right)$ zu einer elliptischen Schwingung zusammen, deren Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{A_h^2} + \frac{y^2}{A_s^2} - \frac{2xy}{A_h . A_s} \cos \frac{2\pi(D_h - D_s)}{\lambda} = \sin^2 \frac{2\pi(D_h - D_s)}{\lambda};$$

und man sieht unmittelbar, *daſs genau dieselbe Ellipse resultirt*, wenn man, bei unverändert gelassenen Amplituden, der Phasendifferenz das entgegengesetzte Vorzeichen giebt. *Nur die Umlaufsbewegung ist im zweiten Fall der vorigen entgegengesetzt.* Dies trifft also auch im vorliegenden Falle zu, und man schlieſst: *Für je 2 um 90° verschiedene Azimuthe ist die Schwingungsellipse des aus der Glimmerkombination austretenden Strahls nach Gestalt und Lage identisch, aber sie wird in entgegengesetztem Sinn durchlaufen.*

Obgleich der letzte Theil dieses Satzes zunächst nur für $j = 60°$ und die um je 90° verschiedenen Azimuthe bewiesen ist, so gilt er doch allgemein, denn offenbar kann die Umlaufsbewegung bei stetiger Veränderung des Azimuths nicht anders in die entgegengesetzte übergehen, als indem die Ellipse die Durchgangsform der geraden Linie annimmt. Dies aber findet, wie gezeigt, nur für 4 um 90° verschiedene Azimuthe Statt. — Umgekehrt folgt aus der beobachteten Entgegengesetztheit der Umlaufsbewegung in 2 Nachbarquadranten, daſs für jede Farbe bei 4 um 90° verschiedenen Azimuthen die Schwingungsellipse wirklich absolut in eine gerade Linie übergehen muſs, sonst könnte sich die Umlaufsrichtung nicht umkehren.

Die entsprechenden Beobachtungen mit dem Babinet'schen Compensator wurden auch an der Triade C angestellt. Aus den Beobachtungen des § 3 hatte sich ergeben, dafs die geringste, obgleich immer noch sehr starke Trübung, also die geringste Excentricität der Schwingungsellipse, etwa bei $j = 15^0$ eintritt. Hier mufste also die Phasendifferenz der beiden Theilstrahlen des Compensators von merklicher Gröfse erwartet werden. Als Mittel aus je 10 Einstellungen wurde erhalten:

Triade C.

j	v	A
15^0	1,08 rechts	+ 76,9
15 + 90	1,075 links	+ 77,1
15 + 180	$>$ 1 rechts	—

Bei $j = 15 + 180$ wurden keine genauen Einstellungen gemacht, sondern nur der Sinn der Compensatorverschiebung festgestellt. Die Zahlen dieser Tabelle bestätigen die vorher gezogenen Schlüsse vollständig. Gleichzeitig bemerkt man, auch ohne die Excentricität der Ellipse wirklich zu berechnen, dafs sie doch noch recht erheblich ist, denn bei meinem Compensator entspricht erst eine Verschiebung $v = 8{,}00$ einer Phasendifferenz der 2 Theilstrahlen von $\frac{\lambda}{4}$.

§ 5. ***Einflufs der Wellenlänge und des Azimuths auf die Drehung.*** Obgleich aus der Glimmerkombination im Allgemeinen kein geradlinig polarisirter Strahl austritt, so ist man doch berechtigt, von einer *Drehung* zu sprechen, welche die *Polarisationsebene* eines geradlinig polarisirt einfallenden Strahls beim Durchgang durch die Combination erleidet, indem man darunter den *Winkel* versteht, *den die Polarisationsebene der zur grofsen Axe der Schwingungsellipse parallel schwingenden Componente des austretenden Strahls mit der Polarisationsebene des eintretenden bildet.* Es ist der Winkel, den man bei der Glimmerkombination

ebenso wie bei den gewöhnlichen drehenden Substanzen ermittelt, indem man den Analysator auf stärkste Verdunkelung einstellt. Der Winkel dieser Einstellung gegen die Stellung stärkster Verdunkelung bei fehlender Glimmerkombination mifst ihre Drehwirkung.

Zu diesen Beobachtungen diente ein Spektrometer von Steinheil. Es besitzt statt eines Fadenkreuzes einen Verticalfaden, ausgespannt in einer mäfsig breiten rechteckigen Oeffnung. Diese Oeffnung machte ich bedeutend enger, um auf ein Mal immer nur einen kleinen und nicht zu verschiedenfarbigen Theil des Spectrums zu übersehn. Durch dieses einfache Mittel wurde die Schärfe der Beobachtungen ganz wesentlich gesteigert; es ist klar, dafs in Folge der Beseitigung der übrigen Farben das Auge weniger geblendet und die Aufmerksamkeit mehr concentrirt wird, wodurch eben die stärkste Verdunkelung der einen beobachteten Farbe leichter aufgefafst werden kann.

Um den *Einflufs der Wellenlänge* zu ermitteln, wurde bei festgehaltenem Azimuth die Drehung nacheinander für die Fraunhofer'schen Linien *BCDEbFGH* bestimmt, indem zunächst der Verticalfaden auf die betreffende Spektrallinie eingestellt und darauf durch Analysatordrehung stärkste Verdunkelung bewirkt wurde. Für die Linie *H* waren die betreffenden Einstellungen sehr zweifelhaft, hauptsächlich wohl deswegen, weil das als Polarisator dienende Kalkspathprisma nicht völlig achromatisirt war. In Folge dessen wich das Violett schon merklich von der horizontalen Richtung des übrigen Strahlenbündels ab, so dafs es z. Th. nicht mehr durch die Schirmöffnung hindurchging, und somit nur unvollkommen auf den Spektrometerspalt fiel.

Der *Einflufs des Azimuths* auf die Drehung ist nicht Schritt für Schritt verfolgt, sondern es wurden nur für je 2 oder höchstens 3 verschiedene Azimuthe die Drehungen der Polarisationsebene obiger Fraunhofer'schen Linien bestimmt.

Bei 2 um 180° verschiedenen Stellungen des Analysa-

tors mufs Dunkelheit eintreten. Für den Fall, dafs kein Drebstoff zwischen Polarisator und Analysator steht, wurden als Stellungen *(S)* des Analysatorzeigers Behufs völliger Verdunkelung ermittelt:

Links $S = 91^0\ 30'$; Rechts $S = 88^0\ 28'$.

Die Theilung des Analysatorkreises geht nämlich von einem ziemlich oben gelegenen Nullpunkte zu dem diametral gegenüberliegenden Punkte links herum und rechts herum bis 180⁰. Jede der beiden angegebenen Zahlen ist das Mittel von 22 Einstellungen, ihre gröfste Abweichung von Mittel beträgt 10 Minuten. Der wahrscheinliche Fehler von S links ist 0,'59, der von S rechts 0,'79.

Wo die Glimmercombination einen scharfen Verlöschungsstreifen liefert, und in Folge dessen die verschiedenen Einstellungen gut übereinstimmen, sind beiderseits nur je 4 oder 5 Einstellungen gemacht; wo aber die Verdunkelung nur gering ist, machte ich beiderseits immer viel mehr Ablesungen (bis 15).

Bei der Combination R liegen, falls das für scharfe Verlöschung günstigste Azimuth $j = 60^0$ gewählt ist, die äufsersten Werthe verschiedener Einstellungen der *bestverlöschten* Farbe nur etwa 12 Minuten auseinander, bei der Mehrzahl der Farben beträgt aber dieser Spielraum $\frac{1}{2}$ bis 2 Grad, und bei der mattestverlöschten (G) sogar 9⁰. Wählt man dagegen das ungünstigste Azimuth $j = 15^0$, so ist dieser Spielraum bei den relativ stark verdunkelten Farben 8⁰, bei den mattestverlöschten aber sogar 19⁰. Trotzdem sind die erlangten Mittelzahlen vollkommen brauchbar; das erhellt sowohl aus der immerhin nur mäfsigen Gröfse des wahrscheinlichen Fehlers, der für einige der Drehungswinkel unten mitgetheilt ist, als auch aus folgendem Umstande: Wenn man beim ungünstigen Azimuth die Drehungen einmal aus den Einstellungen am Analysatorkreise links bestimmt, und dann aus den Einstellungen rechts, so weichen beide Bestimmungen in den meisten Fällen viel weniger als 1⁰ von einander ab, und erreichen in keinem Falle 2⁰; beim günstigen Azimuth aber differiren

sie nur um mehrere Minuten. — Aehnliches gilt für die übrigen Glimmercombinationen.

Von meinem sehr umfangreichen Beobachtungsmaterial theile ich hier nur 2 kürzere Reihen, betreffend die Drehung der Farbe *B* in der Glimmercombination *R* bei den Azimuthen 60° und 15°, als Beispiele ausführlich mit. Die Zahlen bedeuten die Ablesungen am Analysatorkreise links und rechts.

	$j = 60^\circ$		$j = 15^\circ$	
	Links	Rechts	Links	Rechts
	34° 47'	146° 6'	36° 29'	143° 47'
	35 36	144 9	36 46	146 55
	34 4	145 8	35 30	143 3
	34 13	145 4	41 30	143 18
	36 40	143 30	30 7	147 1
			30 45	144 28
			34 29	144 29
Mittel	35 20	144 47	35 5	144 43
∠S=	91 30	88 28	91 30	88 28
Diff.	56 10	56 19	56 25	56 15
Drehung	56° 14',5		56° 20'	

In derselben Weise wie hier sind alle Drehungswinkel der folgenden Tabellen dieses § gewonnen. Zunächst stelle ich die Drehungswinkel für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien bei der Combination *R* zusammen.

Glimmerkombination *R*.

	$j = 60^\circ$		$j = 15^\circ$	
Linie	Drehung	Wahrsch. F.	Drehung	Wahrsch. F.
B	56° 14',5	± 12',8	56° 20'	± 30',9
C	63 22		63 47	
D	75 30		75 1	
E	92 24	± 2',6	94 37	± 41',8
b	95 34		—	
F	107 21		115 7	
G	131 48	± 26',9	141 59	± 25',5
(*H*	155 56		159 0	)

Man erkennt, daſs die Drehung erheblich zunimmt mit abnehmender Wellenlänge; sie ist für *H* etwa 3 mal so

grofs als für *B*. Obgleich bei $j = 15^0$ die Verdunkelung für alle Farben nur sehr schwach ist (vergl. § 3), so ist es doch gelungen, sie unzweideutig zu beobachten. Die Drehung ist hier im Allgemeinen gröfser als bei $j = 60^0$, und zwar wächst die Differenz der Drehungen bei beiden Azimuthen im Allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge.

Bei der Combination *L*, welche aus ebensovielen und möglichst entsprechenden Blättchen wie *R* aufgebaut ist, — nur mit linkem Windungssinn — beobachtet man auch entgegengesetzte Drehung der Polarisationsebene als bei *R*. Die Drehung wurde für die Azimuthe 90° und 30°, welche hier auch im entgegengesetzten Sinne wie vorher gerechnet sind, beobachtet. Bei $j = 90^0$ zeigt sich ein scharfer Streif unmittelbar neben *D* nach dem Grün zu, bei $j = 30^0$ fällt ein schwacher Streif etwa auf *F*. Die Drehungswinkel sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; sie sind vielleicht nicht ganz so sicher wie die vorigen, weil die mit *L* angestellten Beobachtungen die ersten waren.

Glimmerkombination *L*.

	$j = 90^0$		$j = 30^0$	
Linie	Drehung		Drehung	
B	54°	16′	57°	59′
C	60	1	62	49
D	70	53,5	76	20,5
E	87	22,5	92	30,5
b	90	41	95	22
F	101	27,5	107	24,5
G	124	30	129	40,5
(*H*	152	18	151	16)

Bei den Beobachtungen der ***Triade A*** wichen die Einstellungen links und rechts stärker von einander ab als bei allen sonstigen Beobachtungen. Dies ist eine Folge der, schon im § 3 erwähnten, nicht hinreichend gleichmäfsigen Dicke der Blättchen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes; denn bei der linken und rechten Einstellung des Nicol fallen auf dieselbe Stelle des Spektro-

meterspalts Strahlen, die durch verschiedene Partien der Triade gegangen sind. Es wurde nur bei den Azimuthen 0° und + 37°,5 beobachtet.

Triade *A*. (Blättchendicke 0,0181 mm).

Linie	$j = 0°$	$j = +37°,5$
B	7° 39′	7° 32′
C	8 32	8 11
D	10 51	10 8
E	12 37	—
b	13 29	—
F	14 28	12 46
G	16 14	—
(*H*	16 27	16 20)

Die Drehung ist, wie man sieht, ***bei allen Farben für das gröſsere der beiden Azimuthe geringer.***

Die Beobachtungen an der nächstdünneren Triade *B* beziehen sich auf die Azimuthe 0° und + 120°. Sie sind die ersten überhaupt an Triaden gemachten, und daher etwas weniger sicher (namentlich die bei $j = 0°$) als die an den Triaden *A* und *C*. Damals hatte ich noch keine Vorrichtung zum Messen des Azimuths, so daſs es sogar um mehrere Grade von 0° resp. 120° verschieden sein kann; ferner wurden zu wenig Beobachtungen gemacht, und dies war nicht nachzuholen, weil die Triade verdorben wurde.

Triade *B*. (Blättchendicke = 0,0125 mm).

Linie	$j = 0°$	$j = +120°$
C	2° 53′	2° 58′
D	4 11	3 32
b	5 6	4 4
F	6 9	4 57
G	7 13	5 53

Sämmtliche Drehungen sind bei dieser dünneren Triade geringer als bei der vorigen. Fast für alle Farben ist

die Drehung beim gröfseren der beiden Azimuthe geringer als beim kleineren.

Die Beobachtungen an der dünnsten Triade C beziehen sich auf die Azimuthe 0°, + 45°, — 7°,5.

Triade *C.* (Blättchendicke 0,0099).

Linie	$j=0^0$	$j=-7^0,5$	$j=+45^0$
B	1° 27′	—	—
C	1 48	1° 53′	1° 56′
D	2 12	2 1	2 6
E	2 38	—	2 30
b	2 45	—	—
F	2 55	2 56	2 53
G	3 45	—	—
H	3 55 (?)	—	—

Die Unterschiede der Drehungswinkel bei verschiedenen Azimuthen sind so gering, dafs sie noch innerhalb der Beobachtungsfehler liegen, zumal mit Rücksicht auf die grofse Schwierigkeit der Beobachtungen gerade bei dieser Triade, wo kein schärferer Streif auftritt.

Ergebnisse: Der Einflufs des Azimuths auf die Gröfse der Drehung ist deutlich nachweisbar bei Combinationen und Triaden aus dickeren Blättchen, dagegen unmerklich bei der Triade aus den dünnsten Blättchen.

Die durch eine Triade bewirkte Drehung nimmt für alle Farben ab mit der Dicke der Blättchen.

Der Einflufs der Wellenlänge auf die Drehung ist bei allen Combinationen sehr erheblich, und zwar der Art, dafs mit abnehmender Wellenlänge die Drehung der Polarisationsebene stark wächst.

Es lag nahe zu versuchen, ob sich diese letztere Abhängigkeit etwa durch dieselbe Formel ausdrücken lasse, wie beim Quarz. Bedeutet α den Drehungswinkel, λ die Wellenlänge (gemessen in Tausendstelmillimetern), m, p, q Constante, so ist der Drehungswinkel beim Quarz durch die Biot'sche Formel $\alpha = \frac{m}{\lambda^2}$ nur unvollkommen

dargestellt, dagegen sehr genau durch Boltzmann's Formel:[1])

$$\alpha = \frac{p}{\lambda^2} + \frac{q}{\lambda^4}.$$

Ich habe beide Formeln versucht; dabei wurden, mit Boltzmann, die von Ditscheiner gegebenen Werthe von λ benutzt.

Die von Triade *B* bei $j = 0^0$ und bei $j = 120^0$ bewirkten Drehungen lassen sich angenähert durch die Formeln darstellen:

$$\alpha_{j=0} = \frac{1,370}{\lambda^2} \text{ und } \alpha_{j=120} = \frac{1,1704}{\lambda^2}$$

Die nach letzterer Formel berechneten Werthe sind hier den beobachteten gegenübergestellt:

Triade *B*. $j = 120^0$.

Linie	α beobachtet	α berechnet	Differenz.	*P*
C	$2^0,96$	$2^0,72$	$+0^0,24$	$+8,1$
D	3,54	3,37	$+0,17$	$+4,8$
b	4,07	4,38	$-0,31$	$-7,6$
F	4,94	4,96	$-0,02$	$-0,4$
G	5,89	6,30	$-0,41$	$-7,0$

Die mit *P* überschriebene Spalte enthält den *procentischen Fehler*, d. h. die Abweichung zwischen berechnetem und beobachtetem Werth in Procenten des beobachteten. Dieser Fehler ist so grofs, dafs die Biot'sche Formel offenbar nicht genügt, um die Erscheinung darzustellen.

Die von Triade *C* bewirkte Drehung bei $j = 0^0$ habe ich durch beide Formeln ausgedrückt; sie lauten;

$$\alpha = \frac{0,724}{\lambda^2} \text{ und } \alpha = \frac{0,7846}{\lambda^2} - \frac{0,01688}{\lambda^4}$$

Die Constanten sind unter Ausschliefsung der hier sehr unzuverlässigen Messungen für *H* berechnet, und

1) Ueber den Zusammenhang zwischen der Drehung der Polarisationsebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben. In Poggendorff's Annalen, Jubelband 1874, pag. 128 ff.

zwar bei der zweigliedrigen Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Triade *C*. $j = 0^0$.

Linie	α beob.	α berechn. nach Biot	Diff. ε	*P*	α berechn. nach Boltzmann	Diff. ε	*P*
B	1°,45	1°,53	— 0°,08	— 5,5	1°,59	— 0°,14	— 9,6
C	1,80	1,68	+ 0,12	+ 6,7	1,73	+ 0,07	+ 3,9
D	2,20	2,09	+ 0,11	+ 5,0	2,12	+ 0,08	+ 3,6
E	2,63	2,61	+ 0,02	+ 0,8	2,61	+ 0,02	+ 0,8
b	2,75	2,71	+ 0,04	+ 1,5	2,70	+ 0,05	+ 1,8
F	2,92	3,06	— 0,14	— 4,8	3,02	— 0,10	— 3,4
G	3,75	3,90	— 0,15	— 4,0	3,74	+ 0,01	+ 0,3
(*H*	3,92	4,60	— 0,68	— 17,3	4,30	— 0,38	— 9,7)
		$\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}077$			$\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}044$		

Natürlich stellt die zweigliedrige Formel die Beobachtungen besser dar als die eingliedrige, doch ist der procentische Fehler immer noch sehr erheblich.

Endlich wurde auch die bei $j = 60^0$ von der Combination *R* ausgeübte Drehung durch die zweigliedrige Formel dargestellt. Die Constanten derselben sind nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Hülfe der beobachteten Drehungen aller 8 Fraunhofer'schen Linien berechnet. Man findet:

$$\alpha = \frac{27{,}705}{\lambda^2} - \frac{0{,}5345}{\lambda^4}$$

Die hiermit berechneten Werthe stelle ich den beobachteten gegenüber.

Combination *R*. $j = 60^0$.

Linie	α beobachtet	α berechnet	Differenz ε	*P*
B	56°,24	56°,29	— 0°,05	— 0,09
C	63,37	61,50	+ 1,87	+ 2,95
D	75,50	75,39	+ 0,11	+ 0,15
E	92,40	92,87	— 0,47	— 0,51
b	95,57	96,13	— 0,56	— 0,59
F	107,35	107,73	— 0,38	— 0,35
G	131,80	133,72	— 1,92	— 1,46
H	155,93	154,48	+ 1,45	+ 0,93

Die Erscheinung dieser 24blättrigen Combination wird, wie man sieht, durch die Boltzmann'sche Formel schon recht gut dargestellt; der procentische Fehler ist weit kleiner als in den vorigen Fällen, nämlich durchschnittlich $< 1\%$.

Ermittelt man die procentischen Fehler der nach Boltzmann (*l. c.*) berechneten Drehungen des Quarz für die obigen Fraunhofer'schen Linien (aufser für *b*), so findet man sie bezüglich,

$-0{,}64 \quad -0{,}12 \quad +0{,}14 \quad +0{,}14 \quad +0{,}21 \quad -0{,}14 \quad 0{,}0.$

Hieraus erkennt man: *Die Drehwirkung der Glimmercombination R läfst sich zwar genügend, aber doch nicht so vollkommen wie die Drehwirkung des Quarz, durch die Boltzmann'sche Formel (natürlich mit anderen Zahlwerthen der Constanten) darstellen.* Es ist zu bemerken, dafs das zweite Glied der Formel beim Quarz positiv, bei den Glimmercombinationen aber negativ ist, was nach Boltzmann auch bei einer Weinsäure der Fall.

§ 6. *Einflufs der Temperatur auf die Drehung.* Das zu dieser Untersuchung benutzte Luftbad war eine kubische Schachtel aus Eisenblech (Kante = 12 cm.) mit abnehmbarem Deckel, heizbar durch eine untergestellte, beliebig tief abwärts senkbare, Gasflamme. In 2 gegenüberliegenden Wänden befanden sich Fenster aus planparallelen Glasplatten. Damit trotz der erheblichen Verzerrungen des Blechgefäfses bei Temperatursteigerung die Stellung der Glimmercombination möglichst unverändert blieb, stand sie auf einer eisernen Leiste, die durch die beiden anderen gegenüberstehenden Wände des Luftbades frei hindurchging und aufsen auf Holzständern ruhte; letztere waren noch besonders gegen die Strahlung geschützt. Die Wandöffnungen, durch welche die Leiste hindurchging, konnten durch Blechschieber fast völlig geschlossen werden.

Sobald die Temperatur hinreichend lange (mindestens 20 Minuten lang) einen (nahe) constanten Werth behalten hatte, wurden mehrere Bestimmungen der Drehwirkung

gemacht; dann wurde durch Höherheben der Gasflamme die Temperatur weiter gesteigert und die Drehwirkung von Neuem bestimmt. Die Beobachtungen wurden an der Combination *R* beim Azimuth $j = 60^\circ$, und zwar nur für die Linie *b* gemacht, bei welcher der austretende Strahl fast gradlinig polarisirt ist. Unter *Z* in der folgenden Tabelle steht die Anzahl Minuten, während welcher die Temperatur den nebenstehenden Werth beibehalten hatte, bis zur Beobachtung der Drehung geschritten wurde; die Spalte *t* giebt die Temperatur in Celsiusgraden; Δt die Differenzen der aufeinanderfolgenden Temperaturen, bei denen beobachtet wurde; α_b den Drehungswinkel, der jedesmal aus 4 bis 10 verschiedenen Einstellungen abgeleitet ist; $\Delta \alpha_b$ die Differenzen der Drehwinkel bei 2 folgenden Temperaturen.

Combination *R*. $j = 60^\circ$.

Z	t	Δt	α_b	$\Delta \alpha_b$
30ᵐ	22°,8		95° 44′	
		31°,2		2° 57′
20	54,0		92 47	
		6,0		0 35
50	60,0		92 12	
		8,0		0 41
60	68,0		91 31	
		48,0		1 35
60	116,0		89 56	

Nach 1½ stündigem Verweilen in 116° C. zeigte die Combination Spuren beginnender Zerstörung, so dafs ich keine höheren Temperaturen anwandte. Wie man sieht, ***nimmt die Drehung mit steigender Temperatur merklich ab; diese Abnahme beträgt durchschnittlich für jeden Grad Temperatursteigerung in den Intervallen***

23° bis 54° C.	54° bis 60° C.	60° bis 68° C.	68° bis 116° C.
5′,7	5′,8	5′,1	2′,2

Eine Interpolationsformel für die Drehungsabnahme habe ich nicht aufgestellt. — Vorläufige Beobachtungen an der Combination L bei $j = 30^\circ$ hatten gezeigt, dafs für die Linie *F*, bei welcher der Strahl fast geradlinig polarisirt austritt, durch (schnelle) Temperatursteigerung von 24° auf 58° C. die Drehung um 2° 45′ abnimmt, woraus eine

Abnahme von beinahe 4',9 für jeden Grad Temperatursteigerung innerhalb dieses Intervalls folgt. Weil hier nicht Constanz der Temperatur abgewartet war, also das Präparat sicher noch eine niedrigere Temperatur besafs, als das Thermometer anzeigte, so befindet sich das Resultat in hinreichender Uebereinstimmung mit dem vorhergehenden.

§ 7. *Einflufs des Einfallswinkels auf die Drehung*. Bisher war das Strahlenbündel stets senkrecht auf die Vorderfläche der Combination gefallen. Ein paar Beobachtungen wurden nun auch angestellt, um die Aenderung der Erscheinung bei schiefem Durchgang des parallelen Strahlenbündels kennen zu lernen. Zu dem Zweck wurde die Combination *R* zunächst in das Azimuth $j = 60^0$, und der Analysator auf stärkste Verlöschung der Linie *b* gestellt. Darauf wurde die Combination um eine verticale Axe gedreht. Nach einer solchen Drehung um $9\frac{1}{2}^0$ war die Verdunkelung von *b* so gut wie unmerklich geworden. — Genauer als durch den schmalen Okularschlitz des Steinheil'schen Spektrometers liefs sich die Veränderung bei Ueberblickung des ganzen Spektrums im Browning'schen Spektroskop verfolgen. Je mehr das Präparat aus der Anfangsstellung herausgedreht wird, um so blasser wird der dunkle Streif im Grün; aber in einer mehr und mehr nach dem rothen Ende des Spektrums hin gelegenen Farbe läfst sich — bei geeigneter Analysatorstellung — ein dunkler Streif hervorrufen. Dabei ist die Polarisationsebene, entsprechend der gröfseren Wellenlänge, weniger und weniger gedreht Wenn der Einfallswinkel bis auf etwa $6\frac{1}{4}^0$ gewachsen ist, so hat der Streif ungefähr das rothe Ende erreicht; die jetzt stattfindende Drehung der Polarisationsebene des äufsersten Roth beträgt etwa 65^0, also ist sie gröfser als bei senkrechtem Einfall (56^0). Doch ist diese Zahl nicht sehr sicher. — Bei einem Einfallswinkel von $\pm 6\frac{1}{2}^0$ sieht man während der Analysatordrehung nur noch eine ganz schwache schattenhafte Trübung über das Spektrum ziehn.

In unzweideutiger Weise zeigt sich also die Drehung der Polarisationsebene nur bei senkrechtem oder nahe senkrechtem Einfall, d. h. dann, wenn der durchgehende Strahl nur einen kleinen Winkel mit der Mittellinie der optischen Axen bildet. Ebenso zeigt bekanntlich der Quarz seine charakteristischen Erscheinungen auch nur in solchen Richtungen, die wenig (oder gar nicht) von der optischen Axe abweichen.

II. Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie.

§ 8. ***Theoretische Formeln.*** Aus dem im Anfange des § 4 Bemerkten geht hervor, daſs zur mathematischen Verfolgung der Erscheinungen nichts weiter erforderlich ist, als die Berechnung der Amplituden und des Phasenunterschiedes der zwei die Triade verlassenden Strahlen, von denen der eine ||, der andere ⊥ zum Hauptschnitt des letzten Blättchens polarisirt ist.

Es bezeichne:

d die Dicke des einzelnen Blättchens;

T die Oscillationsdauer des angewandten Lichts;

λ die Wellenlänge in Luft;

o und e die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der *im* Hauptschnitt und ⊥ dazu polarisirten Wellenebenen;

j das Azimuth (∠ der Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit dem Hauptschnitt des ersten Blättchens);

A_h und A_s die Amplituden der zwei austretenden Strahlen, die bezüglich || und ⊥ zum Hauptschnitt des letzten Blättchens polarisirt sind;

$\frac{2\pi}{\lambda} D_h$ und $\frac{2\pi}{\lambda} D_s$ ihre Phasen;

$\frac{2\pi}{\lambda}(D_h - D_s) = \varDelta$ ihren Phasenunterschied;

ferner werde $\frac{\pi \cdot d}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right) = \xi$ gesetzt, aber statt $\sin \xi$ und $\cos \xi$ zur Abkürzung einfach s und c geschrieben: Dann

gelten, wie ich in den Mathematischen Annalen (loco cit.) bewiesen habe, folgende Beziehungen, die hier in einer wenig veränderten Form wiedergegeben werden:

$$\left.\begin{aligned} A_h^2 &= \cos^2(j+60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 . \sin(2j+60^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 c^2 \sin 2j \\ A_v^2 &= \sin^2(j+60^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 . \sin(2j+60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 c^2 \sin 2j \end{aligned}\right\} \text{(I)},$$

folglich; $A_h^2 + A_v^2 = 1$ . . . . (Ia),

$$\begin{aligned} A_h^2 - A_v^2 = \cos(2j+120^\circ) + \\ \sqrt{3}.\, s^2 \sin(2j+60^\circ) - \sqrt{3}.\, s^2 c^2 \sin 2j \end{aligned} \quad \text{(Ib)},$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2 s^2 . c \left\{\sqrt{3} + (1+2s^2) \operatorname{tg} 2j\right\}}{\sqrt{3}\,(1+s^2-2s^4) - (1-3s^2+4s^6) \operatorname{tg} 2j} \quad . \quad \text{(II)}.$$

Die Gll. I und II enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe; doch ist es zur Vergleichung mit den Beobachtungen nothwendig, noch den Drehungswinkel α, verstanden wie im § 5, und das Axenverhältniſs der Schwingungsellipse, zu welcher sich beide geradlinige Schwingungen im Allgemeinen zusammensetzen, zu ermitteln, denn auf diese zwei Gröſsen beziehen sich die vorliegenden Beobachtungen. Wie ich am angeführten Orte gezeigt habe, ist die Drehung α bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}.\, s^2 . \left\{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{2 s^4}{\sqrt{3}} \sin 2j . \cos(2j+120^\circ)\right\}}{1 - \frac{3}{2} s^4 - 2 s^6 . \sin 2j . \sin(2j+120^\circ)} \quad \text{(III)}.$$

Excentricität und Axenverhältniſs sind in der früheren Abhandlung nicht abgeleitet worden; sie ergeben sich so: Die beiden $\perp$ aufeinander erfolgenden Schwingungen mit den Amplituden A_h und A_v und mit der Phasendifferenz Δ setzen sich zu einer Schwingung zusammen, die auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{A_h^2} + \frac{y^2}{A_v^2} - \frac{2xy}{A_h . A_v} \cos \Delta = \sin^2 \Delta$$

vor sich geht. Bezeichnet man, wie üblich, die Coëfficienten von x^2, y^2, xy der Reihe nach mit a_{11}, a_{22}, $2\,a_{12}$, so ist der Winkel ϑ, um den man das Coordinatensystem drehen muſs, um seine Axen mit denen der Ellipse zu-

sammenfallen zu machen, bekanntlich durch die Gleichung $\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ bestimmt. In diesem neuen System lautet die Ellipsengleichung:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\sin^2 \varDelta}{M}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{\sin^2 \varDelta}{N}\right)} = 1,$$

worin $M = a_{11} \cos^2 \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta + 2 a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta$;
$N = a_{11} \sin^2 \vartheta + a_{22} \cos^2 \vartheta - 2 a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta$.

Die Quadrate der Halbaxen haben also die Werthe $\frac{\sin^2 \varDelta}{M}$ und $\frac{\sin^2 \varDelta}{N}$. Nennt man die gröfsere von beiden a, die kleinere b, so wird das Quadrat der Excentricität:

$$e^2 = a^2 - b^2 = \frac{\sin^2 \varDelta . (M-N)}{MN} = \frac{\sin^2 \varDelta . \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12}^2}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$
$$= \sqrt{(A_s^2 - A_h^2)^2 + 4 A_h^2 . A_s^2 \cos^2 \varDelta}.$$

Setzt man $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varDelta}$ statt $\cos^2 \varDelta$, und benutzt man Gl. Ia, so folgt:

$$e^2 = \sqrt{\frac{1 + (A_s^2 - A_h^2)^2 . \operatorname{tg}^2 \varDelta}{1 + \operatorname{tg}^2 \varDelta}} \quad . \quad . \quad \text{(IV)},$$

womit die Excentricität e bestimmt ist.

Nun ist aber $a^2 + b^2 = A_h^2 + A_s^2$, denn beide Ausdrücke geben, mit $\frac{2\pi^2}{T^2}$ multiplicirt, die Intensität des austretenden Lichts. Also ist: $a^2 + b^2 = 1$. Da aber $a^2 - b^2 = e^2$, so findet man das Quadrat des Axenverhältnisses

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1 - e^2}{1 + e^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}.$$

Diese von der Theorie gelieferten Gleichungen müssen nun sämmtliche Erscheinungen an Triaden bei senkrecht auffallendem Licht erklären. Zunächst soll die Lage der grofsen Axe der Schwingungsellipse, d. h. der Drehungswinkel α (Gl. III), und darauf die Gestalt der Ellipse (Gl. IV und V) untersucht werden.

§ 9. *Discussion von Gl. III. Drehungssinn. Zahlwerthe von* $\sin^2 \xi$. *Einflufs des Azimuths auf die Drehung.* Wenn die Constante $\sin^2 \xi$ einen nicht zu nahe an 1 liegenden

Werth hat, so ist nach Gl. III der Drehungswinkel α positiv, d. h. gemäfs den Festsetzungen der theoretischen Ableitung: *Die Drehung erfolgt in demselben Sinn herum, in welchem die Blättchen unter 120° aufgeschichtet sind.* Also sind rechts- und linksdrehende Triaden (und ebenso natürlich auch blättchenreichere Combinationen) zu unterscheiden, wie es die Beobachtung bestätigt.

Gl. III zeigt ferner, dafs die Drehung für verschiedene Azimuthe verschieden ist, *dafs sie aber den früheren Werth wieder erlangt, sobald j um 90° gewachsen ist. Also wiederholen sich die verschiedenen Drehungswinkel in den vier Quadranten in derselben Reihenfolge.* Zahlenmäfsige Beobachtungen an Triaden liegen hierüber nicht vor, wohl aber an der Combination *R*, (§ 3), welche mit diesem Resultat der Theorie übereinstimmen.

Zu weiteren Schlüssen ist es zunächst erforderlich, Zahlwerthe der Constanten $s^2 = \sin^2 \frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right)$ für verschiedene Triaden zu gewinnen. Dies gelingt, mit Umgehung der umständlichen Bestimmung der optischen Constanten des angewandten Glimmers, folgendermafsen: Für den Werth $j = o$ fallen aus Gl. III einige Glieder heraus, so dafs sie sich in eine nach s^2 quadratische Gleichung verwandelt. Ihre Auflösung giebt:

$$s^2 = \frac{1}{g} \cdot \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\,g \cdot \operatorname{tg} 2\,\alpha_\circ}{\sqrt{3}}} \right\} \quad . \quad . \quad (1),$$

wo zur Abkürzung $1 - \sqrt{3}\,\operatorname{tg} 2\,\alpha_\circ = g$ gesetzt ist, und wo $\alpha_\circ$ denjenigen Drehungswinkel bedeutet, den man beim Azimuth $j = o$ beobachtet. Von den beiden Wurzeln der Gleichung ist nur die eine zulässig, nämlich die dem Minuszeichen entsprechende, weil sich die andere bei meinen Triaden > 1 ergiebt, obgleich doch s ein sinus ist. — In Folge der Verschiedenheit der Drehung für verschiedene Farben findet man für s^2 bei derselben Triade von Farbe zu Farbe einen anderen Werth. Die auf diesem Wege gefundenen Werthe von s^2 für einige Spectrallinien sind

in der folgenden Tabelle für die Triaden *A*, *B*, *C* zusammengestellt:

Linie	Triade *A*.	Triade *B*.	Triade *C*.
	$\sin^2 \xi$	$\sin^2 \xi$	$\sin^2 \xi$
B	0,165	—	0,0297
C	0,185	—	—
D	0,239	0,088	0,0453
F	0,322	0,131	0,0605
G	0,361	—	0,0784

Man bemerkt, ***dafs*** $\sin^2 \xi$ ***mit abnehmender Wellenlänge stetig zunimmt***; ferner, ***dafs es mit abnehmender Blättchendicke stark abnimmt***, denn *A* besteht aus den dicksten, *C* aus den dünnsten Blättchen.

Vermittelst dieser Zahlwerthe ist es nun möglich, die Formeln und Beobachtungen genau zu vergleichen. Bei *Triade A* liegen Beobachtungen, aufser für $j = o$, noch für $j = 37{,}5^0$ vor. Berechnet man nach Gl. III die für dieses Azimuth stattfindenden Drehungen, indem man die eben ermittelten Werthe von $\sin^2 \xi$ benutzt, so stimmen die berechneten und beobachteten Werthe, wie die folgende Tabelle lehrt, sehr befriedigend überein, namentlich wenn man bedenkt, dafs den Beobachtungen an Triaden überhaupt nur eine mäfsige Schärfe beiwohnt. Zur Vergleichung sind auch noch die bei $j = o$ beobachteten Drehungen beigefügt.

	Triade *A*. $j = 37{,}5$			$j = o$
Linie	α beob.	α berechn.	Differ.	α beob.
B	7° 32′	7° 24′	+ 8′	7° 39′
C	8 11	8 11	0	8 32
D	10 8	10 4	+ 4	10 51
F	12 46	12 36	+ 10	14 28

Für *Triade B* wäre eine solche Vergleichung zwecklos, weil hier die Werthe von $\sin^2 \xi$ als sehr unzuverlässig anzusehen sind, denn, wie schon bemerkt, waren die Azimutheinstellungen hier ganz unsicher. Indessen läfst

sich doch folgendes bemerken. Setzt man in Gl. III $j = o$, so verschwindet das Azimuthalglied sowohl im Zähler als im Nenner; setzt man aber $j = 120^0$, so verschwindet es nur im Nenner, während das des Zählers negativ wird. Also mufs die Drehung bei $j = 120^0$ geringer sein als bei $j = o$; und dieses Zurückbleiben mufs um so erheblicher seyn, je gröſser s^2, d. h. je kleiner die Wellenlänge. Hiermit stimmen die Beobachtungen an Triade *B* völlig überein.

Berechnet man endlich bei der dünnsten *Triade C* den Drehungswinkel für andere Azimuthe, so findet man so kleine Differenzen, dafs sie noch gänzlich innerhalb der Beobachtungsfehler liegen; z. B. ist die für $j = 45^0$ berechnete Drehung für Linie *F* 2° 54',2, die beobachtete ist 2° 53', dagegen die bei $j = o$ beobachtete ist 2° 55'. Diese Werthe müssen bei der geringen Schärfe dieser Beobachtungen als gleich angesehen werden. — Bei gröſseren Wellenlängen hat nun $\sin^2\xi$ noch kleinere Werthe als bei *F*; somit mufs der Einfluſs der von j abhängenden Glieder, die ja s^4 und s^6 als Faktoren enthalten, noch unmerklicher seyn. Diesen Schlufs bestätigen die Beobachtungun durchaus, denn die für die Azimuthe 0°, — 7°,5, + 45° beobachteten Drehungen derselben Farbe (pag. 36) unterscheiden sich immer nur um wenige Minuten.

Die Gl. III und die Beobachtungen lehren also übereinstimmend, ***dafs die Drehung zwar vom Azimuth beeinflufst wird, dafs dieser Einflufs aber abnimmt mit abnehmendem Werth von $\sin^2\xi$.*** Diese Gröſse wiederum nimmt, bei demselben Präparat, ab mit zunehmender Wellenlänge; bei verschiedenen Präparaten aus derselben Substanz aber nimmt sie ab zugleich mit der Blättchendicke. Denkt man die Blättchen so dünn, ***dafs $\sin^4\xi$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist (nach Gl. III) der Einflufs des Azimuths auf die Drehung verschwunden. In diesem Falle mufs die durch Aufeinanderschichtung von n congruenten Triaden bewirkte Drehung n mal so grofs seyn als die der einzelnen Triade, also proportional der Triadenzahl und folglich auch der Dicke der ganzen Combination.***

So lange $\sin^2\xi$ aber noch nicht so klein ist, mufs auch bei der mehrblättrigen Combination die Drehung vom Azimuth abhängen. Dies ist in der That bei den Combinationen *R* und *L* von mir beobachtet. (pag. 33 und 34.)

Schliefslich folgt noch aus Gl. III, dafs mit abnehmender Blättchendicke die Drehung abnimmt, denn der Werth von $\operatorname{tg} 2\alpha$ enthält $\sin^2\xi$ als Faktor. Auch dieses theoretische Resultat wird von den Beobachtungen bestätigt (pag. 35 und 36).

Aus der Abnahme der Drehung mit der Temperatur folgt endlich, dafs die Gröfse $\sin^2\xi$ bei steigender Temperatur abnimmt.

§ 10. *Fortsetzung der Discussion von Gl. III. Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge.* Die strenge Darstellung dieser Abhängigkeit ist mit Gl. III gegeben; indessen ist in § 5 gezeigt, dafs die Beobachtungen befriedigend durch eine zweigliedrige Interpolationsformel dargestellt werden. Hierüber giebt die Theorie ebenfalls Rechenschaft. Weil bei allen meinen Combinationen s^2 nur ein kleiner Bruch ist (zwischen 0,03 und 0,36), so begeht man nur einen kleinen Fehler, wenn man die Glieder mit s^4 und s^6 gegen 1 vernachlässigt. Merklicher mufs der Fehler werden, wenn man auch s^2 gegen 1 fortläfst. Dadurch verwandelt sich Gl. III in $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \sin^2\xi$. Dafs indessen diese Formel die Drehung immer noch leidlich darstellt, lehrt folgende Gegenüberstellung der bei Triade *C* für $j = o$ beobachteten und der nach ihr berechneten Werthe:

Linie	beobachtet	berechnet	Differenz
B	1° 27′	1° 28′	1′
G	3° 45′	3° 52′	7′

Die Unterschiede liegen noch innerhalb der Beobachtungsfehler. Endlich sollen noch, sowohl für *sin* als für *tg*, die Bogen gesetzt werden, was um so zulässiger, je dünner die Blättchen, also je kleiner $\sin^2\xi$. Dann wird $\alpha = c. \xi^2$,

wo c eine Constante. Multiplicirt man noch den Zähler und Nenner von ξ mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft, V, und setzt n_o und n_e für $\frac{V}{o}$ und $\frac{V}{e}$, so wird:

$$\alpha = \frac{c \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot (n_o - n_e)^2}{\lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Sieht man nun, in einer ersten Näherung, von der Farbenzerstreuung bei der Brechung ab, d. h. betrachtet man n_o und n_e als unabhängig von der Wellenlänge, so wird der ganze Zähler constant (k), und man hat:

$$\alpha = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Hiermit wäre das Biot'sche Gesetz für die Drehung der Polarisationsebene abgeleitet.

Will man bei dieser Näherung nicht stehen bleiben, so muſs man $n_o - n_e$ als Funktion von λ darzustellen wissen; darüber ist nun nichts genaues bekannt, doch ist zu vermuthen, daſs eine zweigliederige Interpolationsformel genügen wird. In der That läſst sich zeigen, daſs z. B. für Quarz in der Richtung senkrecht zur Axe $n_o - n_e$ mit Benutzung der von Mascart ermittelten Werthe, hinreichend genau durch eine Formel von der Gestalt $a + \frac{b}{\lambda^2}$ darstellbar ist (Vergleiche meine Abhandlung in den Mathematischen Annalen, p. 525), wo das Glied a weit überwiegt, und $\frac{b}{\lambda^2}$ nur die Rolle eines Correktionsgliedes spielt.

Mit Benutzung einer ebensolchen Formel für Glimmer erhält man hier:

$$\alpha = \frac{c\pi^2 d^2}{\lambda^2} \cdot \left(a + \frac{b}{\lambda^2}\right)^2 = \frac{p}{\lambda^2} + \frac{q}{\lambda^4} + \frac{r}{\lambda^6};$$

hier sind p, q, r Constante, und zwar ist r klein gegen q, q klein gegen p. Mit Vernachlässigung des letzten Gliedes hat man also die Näherungsformel:

$$\alpha = \frac{p}{\lambda^2} + \frac{q}{\lambda^4}.$$

Dies ist aber genau die Boltzmann'sche Formel, deren Brauchbarkeit zur Darstellung der von Glimmer-

combinationen bewirkten Drehung vorher experimentell bestätigt war, und welche nunmehr, zunächst für eine Triade, eine theoretische Grundlage erhalten hat.

§ 11. ***Diskussion der Gll. IV, V. Einflufs des Azimuths auf die Gestalt der Schwingungsellipse. Wann ist der austretende Strahl geradlinig polarisirt?*** Die Excentricität — und folglich das Axenverhältnifs — hat den Formeln zufolge bei verschiedenen Azimuthen verschiedene Werthe; jedoch erlangen beide die früheren Werthe wieder, sobald das Azimuth um 90° gewachsen ist, denn den Ausdrücken tg Δ und $(A_s^2 - A_h^2)^2$, aus welchen e^2 gebildet ist, kommt diese Eigenschaft zu. ***Also nimmt die Schwingungsellipse in den vier Quadranten nacheinander dieselben Gestalten in derselben Reihenfolge wieder an, wobei sie (wie im § 9 gezeigt) auch immer dieselbe Lage wiederbekommt.*** Genau dieses Verhalten lehren die Beobachtungen (§ 3).

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung, ***bei welchem Azimuth der austretende Strahl geradlinig polarisirt***, also $\frac{b}{a} = 0$ ist. Hierzu ist erforderlich, dafs $e^2 = 1$; und dies kann auf zwei Arten erfüllt werden: 1) dadurch, dafs $(A_s^2 - A_h^2)^2 = 1$; 2) dadurch, dafs tg $\Delta = 0$.

Aus der ersteren Bedingung folgt wegen Gl. Ia, dafs entweder $A_s^2 = 0$ oder $A_h^2 = 0$ seyn müfste. Hieraus folgt mit Benutzung der Werthe aus Gl. I, dafs

$$\varrho \,.\, \cos 2j + \sigma \,.\, \sin 2j = \pm 1$$

seyn müfste, wo zur Abkürzung $\frac{1}{2}(1 - 3\,s^2) = \varrho$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\, c^2 \,.\, (1 + 2\,s^2) = \sigma$ gesetzt ist.

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt;

$$\sin 2j = \frac{1}{\varrho^2 + \sigma^2} \,.\, \left\{ \pm \sigma + \varrho \,.\, \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2 - 1} \right\} \quad (3),$$

wo die $\sqrt{}$ noch positiv oder negativ seyn kann. Nun ist aber, wie man leicht sieht, $\varrho^2 + \sigma^2 = 1 - 3\,c^2\,s^6$, folglich ist der durch Gl. 3 bestimmte Werth von $\sin 2j$ stets

imaginär[1]). *Es giebt also kein Azimuth, für welches die geradlinige Polarisation des austretenden Strahls dadurch zu Stande käme, dafs eine der beiden, || und ⊥ zum Hauptschnitt des letzten Blättchens polarisirten Componenten den Werth* 0 *hätte.*

Also müssen alle Azimuthe, bei denen ein geradlinig polarisirter Strahl die Triade verläfst, aus der anderen Bedingung folgen:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}(D_{,,} - D_{,}) = 0,$$

welche aussagt, dafs der Wegunterschied der 2 austretenden Componenten ein ganzes Vielfaches einer halben Wellenlänge (oder 0) beträgt. Weil $\sin \xi$ bei allen meinen Triaden von 0 (und auch von 1) verschieden ist, so kann $\operatorname{tg} \Delta$ nur dadurch verschwinden, dafs der letzte Faktor des Zählers in (Gl. II) verschwindet, d. h. dafs:

$$\operatorname{tg} 2j = -\frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sin^2 \xi} \text{ ist.} \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Ein diese Gl. erfüllendes Azimuth werde mit j' bezeichnet. Die Gleichung lehrt, dafs bei ein und derselben Triade die geradlinige Polarisation für verschiedene Farben bei verschiedenem Azimuth eintritt; und weil $\sin^2 \xi$ mit abnehmender Wellenlänge stetig wächst, so ist $\operatorname{tg}(-2j')$ und somit auch $-2j'$, am gröfsten für Roth, und nimmt stetig ab bis Violett. Also ist das fragliche Azimuth j' selbst am kleinsten für Roth und wächst stetig bis Violett. Wenn man also ein solches Azimuth gefunden hat, für welches ein bestimmtes Roth geradlinig polarisirt austritt, so dafs es bei passender Analysatorstellung ganz verlöscht wird, und wenn man nun das Azimuth vergröfsert, so gelingt es nicht mehr so gut, jenes Roth zu verlöschen, wohl aber — bei passender Analysatorstellung — eine weiter nach Gelb zu gelegene Farbe, u. s. f. *Es kann also*

1) Hiernach ist die betreffende Erörterung in meiner Abhandlung in den Mathematischen Annalen zu berichtigen, wo $\sin 2j$ reell erscheint, weil aus den Werthen von ϱ und σ der Nenner 2 irrthümlicher Weise weggeblieben ist.

der durch passende Analysatorstellung hervorgerufene schwarze Streif bei dauernder Vergröfserung des Azimuths erst immer weiter nach dem violetten Ende des Spektrums hin auftauchen. Genau dieses Verhalten zeigte die Glimmerkombination R, und (wenn auch weniger deutlich) die Triaden (§ 3). Weil tg $2j'$ seinen Werth nicht ändert, wenn j' um 90° gewachsen ist, so folgt: *Es giebt bei einer Triade für jede Farbe* 4, *und nur* 4, *um* 90° *verschiedene Azimuthe des eintretenden Strahls, bei denen der austretende Strahl vollkommen polarisirt ist*; *diese Azimuthe sind um so gröfser, je kleiner die Wellenlänge der Farbe.*

Setzt man die auf pag. 46 für Triade A ermittelten Werthe von $\sin^2 \xi$ für die Farben B, D, G in Gl. 4 ein, so findet man als Azimuth j' für geradlinige Polarisation bezüglich folgende:

$$j'_B = 63^\circ\ 46';\ j'_D = 65^\circ\ 14':\ j'_G = 67^\circ\ 25'.$$

Wegen der geringen Vollkommenheit von Triade A kann man keine genau zahlenmäfsige Uebereinstimmung erwarten. Höchstens wird man, auf Grund dieser Zahlen in der Nähe des Azimuths 65° scharfe Streifen im Spectrum erwarten dürfen; und dies ist (§ 3) in der That der Fall, freilich findet sich bei $j = 65^\circ$ der scharfe Streif nicht gerade bei D, sondern weiter nach Violett hin. — Für Triade C findet man als die entsprechenden Azimuthe:

$$j'_B = 60^\circ\ 44';\ j'_D = 61^\circ\ 6';\ j'_G = 61^\circ\ 52'.$$

Nun aber ist Triade C so dünnblätterig, dafs sie (analog einer sehr dünnen Quarzplatte) gar nicht einen schmalen Streifen zeigt, sondern einen Streifen von der Breite des ganzen Spektrums. Also mufs man es für eine hinreichende Uebereinstimmung erkennen, dafs bei $j = 60^\circ$ das Maximum der Verdunkelung beobachtet wurde, und dafs sie bei $j = 65^\circ$ fast noch ebenso intensiv war.

Es giebt noch ein bemerkenswerthes Azimuth, bei welchem das austretende Licht zwar nicht völlig, aber doch nahezu geradlinig polarisirt ist, indem nämlich tg Δ sehr klein, also e^2 nahe $= 1$, also das Axenverhältnifs $\frac{b}{a}$ sehr

klein wird. Man findet es so: $\operatorname{tg} \Delta$ enthält den Faktor s^3, ist also im Allgemeinen klein, wenn s klein ist. Für ein gewisses Azimuth wird es sogar von der 5. Ordnung nach s; denn wenn man Gl. II folgendermafsen schreibt:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2 s^3 c . (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2j)}{N} + \frac{4 s^5 c . \operatorname{tg} 2j}{N},$$

wo der Nenner zur Abkürzung durch N bezeichnet ist, so sieht man, dafs das erste Glied fortfällt, wenn

$$\operatorname{tg} 2j = -\sqrt{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

d. h., wenn $j = -120^0$, -30^0, 60^0 oder 150^0 ist. Für diese Azimuthe wird:

$$\operatorname{tg} \Delta = -\frac{2 s^5 . c}{1 - s^2 - s^4 + 2 s^6},$$

welches sehr klein ist, wenn die Blättchen sehr dünn sind, so dafs s hinreichend klein ist. Z. B. für $s^2 = \frac{1}{4}$, wie es bei Triade A etwa einer mittleren Farbe entspricht, wird $\operatorname{tg} \Delta = -0{,}0753$, und das Axenverhältnifs $\frac{b}{a}$ wird $= 0{,}023$. Aber für $s^2 = 0{,}05$, wie es bei der dünnsten Triade C einer mittleren Farbe entspricht, wird $\operatorname{tg} \Delta = -0{,}00115$ und $\frac{b}{a} = 0{,}00017$.

Mit diesen sehr geringen Werthen des Axenverhältnisses stimmen die Beobachtungen an Triade A und C (und ebenso bei der Combination R) (§ 3) vorzüglich überein. Denn es erleidet nicht nur eine Farbe, sondern alle nacheinander, bei den Azimuthen -30^0, 60^0 u. ff. eine äufserst starke und ziemlich gleichmäfsige Verdunkelung, wenn man den Analysator dreht. Es ist besonders charakteristisch, dafs die Verdunkelung hier *alle* Farben so stark ergreift, sobald nur s überhaupt keinen grofsen Werth hat. — Je kleiner s ist, um so mehr fällt das durch Gl. 4 bestimmte Azimuth für vollkommen geradlinige Polarisation mit dem eben durch Gl. 5 bestimmten zusammen.

§ 12. *Fortgesetzte Diskussion der Gll. IV, V. Wann nähert sich die Schwingungsellipse am meisten einem Kreise?*

Damit die Ellipse ein Kreis werde, mufs $e^2 = 0$ sein, d. h. wegen IV, es mufs

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 \varDelta} + \frac{(A_s^2 - A_h^2)^2}{1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 \varDelta}} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur dadurch erfüllbar, dafs gleichzeitig $\mathrm{tg}\, \varDelta = \infty$ und $A_s^2 - A_h^2 = 0$. Die erste Bedingung sagt aus, dafs die Wegdifferenz der zwei austretenden Componenten $= \frac{\lambda}{4}$ seyn mufs. Beiläufig sey bemerkt, dafs dann

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1-(A_s^2 - A_h^2)}{1 + A_s^2 - A_h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

d. h. wegen Gleichung Ia, $= \frac{A_h^2}{A_s^2}$ wird. Also fallen, bei gegenseitiger Verzögerung der zwei austretenden Theilstrahlen um $\frac{\lambda}{4}$, ihre Schwingungsrichtungen mit den Axen der resultirenden Ellipse zusammen.

Zur Erfüllung der Forderung $\mathrm{tg}\, \varDelta = \infty$ mufs in Gl. II der Nenner verschwinden, woraus folgt:

$$\mathrm{tg}\, 2j = \frac{\sqrt{3}\,.\,(1 + s^2 - 2 s^4)}{1 - 3 s^2 + 4 s^6} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Zur Erfüllung der zweiten Forderung $A_s^2 - A_h^2 = 0$ mufs zufolge Gl. Ib:

$$\mathrm{tg}\, 2j = - \frac{1 - 3 s^2}{\sqrt{3}\,.\,c^2 (1 + 2 s^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Beide Werthe von $\mathrm{tg}\, 2j$ können nur dann zusammen bestehen, wenn

$$s^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}7937 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Also kann überhaupt nur aus einer solchen Triade, deren Constante s^2 für irgend eine Farbe diesen Werth hat, ein Cirkularstrahl austreten. Er tritt aber nur dann aus, wenn das Azimuth den aus Gleichung 7 oder 8 folgenden Werth hat.

Meine Triaden und Combinationen können nie einen Circularstrahl liefern, weil $\sin^2 \xi$ bei ihnen viel zu kleine Werthe hat. Bei der dickblättrigsten Triade A z. B. ist s^2 für eine mittlere Farbe $= \frac{1}{4}$. Hier liefert Gl. (7) $j = 40^0\ 26{,}'5$ als dasjenige Azimuth, bei welchem $\operatorname{tg} \Delta = \infty$ wird. Gleichzeitig wird aber $A_s^2 - A_p^2$ nicht $= 0$; vielmehr findet man jetzt als Werth des Axenverhältnisses der Schwingungsellipse nach Gl. 6 und I 0,096 oder etwa 1:10,4. Ein solcher Strahl ist also noch weit von der Cirkularität entfernt, aber natürlich läfst er sich bei keiner Analysatorstellung völlig auslöschen (§ 3). — Für Triade C hat s^2 für eine mittlere Farbe den Werth 0,05; hier wird bei $j = 32^0\ 25'$ $\operatorname{tg} \Delta = \infty$; und das Axenverhältnifs wird gleichzeitig etwa $= 0{,}0095$. Daraus erklärt sich, dafs man auch bei diesem ungünstigen Azimuth doch eine sehr erhebliche Verdunkelung beobachtet (§ 3).

Die eben für die Triaden A und C ermittelten Werthe des Axenverhältnisses, welche bei den Azimuthen eintreten, die $\operatorname{tg} \Delta = \infty$ machen, brauchen nicht die gröfsten aller vorkommenden zu sein. Die allgemeine Beantwortung der Frage, für welches Azimuth das Axenverhältnifs dem Werthe 1 am nächsten kommt, führt vielmehr auf eine cubische Gleichung, welche sich ergiebt, wenn man das Minimum von e^2 aufsucht. Aber diese Untersuchung ist sehr weitläufig. Es stellt sich heraus, dafs eine zunächst auftretende complicirte Gleichung vierten Grades sich in Folge eigenthümlicher, zwischen den Constanten bestehender Beziehungen auf eine Gleichung dritten Grades reducirt. Indessen soll hierauf nicht näher eingegangen werden, weil an den Triaden A und C das Azimuth für die stärkste Helligkeit nur sehr unsicher ermittelt wurde (§ 3), indem es sich viel weniger entschieden feststellen liefs als dasjenige der gröfsten Dunkelheit. In Folge dessen würde die Vergleichung des aus der cubischen Gleichung folgenden Azimuths mit den Beobachtungen nur sehr geringen Werth haben.

Dagegen soll näher auf das bei verschiedenen Azimuthen stattfindende *Axenverhältnifs* eingegangen werden, *für eine Triade, bei der die Gröfse s^2 für alle Farben so klein ist, dafs ihre dritte Potenz gegen* 1 *vernachlässigt werden kann.* Nach Gl. V kommt es nur darauf an, die Excentricität e zu ermitteln. Sie folgt aus Gl. IV, welche sich auf die Gestalt bringen läfst:

$$e^2 = \sqrt{1 - \frac{(1-u^2) . \operatorname{tg}^2 \Delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}}.$$

wo zur Abkürzung $A_s^2 - A_a^2 = u$ gesetzt ist. Nun enthält $\operatorname{tg}^2 \Delta$ nach Gl. II im Zähler den Faktor s^6, welcher nach der Annahme schon verschwindend klein ist, während der Nenner *im Allgemeinen* durchaus endliche Werthe hat. Weil nun gleichzeitig $1 - u^2$ stets ein echter Bruch ist, so ist die Gröfse $\frac{(1-u^2) \operatorname{tg}^2 \Delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}$ im Allgemeinen von der dritten Ordnung nach s^2, also gegen 1 zu vernachlässigen. Sonach ist die Excentricität hier im Allgemeinen nicht merklich von 1 verschieden, so dafs merklich nur ein geradlinig polarisirter Strahl austritt. — Diese Schlufsweise verliert aber ihre Geltung, wenn der Nenner von $\operatorname{tg} \Delta$ selbst sehr klein, also $\operatorname{tg} \Delta$ sehr grofs wird. Dafs das vorige Resultat trotzdem bestehen bleibt, lehrt folgende Betrachtung.[1]

Man findet auf dem gewöhnlichen Wege, dafs der Maximalwerth von $u = \sqrt{1 - 3 s^6 c^2}$ ist, und dafs er bei jenem Azimuth eintritt, welches durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2 j = \frac{\sqrt{3} . (1 + s^2 - 2 s^4)}{1 - 3 s^2} \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

bestimmt ist. Die Vergleichung dieser Gleichung mit Gl. 7, aus welcher das für $\operatorname{tg} \Delta = \infty$ erforderliche Azimuth folgt, lehrt, dafs bei letzterer nur noch das Glied $4 s^6$ im Nenner hinzutritt. Wenn also, wie hier angenommen, s^6 bereits gegen 1 verschwindet, so sind beide Gleichungen nicht merklich verschieden. Somit folgt, dafs *bei kleinen Werthen von s^2 dasselbe Azimuth den Intensi-*

1) Dieser Fall ist in meiner früheren mathem. Abh. unerledigt geblieben.

tätsunterschied beider austretenden Strahlen so grofs als möglich, und ihren Phasenunterschied $= \frac{\lambda}{4}$ *macht.* Weil s^6 bereits gegen 1 verschwindet, so ist der fragliche Maximalwerth des Intensitätsunterschiedes nahezu $= 1$, d. h. der eine Theilstrahl hat nahezu die Intensität 1, der andere die Intensität 0. Dadurch wird natürlich bewirkt, dafs der austretende Gesammtstrahl so gut wie vollkommen geradlinig polarisirt ist. In der That wird jetzt e^2, welches $= \sqrt{\frac{1 + u^2 \operatorname{tg}^2 \Delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}}$ ist (Gl. IV), nicht merklich von 1 verschieden, indem u äufserst nahe $= 1$ wird. — Dies gilt für das eine kritische Azimuth, welches $\operatorname{tg} \Delta = \infty$ macht. Aber es ist selbstverständlich, dafs sich gleichzeitig u^2 seinen Maximalwerth 1, und $\operatorname{tg} \Delta$ dem Werthe ∞ annähert, wenn j jenem kritischen Werthe naherückt, so dafs also immer der Quotient unter der $\sqrt{\ }$ in Gl. IV nicht merklich von 1 abweicht.

Resultat: *Wenn die Gröfse* s^2 *so klein ist, dafs ihre dritte Potenz gegen* 1 *vernachlässigt werden kann, so setzen sich beide aus der Triade austretenden Strahlen bei jedem Azimuth zu einem merklich nur noch geradlinig polarisirten Strahle zusammen. Durch Aufeinanderschichtung von beliebig vielen solchen Triaden entsteht also ein Präparat, welches einen fast vollkommen geradlinig polarisirten Strahl austreten läfst, dessen Polarisationsebene gegen die des einfallenden Strahls gedreht ist.*

§ 13. *Die Umlaufsbewegung auf der Ellipse.* Die Beobachtungen hatten ergeben (§ 4), dafs bei 2 um 90° verschiedenen Azimuthen der austretende elliptische Strahl zwar übrigens völlig derselbe ist, dafs aber die Ellipse in beiden Fällen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird. Auch dies mufs aus der Theorie folgen. Aus den Formeln ist schon abgeleitet, dafs bei 2 um 90° verschiedenen Azimuthen die Schwingungsellipse nach Gestalt und Lage dieselbe ist. Man bemerke, dafs nach Gl. I A_k^2 und A_s^2 in diesem Falle ihre Werthe austauschen, dafs

aber tg Δ (Gl. II) für beide Fälle *denselben* Werth behält. (Hiemit steht es nicht im Widerspruch, dafs tg Δ für 4 um 90° verschiedene Azimuthe durch 0 geht, wie bewiesen, (§ 11); denn für 4 zwischenliegende Azimuthe geht es noch durch ∞, so dafs es, wenn j von 0° bis 360° wächst, 8mal sein Vorzeichen ändert.)

Um nun über den Umlaufssinn etwas aussagen zu können mufs man erst gewisse Festsetzungen machen. Gegeben seien 2 aufeinander senkrechte, im Raume feste Ebenen E_1 und E_2, $\parallel$ zu welchen 2 der Länge nach zusammenfallende Strahlen ihre Schwingungen ausführen mögen; die erstere liege z. B. vertikal, die andere horizontal. Es wird nun willkürlich festgesetzt: Der Ausspruch, „dafs der $\parallel E_1$ schwingende Strahl dem $\parallel E_2$ schwingenden um δ voraus sei", soll folgenden Sinn haben: Der erstere treibt ein von einem feststehenden Beobachter in's Auge gefafstes Theilchen um eine gewisse Zeit früher durch die Gleichgewichtslage nach oben, als es der zweite durch die Gleichgewichtslage nach rechts treibt.

Nun mag zunächst der mit dem Index h bezeichnete Strahl $\parallel E_1$, der Strahl $s \parallel E_2$ schwingen, und es möge h dem s um δ voraus sein, so heifst dies: Das betrachtete Theilchen empfängt den Antrieb durch die Gleichgewichtslage nach oben früher als den durch die Gleichgewichtslage nach rechts. — Ein anderes Mal aber schwinge der Strahl $s \parallel E_1$, der Strahl $h \parallel E_2$, und wieder sei h dem s um δ voraus, so heifst dies: das Theilchen empfängt den Antrieb nach rechts früher als den nach oben, *also gerade umgekehrt wie vorher!*

Dieser zweite Fall, verglichen mit dem ersten, entspricht aber genau der um 90° veränderten Azimutheinstellung der Triade, bei welcher ja die Strahlen h und s ihre Schwingungsebenen und Intensitäten austauschen, und ihre Phasendifferenz behalten, so dafs absolut im Raume in denselben Ebenen sich dieselben Intensitäten wiederfinden. *Die Umlaufsbewegung ist also jetzt umgekehrt wie vorher.*

Zu demselben Ergebnifs kommt man auch so: Gegeben seien 2 Triaden in völlig gleichen Stellungen, gebildet aus gleich dicken Blättchen, jedoch nicht aus derselben Substanz. Die 2 Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der einen seien o und e, in der anderen o', e'. Dann werden die von beiden dargebotenen Erscheinungen durch dieselben Formeln dargestellt, in denen nur einmal o und e, das andere Mal o' und e' stehen. Jetzt seien die beiden Substanzen so beschaffen, dafs $o' = e$, $e' = o$. Dann werden für beide Triaden die Gll. I, III, IV, V identisch, weil darin nur gerade Potenzen von $\sin \frac{d\pi}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right)$ vorkommen. Hingegen bekommt $\operatorname{tg} \Delta$ (Gl. II) für beide Triaden absolut genommen gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werthe, weil hier $\sin^3 \xi$ vorkommt. Die aus beiden Triaden austretenden Strahlenpaare sind also übereinstimmend an Schwingungsebenen und Intensitäten, haben aber entgegengesetzte Phasendifferenz, so dafs sie sich zu entgegengesetzt schwingenden elliptischen Strahlen zusammensetzen. Zwei solche Triaden, wie die hier gedachten, sind aber nichts Anderes als *eine* Triade in 2 um 90° verschiedenen Azimuthen. Also findet auch hier beide Male die entgegengesetzte Umlaufsbewegung statt.

III. Resultate. Drehvermögen von Krystallen.

§ 14. Von den im Vorigen auf experimentellem und theoretischem Wege übereinstimmend gewonnenen Resultaten sollen diejenigen hier nochmals zusammengestellt werden, welche einen Schlufs auf das Drehvermögen von Krystallen zu ziehen gestatten.

1. Je dünner die Blättchen einer Glimmertriade, um so mehr *gestreckt* elliptisch schwingt der austretende Strahl bei allen Azimuthen. Schon wenn die Blättchendicke eine solche ist, dafs die dritte Potenz der Gröfse $s^2 = \sin^2 \frac{d\pi}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right)$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist der austretende Strahl nicht mehr merklich von einem geradlinig polarisirten verschieden. Ebenso

tritt aus einer mehrblätterigen Glimmercombination, wie sie durch parallele Aufschichtung von irgend wie viel Triaden von so geringer Blättchendicke entsteht, ein merklich nur geradlinig polarisirter Strahl aus. (§ 3 und § 12.)

2. Je dünner die Blättchen einer Triade, um so weniger ist die Drehung der Polarisationsebene (verstanden wie in § 5) vom Azimuth abhängig. Sind die Blättchen so dünn, daſs das Quadrat der Gröſse s^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist die Drehung unabhängig vom Azimuth. In diesem Fall ist die durch parallele Aufschichtung von n kongruenten Triaden bewirkte Drehung n mal so groſs als die der einzelnen Triade, also proportional mit der Triadenzahl, also auch proportional mit der Dicke des Präparats. Für eine sehr dünnblätterige Triade ist die Drehung sehr klein; aber durch hinreichend vervielfältigte Aufschichtung von Triaden kann natürlich eine beliebig groſse Drehung hervorgerufen werden. (§ 5 und § 9.)

3. Die Drehung in Combinationen von 3 oder mehr Blättern ist abhängig von der Wellenlänge. Diese Abhängigkeit läſst sich mit groſser Annäherung durch die von Boltzmann verbesserte Biot'sche Formel darstellen, und zwar um so treffender, je dünner die Blättchen. (§ 5 und § 10.)

4. Je mehr die Richtung der Strahlen von der Normalen auf dem Blättchen abweicht, um so mehr verliert sich die Erscheinung der Drehung. (§ 7.)

Aus diesen Thatsachen folgt, *daſs man bei fortgesetzter Verminderung der Blättchendicke zu Combinationen gelangen muſs, deren Drehwirkung mit derjenigen des Quarzes und anderer drehender Krystalle qualitativ völlig übereinstimmt.*

Hienach kann man folgenden Satz als einen wenigstens wahrscheinlichen aufstellen:

„Drehende Krystalle haben eine Structur analog der Glimmercombination.“

Zu demselben Schluſs bin ich nun schon früher auf einem völlig anderen Wege, ganz unabhängig von den Be-

trachtungen über Glimmercombinationen, gekommen. — Indem ich die Hypothese zu Grunde legte, „die kongruenten Grundgebilde, aus denen ein Krystall aufgebaut ist, seien so angeordnet, daſs ihre Schwerpunkte ein endliches Stück eines *unbegrenzten regelmäſsigen Punktsystems* bilden", hatte ich alle für die Krystalle möglichen Structurformen ermittelt und sie mit den wirklich beobachteten übereinstimmend gefunden. Nun giebt es unter diesen nicht wenige mit einer schraubenförmigen Anordnung der Punkte, und zwar existiren immer zwei symmetrische Formen, von denen der einen ein rechter, der anderen ein linker Windungssinn zukommt. Sogleich bei der Auffindung dieser Schraubensysteme schloſs ich, daſs sie den Schlüssel zur Erklärung des optischen Drehvermögens liefern müſsten. — Legt man durch einen Punkt eines solchen Systems senkrecht zur Schraubenaxe eine Ebene, so ist sie in ihrer unendlichen Ausdehnung mit unendlich vielen Punkten besetzt; sie heiſse eine *Molekularebene*. In den einfachsten Fällen besteht dann das ganze schraubenförmige Punktsystem aus lauter äquidistanten, zur Schraubenaxe senkrechten, kongruent besetzten Molekularebenen, deren jede folgende gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (120° oder 60° oder 90°) in demselben Sinne gedreht ist. Solche Systeme bieten also eine überraschende Analogie zu den Glimmercombinationen dar. Es giebt aber Systeme, bei denen die Analogie noch gröſser ist. Nämlich in komplicirteren Fällen treten an die Stelle jeder solchen Molekularebene deren *zwei*, kongruent und parallel besetzt, jedoch so, daſs im Allgemeinen die Punkte der einen nicht vertikal über denen der anderen liegen. Dann ist jedes solche Ebenen*paar* gegen das vorhergehende um stets *denselben* Winkel gedreht. Im Ergänzungsband VII von diesen Annalen stellt beispielsweise Fig. 16 auf Tafel IV einen Theil der Projektion des „dreizähligen Doppelschraubensystems" auf eine Molekularebene vor (Vrgl. d. Beschreibg. am a. O. pag. 364). Dort bedeuten die Endpunkte der nach *einer* Richtung verlaufenden kurzen

Seiten der Sechsecke die Projectionen der Punkte eines solchen Ebenenpaares, die Endpunkte der nach einer anderen und einer dritten Richtung verlaufenden kurzen Seiten bedeuten die Projectionen der Punkte des nächsten und des drittfolgenden Ebenenpaares, welche gegen das erste um 120° und nochmals 120° um eine zur Zeichnungsebene senkrechte, durch den Mittelpunkt eines Sechsecks gelegte Axe gedreht sind. Jedes Sechseck ist also die Projection der Punkte einer dreizähligen, mit Punktpaaren besetzten unendlichen Schraube. Weil jedes einzelne Ebenenpaar den geometrischen Charakter des monoklinen Krystallsystems besitzt, so ist es völlig geeignet, die Stelle des einzelnen optisch 2axigen Blättchens der Glimmercombination zu vertreten. Indeſs soll nicht behauptet werden, daſs gerade dieses Punktsystem es ist, welches der Structur des Quarzes zu Grunde liegt.

Es ist wichtig hervorzuheben, daſs nur in zweien von den acht Abtheilungen, in welche sich alle Punktsysteme einordnen lassen, keine schraubenförmigen vorkommen, nämlich in jenen, welche dem triklinen und monoklinen Krystallsystem entsprechen. *Im regulären System* fehlen sie nicht; dies ist wichtig für das Verständniſs des Drehvermögens regulärer Krystalle (wie z. B. des chlorsauren Natrons).

Wie man sieht, führt der hier kurz angedeutete, ganz abstrakt geometrische Weg zu derselben Vermuthung über die Ursache des Drehvermögens, zu welcher das auf den Glimmercombinationen fuſsende Inductionsverfahren geführt hat. — Daſs in der That die Ursache der Drehung in der Structur gesucht werden muſs, darauf weist das Auftreten der charakteristischen Krystallflächen (Trapezflächen beim Quarz), welche schon äuſserlich erkennen lassen, ob ein vorliegendes Exemplar rechts oder links dreht, mit Nothwendigkeit hin. Nichtsdestoweniger war es bisher noch nicht gelungen, das Drehvermögen mit der Structur in einen ursächlichen Zusammenhang zu bringen.

Den Schluſs, daſs die Drehwirkung des Quarzes von einer wendeltreppenförmigen Blättchenaufschichtung her-

rühre, hat, wie ich kürzlich ersah, schon vor mir Prof. Josiah P. Cooke Jr. gezogen[1]), aber lediglich durch das Auftreten einer Drehwirkung bei Glimmercombinationen überhaupt veranlafst, ohne die vollständige Uebereinstimmung dieser Drehung bei abnehmender Blättchendicke mit der Drehung im Quarz zu kennen, welche durch meine Untersuchung zu Tage tritt. Cooke sagt etwa so: (pag. 62): „Diese Thatsachen (Drehwirkungen der Glimmercombination) stützen sehr bestimmt die Theorie, dafs die optischen Erscheinungen des Quarzes erzeugt werden durch eine Molekularstructur ähnlich jener, durch welche wir identische Erscheinungen in unseren künstlichen Glimmeraufschichtungen erhalten haben u. s. w."

Noch ist zweier Einwürfe zu gedenken. Meine Beobachtungen zeigen, dafs die Drehung der Combination bei steigender Temperatur abnimmt, während die des Quarzes zunimmt, wie ich mich überzeugte und wie auch v. Lang ausführlicher nachgewiesen hat. Aus dieser Verschiedenheit kann man indessen keinen Einwurf gegen obige Theorie des Drehvermögens hernehmen; denn aus der beim Glimmerpräparat beobachteten Abnahme der Drehung folgt nur, dafs hier die Gröfse $\sin^2 \xi$ mit steigender Temperatur abnimmt; bei den hypothetischen Blättchen des Quarzes kann aber die entsprechende Gröfse sehr wohl mit steigender Temperatur zunehmen, wie ja auch der optische Axenwinkel bei einigen Substanzen gröfser, bei anderen kleiner wird, mit steigender Temperatur.

Schwerer wiegt ein anderer Einwurf. Bekanntlich hat Fresnel die Drehung des Quarzes darauf zurückgeführt, dafs ein || der Axe in den Quarz tretender Strahl sich in einen rechts- und einen links circularen Strahl zerlege, welche mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten. Und es ist ihm sogar gelungen, durch eine eigene Combinirung von Prismen aus rechts- und linksdrehendem Quarz ein Präparat herzustellen, welches einen rechts- und

1) Cooke: „The Vermiculites" in Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Decemb. 1873. (Aber erst 1874 gedruckt.)

einen linkscircularen Strahl austreten läfst, während ein geradlinig polarisirter eingefallen ist. — Demgegenüber ist hervorzuheben, dafs thatsächlich im Inneren an einer bestimmten Stelle immer nur eine geradlinige Schwingung stattfindet, die aber an jeder folgenden Stelle nach einer etwas anderen Richtung erfolgt, so dafs dadurch eben die Drehung der Polarisationsebene zum Vorschein kommt. Dieses thatsächliche Verhalten folgt aus meiner Entwicklung genau ebenso gut wie aus Fresnel's Vorstellung von den zwei entgegengesetzten Circularstrahlen. Allerdings bleibt aber für meine Theorie noch die Aufgabe zu lösen, wie es kommt, dafs bei jenem Fresnel'schen Versuch zwei entgegengesetzt circulare Strahlen austreten; eine Aufgabe, bei deren Lösung vielleicht die von mir beobachtete entgegengesetzte Durchlaufung der Ellipse bei zwei um 90° verschiedenen Azimuthen eine Rolle spielen kann (§ 4). Solange die Theorie nur für den senkrechten Durchgang von Strahlen entwickelt vorliegt, ist indefs an eine Lösung dieser Aufgabe kaum zu denken.

Es scheint mir nothwendig, den bisher von mir eingeschlagenen theoretischen Weg, der von den Glimmerblättchen ausging, zu verlassen, und direct die Lichtbewegung im Inneren eines Körpers zu untersuchen, dessen Massentheile eine schraubenförmige Anordnung besitzen nach einer der Arten, wie sie meine Theorie der Krystallstructur aufweist. Aus einer solchen Theorie wird sich dann vermuthlich die Erscheinung des erwähnten Fresnel'schen Versuchs einfach ableiten lassen.

Carlsruhe, im Juli 1876.

III. *Ueber die Bestimmung der Constanten für die Absorption des Lichtes im metallischen Silber; von Dr. W. Wernicke.*

(Aus d. Monatsbericht d. Akad., Febr. 1876, vom Hrn. Verf. mitgetheilt.)

Die Aufgabe der Bestimmung der Absorptionsconstanten eines metallisch undurchsichtigen Körpers zerfällt in drei Theile, nämlich 1) in die Herstellung homogener planparalleler Schichten des zu untersuchenden Körpers; 2) in die Messung des absorbirten Lichtes; 3) in die Bestimmung der Dicke der dünnen Schichten.

I.

Herstellung der Silberschichten.

Bereits in einem früheren Aufsatze[1]) habe ich mitgetheilt, dafs die Dicke einer zur Messung der Absorption brauchbaren dünnen Schicht nicht unter einer gewissen Grenze liegen darf; diese Grenze ist dadurch bestimmt, dafs eine weitere Vergröfserung der Dicke keine Veränderung in der Intensität oder Phasenänderung des reflectirten Lichtes mehr hervorbringen darf. Dieser Umstand ist für die Wahl des photometrischen Apparates maafsgebend, von welchen derjenige der beste ist, welcher möglichst wenig Licht fortnimmt. Das Spectrometer mit Doppelspalt entspricht bis jetzt allein jener Anforderung. Dieser Apparat aber giebt nur dann gute Resultate, wenn die zu vergleichenden Spectralfelder scharf aneinander grenzen. Um den durch Reflexion enstehenden Lichtverlust zu eliminiren und den durch die Absorption bewirkten allein zu erhalten, wende ich zwei Schichten von verschiedener Dicke an, welche gleiche Lichtmengen reflectiren. Die scharfe Trennungslinie erreiche ich dadurch, dafs ich die beiden Schichten selbst scharf aneinander stofsen lasse.

1) Diese Berichte, 19. Nov. 1874. S. 728. (Ann. 155, S. 87).

Dies habe ich beim Silber durch zwei ganz verschiedene Methoden bewirkt.

Nach dem einen Verfahren wird ein frisch hergestellter Glassilberspiegel durch eine Glasplatte mit geradliniger scharfer Kante zur Hälfte bedeckt und die unbedeckte Hälfte durch Hinzufügen neuer Versilberungsflüssigkeit verstärkt Diese Methode erfordert eine genaue Kenntnifs der Eigenschaften alkalischer Silberlösungen, deren Beschreibung hier zu weit vom Thema abführen würde; die andere Methode verlangt jene Kenntnifs nicht und kann mit jeder guten Silberschicht ausgeführt werden.

Den trockenen, polirten Spiegel bedecke ich zur Hälfte durch eine ebene Glasplatte mit geradliniger Begrenzung und bringe dann die unbedeckte Silberfläche mit Joddämpfen in passender Weise in Berührung. In einigen Minuten ist eine scharf begrenzte dünne Jodsilberschicht auf der Hälfte des Silberspiegels gebildet. Ihre Stärke wird nach der Farbe des reflectirten Lichtes beurtheilt; dieselbe kann zwischen Goldgelb und Stahlblau erster Ordnung variiren; dünnere Jodsilberschichten zu erzeugen als solche, die Goldgelb erster Ordnung, und dickere als solche, die Stahlblau zeigen, ist nicht zweckmäfsig. — Nach der Jodirung bleibt die Platte 12 bis 24 Stunden im Dunkeln liegen und wird dann in eine concentrirte Lösung von Rhodankalium oder statt dessen auch in eine Lösung von unterschwefligsaurem Natron (1) in Wasser (5) getaucht; eine jeder dieser Flüssigkeiten löst die dünne Jodsilberschicht fast momentan auf. Der mit Wasser gut gespülte und getrocknete Silberspiegel läfst, bei reflectirtem Lichte betrachtet, in der Regel durch Nichts erkennen, dafs er aus zwei verschieden dicken Schichten besteht. Zuweilen aber, namentlich wenn die Jodirung bei hoher Lufttemperatur vorgenommen und das Licht nicht hinreichend ausgeschlossen war' oder die zur Auflösung des Jodsilbers benutzten Salze bereits starke Zersetzung erlitten hatten, ist die dünnere Schicht durch einen schwach bräunlichen Ton von der stärkeren zu unterscheiden. Der-

selbe verschwindet jedoch durch Poliren der ganzen Platte mit weichem Leder und einer Spur von geschlämmtem Eisenoxyd vollständig.

Die nach der einen oder der andern Methode dargestellten Schichtenpaare sind durch eine sharfe Linie getrennt, welche nur im durchgehenden Lichte erkennbar ist.

II.

Messung des absorbirten Lichtes.

Eine im Vorigen beschriebene, mit zwei verschieden starken, sonst aber völlig identischen Silberschichten bedeckte Spiegelglasplatte wird nun, normal zur Collimatoraxe, so vor den Doppelspalt des Spectrometers gestellt, daſs die Trennungslinie der Schichten mit der Trennungslinie der beiden Spaltöffnungen zusammenfällt, und dann das Beobachtungsfernrohr auf den Doppelspalt eingestellt. Letzteres trägt im Ocular den bereits früher beschriebenen schmalen Ocularspalt, welcher nur das zu messende hinreichend homogene, Licht ins Auge gelangen läſst.

Die Breite derjenigen Hälfte des Doppelspaltes, welche von der dickeren Silberschicht bedeckt wird, werde zur Einheit genommen, die Breite der andern sey b, nachdem beide Lichtintensitäten gleichgemacht sind. Die Zahl b wird unmittelbar an der Trommel der Mikrometerschraube des Spaltes abgelesen, die zugehörige Wellenlänge bestimmt sich durch die Ablesung am getheilten Kreise des Spectrometers.

Ist nun k die durch eine Schicht metallischen Silbers von der Dicke Eins durchgehende Lichtmenge, die eintretende zur Einheit genommen, und d die Dickendifferenz der beiden Silberschichten, so hat man

$$b = k^d, \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

also

$$\log k = \frac{\log b}{d} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Nach den Bezeichnungen der Theorie aber ist die Intensität des durch eine Schicht von der Dicke Eins durchgehenden Lichtes

$$k = e^{-2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} g} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

worin λ die Wellenlänge des betrachteten Lichtes in Luft bedeutet. Aus den Gleichungen (1), (2), (3) erhält man $\log b$ den Brigg'schen Logarithmus, unter $\mathfrak{M}$ den Modul $\log e = 0,4329$ verstanden,

$$g = -\frac{\lambda}{4\pi\mathfrak{M}}\cdot\frac{\log b}{d}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Gröfse g ist, weil $\log b$ negativ, stets positiv; sie wird von den Nachfolgern Cauchy's, namentlich von Beer und Eisenlohr, welche sie für verschiedene Metalle und für die verschiedenen Farben des sichtbaren Spectrums aus den Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion berechnet haben, Extinctionscoëfficient genannt. Nach Bunsen aber wenden die Physiker das Wort Extinctionscoëfficient für die Gröfse $-\log k = -\frac{\log b}{d}$ an, welche namentlich dadurch wesentlich von g verschieden ist, dafs sie die Wellenlänge λ nicht enthält. Aus diesen Gründen einerseits, und andererseits, weil die Gröfse g stets mit dem Brechungsindex auf einer Linie steht und mit diesem die optischen Eigenschaften eines Körpers bedingt, nenne ich sie Extinctionsindex. Die Bestimmung dieser Absorptionsconstante erfordert also zufolge der Gleichungen (2) oder (4) aufser der Messung der Lichtintensität b noch die Kenntnifs der Dickendifferenz d der beiden Schichten.

III.

Bestimmung der Dicke der Schichten.

Die Dickendifferenz d darf in jedem Falle höchstens den vierten Theil der Dicke der dünneren Schicht (oder noch nicht den zehnten Theil einer Lichtwellenlänge in Luft) betragen; ist sie gröfser, so erhält man für die an verschiedenen Schichtenpaaren bestimmten Absorptionsconstanten abweichende Werthe. Dieser Umstand, verbunden, mit der Schwierigkeit, grofse Gasflächen mit einer an allen Punkten gleich starken Silberschicht zu belegen,

läſst die Bestimmung der Gröſse d durch direkte Wägungen unzweckmäſsig erscheinen. Man ist daher genöthigt, das Silber der dünnen Schichten in eine durchsichtige Verbindung dieses Metalls zu verwandeln und dann die Dicke der gebildeten durchsichtigen Schichten auf optischem Wege zu bestimmen. Die hierzu geeignete Verbindung des Silbers ist das Jodsilber; die Jodsilberschichten werden einfach dadurch hergestellt, daſs man die Silberschichten den absteigenden Dämpfen des Jods bei gewöhnlicher Temperatur aussetzt. Zur Bestimmung der Dicke der Jodsilberschicht hat Quincke ein Verfahren benutzt, welches in der Vergleichung der Newton'schen Farben der Jodsilberschicht mit den entsprechenden Farben einer dünnen Luftschicht beruht; dies Verfahren enthält nur in sofern eine Ungenauigkeit, als die beträchtliche Dispersion des Jodsilbers vernachlässigt wird, und ist nur für sehr dünne Schichten brauchbar; für stärkere mehrere Wellenlängen dicke Schichten, welche mit wachsender Dicke die Newton'sche Farbe wenig ändern, hört die Anwendbarkeit auf.

Die Methode, welche ich im Folgenden mittheile, ist von jenem Fehler frei und auch für die stärksten Schichten anwendbar.

Die durch Jodirung eines Glas-Silberspiegels erhaltene Jodsilberschicht setze ich normal zur Collimatoraxe vor den Spalt eines Spectrometers. Durch eine Seitenöffnung des Collimatorrohrs fällt Sonnen- oder Petroleum-Licht auf eine im Innern des Rohrs angebrachte und gegen die Axe um 45° geneigte Glasplatte, welche es durch den Spalt auf die Jodsilberschicht wirft. Das an beiden Grenzflächen derselben normal reflectirte Lichtbündel gelangt durch den Spalt in das Spectroskop zurück und wird durch das Prisma zu einem Spectrum ausgebreitet. In diesem Spectrum sind diejenigen Farben geschwächt oder ausgelöscht, deren Wellenlänge ein genauer Theil der Dicke der Jodsilberschicht ist; das Spectrum ist in Folge davon mit dunklen Streifen durchzogen.

Ist D die Dicke der Schicht, l die Wellenlänee eines Streifens für Licht im Jodsilber, m irgend eine ganze positive Zahl, so ist genau

$$D = \frac{1}{2} m l,$$

weil eine merkliche Phasenänderung bei der normalen Reflexion am Jodsilber, wie ich an anderer Stelle[1]) gezeigt habe, nicht stattfindet. Erscheint nun im Spectrum eine Anzahl Streifen, deren Wellenlängen in Luft λ_1, λ_2, λ_3 ... sind, und bedeuten n_1, n_2, n_3, ... die entsprechenden Brechungsindices des Jodsilbers, so bestimmt sich die Dicke D der Schicht genau durch eine jede der Gleichungen:

$$D = \frac{m\lambda_1}{2n_1} = \frac{(m+1)\lambda_2}{2n_2} = \frac{(m+2)\lambda_3}{2n_3} = \quad . \quad (5).$$

Die Ordnungszahl m ist durch die Lage und Anzahl der Streifen, wie ich alsbald ausführlich zeigen werde, gegeben; die λ werden durch die Ablesungen am Kreise des Spectrometers bestimmt. Die einzigen noch unbekannten Gröfsen sind die Brechungsindices n des Jodsilbers. Aus den Gleichungen (5) folgt

$$n_2 = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} n_1 \;;\; n_3 = \frac{m+2}{m} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1} n_1 \;; \quad . \quad (6),$$

d. h. kennt man den Brechungsindex n_1 für eine einzige Wellenlänge, so können alle übrigen durch Messungen der Lage der Interferenzstreifen im Spectrum bestimmt werden.

Ich habe nun für eine grofse Anzahl Jodsilberschichten von allmälig wachsender Dicke die Wellenlängen der Streifen festgestellt, und gebe die Resultate dieser Messungen, ohne irgend eine Correction, in den folgenden vier Tabellen. In denselben bedeuten die Zahlen 2, 3, ... über jeder Columne die Ordnungszahlen m, $m+1$, ...; jede Horizontalreihe giebt die in Milliontel-Millimetern ausgdrückten Wellenlängen λ der Interferenzminima an, welche eine Jodsilberschicht von bestimmter Dicke zeigt. Dünnere Schichten als solche, für welche m den Werth 2 hat, dienten zur Bestimmung der Ordnungszahlen, sind aber in den Tabellen nicht ausgeführt.

1) Diese Berichte, 4. Nov. 1875, S. 673.

Tabelle I.

2	3
527	432
531	432
537	432
548	433
564	435
572	440
575	441
576	440
578	441
581	441
581	443
589	445
591	445
591	446
597	451
598	447
601	447
612	454
616	457
617	458
621	461
629	462
631	463
638	465
641	472

Tabelle II.

2	3	4
685	496	432
690	497	432
693	504	437
698	507	437
706	521	438
	521	440
	523	440
	524	441
	531	443
	537	445
	538	446
	540	447
	545	449
	551	452
	565	453
	566	458
	568	460
	572	460
	574	462
	577	465
	581	466
	583	470
	586	470
	586	471

Tabelle III.

3	4	5
589	473	432
594	482	432
596	482	432
601	478	433
602	484	432
603	486	433
605	484	433
609	486	433
610	485	433
618	491	438
619	490	438
621	494	437
623	493	439
624	492	438
629	498	439
632	496	440
636	504	443
639	503	444
641	500	443
654	508	444
662	514	450
665	516	451
665	516	452
700	522	455

Tabelle IV.

4	5	6	7
550	468	433	
557	469	433	
557	470	433	
565	476	436	
579	486	440	
581	486	441	
581	488	443	
591	494	445	
593	496	448	
598	497	448	
599	500	449	
603	501	450	
617	512	455	
629	517	457	432
629	516	458	432
632	519	458	432
632	519	459	433
635	524	461	436
638	525	463	436
642	528	462	437
644	529	465	436
645	529	466	437
646	532	466	438
649	537	470	438

Die Tabellen 1 bis 4 haben einen doppelten Zweck; einmal dienen sie zur Bestimmung der Ordnungszahlen der Interferenzminima irgend einer gegebenen Jodsilberschicht, deren Dicke sieben halbe Wellenlängen des Lichts im Jodsilber (ungefähr drei halbe Wellenlängen in Luft) nicht erheblich übersteigt; zweitens dienen sie zur Ermittelung der Brechungsindices des Jodsilbers für die verschiedenen Wellenlängen.

Für Natriumlicht habe ich früher[1]) den Brechungsindex durch das Minimum der Ablenkung bei kleinen Prismen aus geschmolzenem Jodsilber zu 2,18 bestimmt. Directe Wägungen homogener Schichten auf dünnem Glase führten zu einer mit jener hinreichend übereinstimmenden Zahl.

1) Pogg. Ann. Bd. 142, S. 560.

Aus den Zahlen der Tabellen 1 bis 4 berechnen sich nun mit Hülfe der Gleichungen (6) durch ein einfaches Ausgleichungs- und Interpolations-Verfahren die folgenden, in Tabelle 5 dargestellten, Werthe für die Brechungsindices der Jodsilberschichten.

Die mit λ überschriebenen Zahlen geben die Wellenlängen in Luft, ausgedrückt in Milliontel-Millimetern, die mit n überschriebenen die zugehörigen Brechungsindices an.

Tabelle V.

λ	n	λ	n	λ	n
655	2,147	540	2,219	457	2,376
650	2,150	535	2,223	456	2,381
645	2,152	530	2,228	455	2,386
640	2,154	525	2,233	454	2,392
635	2,157	520	2,239	453	2,397
630	2,159	515	2,245	452	2,404
625	2,161	510	2,253	451	2,410
620	2,163	505	2,261	450	2,416
615	2,165	500	2,269	449	2,423
610	2,167	495	2,278	448	2,429
605	2,170	490	2,286	447	2,436
600	2,174	485	2,295	446	2,444
595	2,177	480	2,304	445	2,452
590	2,180	475	2,315	444	2,460
585	2,183	470	2,328	443	2,469
580	2,187	465	2,345	442	2,479
575	2,191	464	2,349	441	2,489
570	2,194	463	2,352	440	2,499
565	2,197	462	2,356	439	2,511
560	2,202	461	2,359	438	2,526
555	2,206	460	2,363	437	2,544
550	2,211	459	2,367	436	2,565
545	2,215	458	2,372	435	2,585
				432	2,647

Um die Dicke einer gegebenen Jodschicht zu bestimmen, hat man nur nöthig, die Lage eines Interferenzstreifens im Spectrum zu messen. Wer dergleichen Messungen anstellt, mufs ein für alle Mal die zu den Winkelablesungen des Spectrometers gehörigen Wellenlängen wenigstens von 2 zu 2 Minuten feststellen. Aus den Tabellen 1 bis 4 entnimmt man dann die Ordnungszahl

m des Streifens, und aus Tabelle 5 den zu λ gehörigen Brechungsindex n des Jodsilbers; die Gleichung (5) giebt die Dicke der Schicht

$$D = \frac{m\lambda}{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Es ist klar, dafs die Methode die Dicke der Jodsilberschicht auf so viel verschiedene Weisen zu messen erlaubt, als Streifen im Interferenzspectrum der Schicht vorhanden sind. Die verschiedenen Messungen dienen einander zur Controle.

Das specifische Gewicht des Jodsilbers nehme ich, meinen Versuchen zufolge, zu 5,712 an; das des Silbers ist 10,50. Da 108 Gramm Silber stets 235 Gramm Jodsilber bilden, so ist die Dicke d' einer Silberschicht, aus welcher eine Jodsilberschicht von der Dicke D entsteht, bestimmt durch die Gleichung

$$d' = \frac{108 \,.\, 5{,}712}{235 \,.\, 10{,}50} D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Bedeutet d die Dickendifferenz zweier Silberschichten, welche nach der Umwandlung des Silbers in Jodsilber zwei Jodsilberschichten von der Dicke D_1 und D_2 liefern, so hat man wegen der Beziehung (7)

$$D_1 = \frac{m}{2} \cdot \frac{\lambda_1}{n_1} \quad , \quad D_2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{\lambda_2}{n_2} \, ;$$

beachten wir ferner, dafs der Zahlencoëfficient in (8) erst in der 6ten Decimalstelle vom Werthe $\frac{1}{4}$ abweicht, so erhalten wir für die Dickendifferenz d zweier zur Bestimmung der Absorption anwendbarer *Silberschichten* den einfachen Ausdruck

$$d = \tfrac{1}{8} m \left(\frac{\lambda_1}{n_1} - \frac{\lambda_2}{n_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Hierin bedeuted λ_1 die Wellenlänge (in Luft) eines Interferenzminimums von der Ordnung m für die dickere, λ_2 dieselbe Gröfse für die dünnere Jodsilberschicht; n_1 und n_2 sind die zu λ_1 und λ_2 gehörigen Brechungsindices des Jodsilbers. Nur λ_1 und λ_2 sind durch die Messung am Spectrometer zu bestimmen; m, n_1, n_2 sind den Tabellen 1 bis 3 und 5 zu entnehmen.

Die Gleichungen (4) und (9) liefern, in Verbindung mit den Tabellen 1 bis 5, alle Elemente, welche zur vollständigen Bestimmung der Absorptionsconstanten nothwendig sind.

IV.

Numerische Werthe der Absorptionsconstanten.

Die letzten drei Horizontalreihen der Tabelle 6 enthalten für fünf Paare von Silberschichten, welche durch die römischen Zahlen I, II, ... bezeichnet sind, die Zahlenwerthe der Dicken d_1 und d_2 jeder einzelnen Schicht und der Dickendifferenzen $d_1 - d_2 = d$; die ersten vier Reihen geben die Werthe der Gröfsen, welche zufolge der Formel (9) zur Berechnung von d erforderlich sind. Alle Zahlen der Tabelle 6, mit Ausnahme der abstracten m, n_1, n_2, haben die Benennung Milliontel-Millimeter.

Tabelle VI.

	I.	II.	III.	IV.	V.
m	3.	3.	3.	3.	4.
λ_1	607	525	565	520	485
λ_2	578	460	496	475	465
n_1	2,168	2,233	2,197	2,239	2,295
n_2	2,187	2,363	2,276	2,315	2,345
d_1	105,2	88,1	96,4	87,1	105,7
d_2	99,2	73,0	81,7	77,0	98,9
d	6,0	15,1	14,7	10,1	6,8

Wie man sieht, variirt für die verschiedenen Schichtenpaare I...V die Dickendifferenz d zwischen ungefähr $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{16}$ der Dicke d_2 der dünneren Schicht.

Die folgenden fünf Tabellen geben die Absorptionsconstanten für die verschiedenen Farben des Spectrums an. In der ersten Columne stehen die Fraunhofer'schen Linien, in deren Umgebung die Lichtintensitäten bestimmt wurden; in der zweiten die mit Spectrometer und Doppelspalt gemessenen Lichtintensitäten b; in der dritten die Bunsen'schen Extinctionscoëfficienten $- \log k$. Die letzte Columne enthält die Extinctionsindices g.

Tabelle VII.

1.

Fraunhofer's Linie	b	$-\log k$	g
C	0,674	28560	3,44
D	0,673	28450	3,08
E	0,673	28450	2,77
F	0,675	28660	2,54
G	0,674	28560	2,26
$\frac{1}{2}(G-H)$	0,675	28660	2,16

Tabelle VIII.

2.

Fraunhofer's Linie	b	$-\log k$	g
C	0,328	32100	3,86
D	0,320	32800	3,54
E	0,318	32900	3,18
F	0,318	32900	2,94
G	0,330	31800	2,52
$\frac{1}{2}(G-H)$	0,331	31750	2,41

Tabelle IX.

3.

Fraunhofer's Linie	b	$-\log k$	g
C	0,342	31700	3,82
D	0,338	32000	3,47
E	0,336	32200	3,12
F	0,335	32300	2,88
G	0,330	32700	2,59
$\frac{1}{2}(G-H)$	0,330	32700	2,49

Tabelle X.

4.

Fraunhofer's Linie	b	$-\log k$	g
C	0,537	27600	3,32
D	0,530	28100	3,05
E	0,525	28500	2,77
F	0,527	28300	2,53
G	0,520	28900	2,29
$\frac{1}{2}(G-H)$	0,518	29100	2,21

Tabelle XI.

5.

Fraunhofer's Linie	b	$-\log k$	g
C	0,643	28200	3,40
D	0,632	29300	3,17
E	0,626	29800	2,89
F	0,625	30000	2,67
G	0,624	30100	2,38
$\frac{1}{2}(G-H)$	0,625	30000	2,28

Die Extinctionscoëfficienten in der dritten, mit $-\log k$ überschriebenen, Columne liefern ein anschauliches Bild von der Stärke der Absorption des Lichtes im Silber. Ihre reciproken Werthe nämlich geben die Länge des Weges in *Millimetern* an, welchen das Licht im Silber durchlaufen mufs, um auf $\frac{1}{10}$ seiner anfänglichen Intensität geschwächt zu werden. Nehmen wir eine Lichtwelle von mittlerer Schwingungsdauer in Luft zu 0,000550 Millim. an, so sehen wir, dafs das Licht $\frac{9}{10}$ seiner anfänglichen Intensität verliert, während es im Silber den kleinen Weg von $\frac{1}{18}$ einer solchen Wellenlänge zurücklegt.

Die Werthe der Extinctionscoëfficienten ($-\log k$) zeigen ferner, dafs die Absorption für die verschiedenen Farben nahezu gleich grofs ist. Dafs das Silber im durchgehenden Lichte blau erscheint, rührt also hauptsächlich

daher, dafs die rothen und gelben Strahlen stärker reflectirt werden.

Die Resultate der einzelnen Versuchsreihen I bis V zeigen unter einander Abweichungen, welche, namentlich in Bezug auf die Werthe der Absorptionscoëfficienten für die verschiedenen Farben, die Beobachtungsfehler ein wenig übersteigen. Ob die Ursache dieser kleinen Unterschiede aber in einer geringen Ungleichartigkeit des Silbers der verschiedenen Schichtenpaare, oder vielmehr des von der Oberfläche *reflectirten* Lichtes liege, ist mit Sicherheit nicht leicht zu entscheiden; denn eine Differenz von $\frac{1}{100}$ in den Intensitäten des von zwei, im Innern vollkommen identischen, Schichten reflectirten Lichtes kann — wegen des starken Reflexionsvermögens des Silbers — einen wohl zu beobachtenden Unterschied in den Intensitäten des durchgehenden bewirken. Für die endgültige Entscheidung ist die Beantwortung der Frage von Bedeutung, ob der Zustand des Metalls in verschiedenen, auf chemischem Wege erzeugten, Schichten überall als derselbe und auch als identisch mit dem Zustande betrachtet werden müsse, welchen das durch den metallurgischen Procefs dargestellte, gewalzte und polirte Silber hat; oder aber, ob wirkliche moleculare Verschiedenheiten — Modificationen — vorhanden seyen, wie solche die nichtmetallischen Elemente Selen, Phosphor, Kohle u. s. w. darbieten. Meine zahlreichen Erfahrungen sprechen nicht für das Vorhandenseyn von verschiedenen Modificationen des Metalls bei Silberschichten, welche auf chemischem Wege erzeugt sind; ich will die Gründe für diese Ansicht in den folgenden, durch 1, 2, 3 bezeichneten Sätzen kurz darlegen.

1. Hat die Metallschicht keine oder geringe Cohäsion, so darf man aus der Verschiedenheit der Farben, welche zwei solcher Schichten im durchgehenden Lichte zeigen, noch nicht auf eine moleculare Verschiedenheit schliefsen. Es ist vielmehr weit wahrscheinlicher, dafs die Verschiedenheit der Farbe — und der damit zusammenhängenden Reflexionsconstanten — eine Folge der Beugung ist,

welche die Strahlen im Innern der Schicht durch die kleinen Zwischenräume erfahren, welche die Silbertheilchen trennen und den Mangel an Cohäsion bewirken. Solche Silberspiegel haben meist geringe Adhäsion am Glase, so daſs sie sich mit einem trockenen Tuche abwischen lassen; in den selteneren Fällen aber, in denen sie fest am Glase haften, kann man mit dem Mikroskop die Ungleichartigkeiten im Innern erkennen. Sie sind für optische Untersuchungen unbrauchbar.

2. Aber auch selbst dann, wenn das Silber, mit Messer und Hobel geprüft, als cohärent sich erweist, haben dünne Schichten zuweilen verschiedene Durchlaſsfarben. Man erhält solche Schichten stets, wenn man zur Glasversilberung eine ammoniakalische Silberlösung, ohne Gehalt an Natron, Kali oder Kalk, anwendet. Der Spiegel zeigt alsdann immer auch im reflectirten Lichte einen Farbenton, welcher von dem des polirten Silbers wesentlich verschieden ist. Dieser Farbenton wird hervorgebracht durch sehr feine Silberkörnchen, welche fest an der Oberfläche der cohärenten Silberschicht haften und durch Poliren mit Leder sich nicht entfernen lassen. Führt man aber ein mit wenig Salpetersäure schwach befeuchtetes Tuch schnell über die Oberfläche, so lösen sich die zerstreuten Silbertheilchen schneller als das darunter befindliche cohärente Silber, und man hat, ehe die Schicht durch die Säure gelöst ist, hinreichend Zeit zu beobachten, wie mit der Farbe des reflectirten Lichtes gleichzeitig die Anomalie in der Farbe des durchgehenden verschwindet: die Oberfläche wird silberweiſs, das durchgehende Licht erscheint blau. Ich glaube hieraus schlieſsen zu dürfen, daſs die Verschiedenartigkeit der Durchlaſsfarbe durch eine Beugungserscheinung an der Oberfläche, und nicht durch eine verschiedene Beschaffenheit des Molecularzustandes bewirkt wird. Für Untersuchungen, bei denen das an der Grenze von Luft und Silber reflectirte Licht ins Spiel kommt, also namentlich für die Bestimmung der Absorption, sind solche Schichten nicht zu verwenden.

3. Auch die starken Silberschichten, welche man durch Reduction *alkalischer* Silberlösungen erzeugt, spiegeln von Natur unvollkommen; ihre Oberfläche ist ebenfalls mit sehr feinem Silberpulver bedeckt, welches zuweilen die Durchlaſsfarbe merklich ändert. Der Unterschied von den unter 2. beschriebenen aber liegt darin, daſs hier die feinen Silbertheilchen durch Poliren des Spiegels mit Leder sich entfernen lassen. Die Wirkung dieses Polirens besteht einzig und allein darin, daſs das feine, der Oberfläche schwach anhaftende Silberpulver abgenommen und hierdurch eine Beugungserscheinung beseitigt wird, deren Einfluſs sich gar nicht bestimmen läſst. Daſs der schwache Druck des weichen, mit einer Spur von Silberpulver bestäubten, Gemsenleders die Dichtigkeit oder sonst eine physikalische Constante der festen, elastischen Metallschicht verändern solle, halte ich für durchaus unwahrscheinlich, um nicht zu sagen unmöglich. Die Anwendung nicht polirter Silberschichten schlieſst immer eine unberechenbare Fehlerquelle ein; ich habe daher sämmtliche, für die Untersuchung der Absorption benutzte Silberschichten polirt und zwar so, daſs bei verschiedenen Stücken durch kein Mittel ein Unterschied in der Beschaffenheit und Stärke des reflectirten Lichtes entdeckt werden konnte. Die so behandelten Silberspiegel zeigten auch in Bezug auf die Werthe der Haupteinfallswinkel und Hauptazimuthe kaum merkliche Unterschiede, sowohl untereinander als auch von gewalzten und polirten Silberplatten.

Die Extinctionsindices g sind von Beer[1]) und Eisenlohr[2]) nach Cauchy's bekannten Formeln der Metallreflexion unter Zugrundelegung von Jamin's Messungen des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuths berechnet worden. Beide Physiker geben, obwohl nach verschiedenen Rechnungsweisen verfahrend, fast übereinstimmend die Werthe:

1) Pogg. Ann. Bd. 92 S. 402—419.
2) Pogg. Ann. Bd. 104 S. 368 etc.

	C	D	E	. F	Blau	$G—H$
g	3,45	2,86	2,65	2,31	2,13	2,01

Die Zahlenwerthe für die Haupteinfallswinkel und Hauptazimuthe ergaben sich nicht wesentlich von den Jamin'schen verschieden, so daſs die eben aufgeführten Werthe von g als berechnete Werthe auch für meine Silberschichten gelten können. Vergleichen wir diese berechneten Werthe von g aber mit den beobachteten in den letzten Columnen der Tabellen 7 bis 11 dargestellten, so erkennen wir eine solche Uebereinstimmung, daſs wir in Versuchung geführt werden könnten, in den Beobachtungen der Absorptionsconstanten eine Stütze der Cauchy'schen Formeln zu finden. In zwei früheren Abhandlungen[1]) habe ich jedoch gezeigt, daſs jene Formeln den Beobachtungen über die Brechungsindices ebenso sehr auf's schärfste widersprechen, wie den Messungen der absoluten Phasenänderungen, deren Werthe ich aus so einfachen Versuchen ermittelte, daſs ein Irrthum dabei nicht möglich war. — Worin der Grund der auffallenden Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den aus Cauchy's Formeln berechneten Extinctionsindices liegt, möchte ich noch nicht mit Bestimmtheit angeben; ich habe aber gefunden, daſs die der Theorie zu Grunde liegenden Hypothesen in mehr als *einem* Punkte unzulässig erscheinen, und glaube, daſs die den beiden Hauptfehlerquellen entspringenden Fehler sich gegenseitig aufheben.

Vor einigen Jahren hat Hr. Strutt in Cambridge in einer sehr beachtenswerthen Abhandlung[2]) theoretisch nachzuweisen gesucht, daſs die Berechnung der Brechungs- und Extinctionsindices aus dem Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth, wie sie Cauchy, Eisenlohr und Beer ausgeführt haben, unstatthaft sey. Demzufolge empfiehlt Hr. Strutt, welcher die Resultate der Theorie, abgesehen

1) Diese Berichte, 19. Nov. 1874 S. 728 und 4. Nov. 1875 S. 873.

2) Philos. Mag., May 1872, p. 321—338.

von jener Constantenbestimmung, für richtig hält, aus den Messungen der Intensität des normal vom Metall reflectirten Lichtes die Brechungs- und Extinctionsindices mittelst der Cauchy'schen Formeln zu bestimmen. Er selbst berechnet auf diese Weise für die Gröfse g bei Silber den angenäherten Werth 40. Wie unsere Tabellen zeigen, ist derselbe um mehr als das Zehnfache zu grofs. Jener berechnete Werth fällt freilich etwas kleiner aus, wenn man die vom Silber normal reflectirte Lichtmenge etwas geringer annimmt; immerhin aber übertrifft der berechnete Werth von g den beobachteten so sehr, dafs die Unzulässigkeit der Theorie hier wieder auf's schärfste hervortritt.

IV. *Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes; von E. Lommel.*

(Mitgetheilt vom Hrn. Verf. aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen.)

I.

Unter der Bezeichnung „Interferenz des gebeugten Lichts", welche weiter unten ihre Rechtfertigung finden soll, fassen wir eine Reihe von Erscheinungen zusammen, von denen die bisher bekannten als *„Farben dicker Platten"* oder als *„Interferenzen diffusen Lichts"* beschrieben worden sind.

Der Entdecker der „Farben dicker Platten" ist Newton, welcher sie unter folgenden Umständen beobachtete [1]). Im dunkeln Zimmer falle durch eine kleine inmitten eines weifsen Papierschirms angebrachte Oeffnung ein dünnes Bündel Sonnenstrahlen auf einen Hohlspiegel von belegtem Glase; die kleine Oeffnung befindet sich im Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Wenn die Axe des Spiegels mit der Richtung des Strahlenbündels zusammenfällt, und somit

1) Newton, Optics, II. Buch, IV. Theil. 1704.

das regelmäßsig zurückgeworfene Licht durch die Oeffnung des Schirmes zurückkehrt, zeigt sich diese von kreisförmigen Ringen umgeben, welche bei Anwendung von weißsem Lichte farbig, im homogenen Lichte aber abwechselnd hell und dunkel erscheinen. Wird die Axe des Spiegels gegen die Richtung des einfallenden Lichtbündels allmählig geneigt, so daſs die regelmäßsig reflectirten Strahlen auf dem Schirme seitlich von der Oeffnung ein Bild derselben entwerfen, so erweitert sich das Ringsystem, während es (bei kleinen Neigungen wenigstens) kreisförmig bleibt; sein Mittelpunkt aber befindet sich stets auf halbem Wege zwischen der Oeffnung und ihrem Bilde, d. h. in dem Punkte, wo die Axe des Spiegels dem Schirme begegnet. Durch die Oeffnung und ihr Bild schlingt sich jetzt ein weißser Kreis; indem sich dieser mit dem ihn umgebenden farbigen Ringsystem bei fortschreitender Neigung des Spiegels immer mehr erweitert, sieht man aus dem gemeinsamen Mittelpunkt immer neue Farbenringe hervorquellen und das vom weißsen Kreise umschlossene Feld erfüllen. Sobald die Neigung des Spiegels 10 bis 15 Grad erreicht, bleiben die Ringe nur noch in ihrem hellsten Theile, nämlich in der Nähe des weißsen Bildes der Oeffnung sichtbar; man sieht alsdann zu beiden Seiten desselben und zwar senkrecht zu der nach der Oeffnung gezogenen Geraden farbige Streifen, welche sich der geradlinigen Form um so mehr nähern, je stärker der Spiegel geneigt wird. — Newton erkannte, daſs die Ringe sehr lichtschwach werden, wenn man die Belegung von der Hinterfläche des Spiegels entfernt, und daſs ein Metallspiegel sie gar nicht hervorbringt, und schloſs daraus, daſs zur Entstehung derselben die beiden Flächen des Glasspiegels zusammenwirken müssen. Durch sorgfältige Messungen gelang es ihm, die empirischen Gesetze der Erscheinung festzustellen; er fand, daſs die Durchmesser der hellen Ringe sich wie die Quadratwurzeln aus den geraden, diejenigen der dunkeln Ringe wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen verhalten; daſs diese Durchmesser dem Krümmungsradius des Spiegels direct, und der Quadratwurzel

aus der Glasdicke umgekehrt proportional sind, daſs sie ferner um so kleiner werden, je gröſser die Brechbarkeit der Strahlen, und je kleiner das Brechungsverhältniſs der Glassorte ist, aus welcher der Spiegel verfertigt wurde.

Obgleich Newton diese Erscheinung aus der Annahme erklärte, daſs das an der Vorderfläche des Spiegels *zerstreute* Licht an der hintern Fläche je nach der Schiefe der Strahlen unter wechselnden Accessen reflectirt werde, so kam er doch nicht auf den Gedanken, das Diffusionsvermögen, welches jeder Spiegelfläche wegen unvermeidlicher Unvollkommenheit der Politur eigen ist, absichtlich zu erhöhen. Erst der Herzog von Chaulnes [1]) bemerkte bei Wiederholung der Newton'schen Versuche im Jahre 1755, daſs die Ringe weit glänzender auftraten, als sein Hauch zufällig die Spiegelfläche gestreift hatte, und trübte von nun an seine Spiegel absichtlich, und zwar mit verdünnter Milch. Ihm verdanken wir auch eine wesentlich verbesserte Anordnung des Newton'schen Versuchs; er concentrirte nämlich mittelst einer Linse das vom Heliostaten kommende Sonnenlicht im Mittelpunkte der Schirmöffnung, so daſs von hier aus ein Kegel divergirender Strahlen unter senkrechter Incidenz auf den Spiegel gelangte; durch die gröſsere Lichtmenge, welche auf diese Weise nutzbar gemacht wird, wird der Glanz der Erscheinung ganz auſserordentlich erhöht. Ferner zeigte der Herzog von Chaulnes, daſs Farbenringe von der nämlichen Natur entstehen, wenn eine getrübte Glimmerplatte vor einem *metallenen* Hohlspiegel aufgestellt wird. Sir William Herschel [2]) fand sogar, daſs solche Ringe hervorgebracht werden können, wenn man vor dem Spiegel ein feines Pulver (Puder) in die Luft streut.

Th. Young war der erste, welcher die Erklärung der

1) Duc de Chaulnes, Observations sur quelques expériences de Newton. Mém. de l'anc. Acad. des sc. 1755, p. 136.

2) Phil. Trans. 1807, p. 231.

„Farben dicker Platten“ aus den Principien der Undulationstheorie wenigstens andeutete[1]). Ohne sich auf eine eingehendere Untersuchung einzulassen, schreibt er sie der Interferenz zweier Lichtbündel zu, von denen das eine beim Eintritt, das andere beim Austritt aus der Vorderfläche Diffusion erleidet.

Eine sehr ausführliche Arbeit über unsern Gegenstand besitzen wir von Biot[2]), welcher in Gemeinschaft mit Pouillet und Deflers nicht nur die Versuche Newton's und des Herzogs von Chaulnes wiederholte, sondern auch viele Versuche mit belegten und nicht belegten Linsen verschiedener Gestalt anstellte und zahlreiche Messungen ausführte. Biot legte dieser Klasse von Erscheinungen eine hohe Bedeutung bei, weil er in ihnen eine feste Stütze der von ihm so hartnäckig vertheidigten Emissionshypothese erblickte. Die Formeln nämlich, welche Biot aus der Hypothese der Accesse entwickelte, stimmten allerdings, soweit sie mit den Messungen verglichen wurden, mit diesen überein. Dies thut aber nicht minder, und zwar in Bezug auf alle Umstände der Erscheinung, die weit einfachere Formel, welche Sir John Herschel in seinem Treatise on Light[3]), den Andeutungen Young's folgend, aus der Undulationstheorie ableitete.

Schon Newton hatte die Erscheinung auch subjectiv beobachtet, indem er nach Entfernung des Schirmes sein Auge an die Stelle brachte, wo die Ringe auf dem Schirme sich gezeigt hatten. Er sah nun den Spiegel von prachtvollen farbigen Streifen bedeckt, welche sich erweiterten oder zusammenzogen und ihre Richtung änderten, je nachdem er das Auge bewegte. Aehnliche Streifen nahm

1) Young, On the theory of light and colours, Phil. Trans., 1802, p. 41. — Miscell. Works, I, p. 140. — Lectures on Natural Philosophy, London 1807, p. 471.

2) Biot, Traité de physique, t. IV. Paris, 1816, p. 149—229.

3) Encyclopaedia Metropolitana, Arts. 676—687. Auch besonders unter dem Titel: On the Theory of Light, London 1828.

Whewell[1]) wahr (1829), als er neben einer Kerzenflamme vorbei derart in einen trüben *ebenen* Spiegel blickte, daſs die Bilder des Auges und der Flamme nahe bei einander gesehen wurden; das Bild der Flamme erscheint alsdann inmitten eines Bündels farbiger Streifen, welche auf der durch Flamme und Auge zum Spiegel senkrecht gelegten Ebene senkrecht stehen. Diese Beobachtung wurde an Quetelet mitgetheilt, welcher sie in der von ihm herausgegebenen Zeitschrift publicirte[2]).

Die Theorie dieser Whewell'schen (oder auch Quetelet'schen) Streifen wurde zuerst von Schläfli[3]) auf den von Young und J. Herschel gegebenen Grundlagen ausgearbeitet, und von Mousson[4]) durch sorgfältige Messungen bestätigt. Mit groſser Ausführlichkeit und Allgemeinheit wird endlich die Theorie der nach Newton's Methode erzeugten Ringe sowie der Whewell'schen Streifen behandelt von Stokes[5]). In dieser auch an bemerkenswerthen Versuchsresultaten reichen Arbeit wird zum ersten Male ein Princip ausdrücklich hingestellt, welches schon den Rechnungen Herschel's und Schläfli's stillschweigend zu Grunde lag, nämlich: „daſs zwei Bündel diffusen Lichts nur dann mit einander interferiren, wenn sie an einem und demselben Theilchen zerstreut worden sind.“ In der Einleitung zu dieser Abhandlung wird eine bemerkenswerthe Abänderung des Newton'schen Versuchs angegeben, welche wenig bekannt gewor-

1) Whewell, On a new kind of coloured fringes, Phil. Mag. (4). I. 1851, p. 336. In dieser Note nimmt Whewell gegenüber Quetelet die Priorität der Beobachtung für sich in Anspruch.

2) Quetelet, sur certaines bandes colorées, Corresp. phys. et mathém. V. 1829, p. 394.

3) Schläfli, über eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung. Grunert's Archiv XIII. 1849, p. 299.

4) Mousson, über die Whewell'schen oder Quetelet'schen Streifen, Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, 1850, p. 57. Schw. Denkschr. 1853. p. 3.

5) Stokes, on the colours of thick plates, Cambr. Trans. IX. 1851. p. 147. — Pogg. Ann. Ergbd. III.

den zu seyn scheint, und daher hier im Vorbeigehen Erwähnung finden soll. Bringt man nämlich eine Kerzenflamme in den Krümmungsmittelpunkt eines getrübten Hohlspiegels, so daſs sie mit ihrem umgekehrten Bilde zusammenfällt, so sieht man sie von einem sehr schönen gleichsam in der Luft schwebenden farbigen Ringsystem umgeben.

Obgleich die Literatur über diese Klasse von Erscheinungen, wie aus dieser kurzen Zusammenstellung hervorgeht, eine ziemlich reichhaltige ist, hielt dennoch neuerdings Herr Seculic[1]) die Whewell'schen Streifen, als er sie zufällig beobachtete, für noch unbekannt, und scheint auch in einer zweiten Publication[2]) von dieser Meinung noch nicht zurückgekommen zu seyn. Auch Herr Feussner[3]) hat sich mit denselben beschäftigt, ohne die über den Gegenstand bereits vorhandenen Arbeiten zu kennen.

II.

Nach dem oben erwähnten Principe von Stokes erzeugt jeder Punkt der getrübten Spiegelfläche sein eigenes elementares Ringsystem, welches, vorausgesetzt daſs das diffuse Licht die Erscheinung verursache, mit den von andern Punkten herrührenden „incohärent“ ist. Damit die Erscheinung auf einem Schirme mit hinlänglicher Lichtstärke auftrete, muſs man Sorge tragen, daſs die von *zahlreichen* Punkten herrührenden elementaren Systeme mit ihren Mittelpunkten genau oder wenigstens sehr nahe zusammenfallen. Bei dem Newton'schen Versuch wird dieſs erreicht durch Anwendung eines Hohlspiegels, in dessen Krümmungscentrum der durchlöcherte

1) Eine merkwürdige Interferenzerscheinung. Pogg. Ann. Bd. 149. 1873. S. 126.

2) Ueber die an bestäubten und unreinen Spiegeln sichtbare Interferenzerscheinung; Pogg. Ann. Bd. 154. 1875, S. 308.

3) Ueber die von Hrn. Sekulic beschriebene Interferenzerscheinung. Pogg. Ann. Bd. 149. 1873, S. 561.

Schirm aufgestellt ist. Biot und Pouillet haben gezeigt [1]), dafs auch ebene und selbst convexe Spiegel Ringe geben, wenn man in jedem Fall die zur Erreichung des angegebenen Zweckes geeigneten Vorkehrungen trifft. Bei dem ebenen Spiegel mufste das einfallende Strahlenbündel aus parallelen Strahlen bestehen und sehr dünn seyn, was durch Einschaltung eines Diaphragma's auf den Weg der vom Heliostaten kommenden Lichtstrahlen erreicht wurde. Wegen der geringen Lichtmenge, welche auf diese Weise zur Wirkung kommt, fällt die Erscheinung sehr lichtschwach aus.

Durch folgende Anordnung gelang es mir nun mittelst eines ebenen Spiegels die Ringe weit glänzender objectiv darzustellen, als sie je mit einem Hohlspiegel nach Newton's Methode erhalten wurden.

Ein horizontales Bündel Sonnenstrahlen (*SS* Fig. 1, Taf. 1), so breit als der Heliostat es zu liefern vermag, fällt auf eine vertical gestellte durchsichtige Spiegelglasplatte *AA*, welche zu den einfallenden Strahlen unter einem Winkel von etwa 45° geneigt ist; die von der Glasplatte reflectirten Strahlen treffen senkrecht auf den zur Seite vertical aufgestellten belegten und auf seiner Vorderfläche getrübten Spiegel *BB*, so dafs sie nach der Reflexion an demselben durch die Glasplatte zurückkehren. Jenseits der Glasplatte treffen sie auf eine Linse *L*, deren Axe mit derjenigen des reflectirten Strahlenbündels zusammenfällt. Auf einem Schirme *MM*, welcher im Brennpunkt *F* der Linse senkrecht zu ihrer Axe aufgestellt ist, entwirft dieselbe nun ein kleines Sonnenbild, welches von einem prachtvollen farbigen Ringsystem umgeben ist.

Das einfallende Strahlenbündel hatte einen Durchmesser von 56^{mm}; mindestens ebenso breit mufs der Spiegel sein, wenn sämmtliche Strahlen zur Verwerthung kommen sollen; derselbe bildete ein Quadrat von 70^{mm} Seite, und wurde möglichst nahe an die Glasplatte, ein Quadrat von 100^{mm} Seite, herangerückt. Andrerseits wurde auch die Linse,

1) Biot, Traité de physique t. IV, p. 192 ff.

deren Durchmesser beispielsweise 65mm und deren Brennweite 858mm betrug, so nahe als möglich an der Glasplatte aufgestellt, damit sie möglichst viele von den zur Erscheinung beitragenden Strahlen auffange. Mit einem Spiegel, dessen Glasdicke nahezu 2mm betrug, zeigte alsdann der 7. rothe Ring, welcher noch deutlich gesehen wird, einen Durchmesser von etwa 100mm. Bei Anwendung einer Linse von gröfserer Brennweite sind die Ringdurchmesser natürlich in demselben Verhältnisse gröfser. Die Erscheinung ist so glänzend, dafs bei Anwendung von Sonnenlicht das Zimmer nicht verdunkelt zu werden braucht. Sie läfst sich selbstverständlich auch mittelst Drummond'schen oder noch besser elektrischen Lichtes darstellen.

Um das Ringsystem auf dem Schirme zu sehen, bedarf es übrigens einer Linse gar nicht, wenn nur der Schirm hinlänglich weit von dem Spiegel entfernt wird. Bei derselben Anordnung wie oben, jedoch ohne Linse, erscheint im verdunkelten Zimmer auf einem circa 10 Meter vom Spiegel entfernten Schirme ein noch immer hinlänglich lichtstarkes Ringsystem, dessen fünfter rother Ring (der sechste ist noch deutlich sichtbar) *einen Durchmesser von einem Meter hat.* Diese mit den einfachsten Mitteln, nämlich einem trüben Spiegel und einer Glasplatte, ausführbare Darstellung des Ringsystems gehört zu den schönsten objectiven Interferenzversuchen.

Dreht man die Glasplatte oder den Spiegel ein wenig aus der bisher angenommenen Stellung heraus, so beobachtet man alle jene Wandelungen des Ringsystems, welche oben bei Besprechung des Newton'schen Versuches beschrieben wurden.

Da es mir wünschenswerth erschien, die eben angegebene Vorrichtung sowohl zur objectiven Darstellung als auch zur subjectiven Beobachtung des Ringsystems stets zur Hand zu haben, liefs ich folgenden kleinen Apparat (Fig. 2, Taf. 1) construiren. Am einen Ende einer Messingröhre von 35mm Länge und 20mm innerem Durchmesser ist ein kleiner auf der Rückseite mit Silber belegter Spiegel von

etwa 1,5^{mm} Glasdicke mittelst seiner Fassung eingeschraubt. In die Röhre ist eine zweite eingeschoben, welche an ihrem dem Spiegel zugewendeten Ende unter einem Winkel von 45^{0} zu ihrer Axe schräg abgeschnitten und daselbst durch ein planparalleles Glas verschlossen ist. Gegenüber dieser Glasplatte besitzt die äufsere Röhre einen Ausschnitt, welcher parallel zur Röhrenaxe 18^{mm} mifst, und ein cylindrisches Strahlenbündel von diesem Durchmesser einzulassen vermag; an das andere Ende der inneren Röhre kann eine Linse von 60^{cm} Brennweite, oder auch ein Diaphragma mit rundem Sehloch angeschraubt werden.

Dieser kleine Apparat, welchen man etwa „Reflexions-Stephanoscop“ nennen könnte, genügt vollkommen zur objectiven Darstellung der Farbenringe nach der oben dargelegten Methode, sey es mit oder ohne Linse. Man klemmt ihn nämlich mit horizontal gerichteter Axe in einem geeigneten Stativ ein, so dafs das von der Lichtquelle gelieferte parallele Strahlenbündel durch den Ausschnitt der Röhre eintritt und senkrecht auf den Spiegel fällt; vor dem vorderen Ende wird in der geeigneten Entfernung der Schirm aufgestellt. Aufserdem aber kann das Instrumentchen auch zur subjectiven Beobachtung der Ringe dienen; man stellt es alsdann am bequemsten vertical, nämlich mit seinem flachen Boden auf eine horizontale Unterlage, während der Ausschnitt einer einigermafsen entfernten Lichtquelle von geringer Ausdehnung, z. B. einer 2 bis 3 Meter entfernten Kerzenflamme, zugewendet ist; blickt man dann nach Entfernung der Linse von oben hinein, so sieht man das Bild der Kerzenflamme, sobald dasselbe mit dem Bilde der Pupille zusammenfällt, von schönen farbigen Ringen umgeben, welche, wenn man den Apparat ein wenig neigt, in „Whewell'sche Streifen“ übergehen.

Bei unserer Methode der Darstellung des Ringsystems sind sowohl die einfallenden Strahlen, als auch diejenigen vom Spiegel ausgehenden Strahlenpaare, welche in einem Punkte des Schirmes zur Vereinigung und Interferenz

kommen, unter sich parallel. Die Theorie der Erscheinung vereinfacht sich vermöge dieses Umstandes aufserordentlich, und darf hier um so mehr einen Platz finden, als dieser bisher im Versuch nicht realisirte Fall auch theoretisch nirgends besonders hervorgehoben worden ist.

Der Punkt A (Fig. 3, Taf. 1) auf der Vorderfläche des Spiegels, welchen wir nach Mafsgabe des Stokes'schen Princips allein zu betrachten haben, empfängt erstlich Licht durch den einfallenden Strahl SA, welcher mit dem Lothe AL den Einfallswinkel i bildet; von ihm aus gehen nun Strahlen in allen möglichen Richtungen nach der belegten Hinterfläche des Spiegels, werden hier regelmäfsig reflectirt und treten, nachdem sie an der Vorderfläche eine Brechung erlitten, in die Luft aus. Einer dieser Strahlen AM sey innerhalb des Glases unter dem Winkel φ', und nach seinem Austritt (nach NQ) im Punkte N unter dem Winkel φ zum Lothe geneigt, so hat man, wenn μ das Brechungsverhältnifs des Glases bedeutet:

$$\sin\varphi = \mu \sin\varphi'.$$

Der Punkt A empfängt aber auch Licht durch einen zweiten mit SA parallel einfallenden Strahl $S'B$, welcher im Punkte B in das Glas hinein gebrochen und im Punkte P der Hinterfläche nach A hin regelmäfsig reflectirt wurde, und wird dadurch zum Ausgangspunkt von Strahlen, welche nach allen möglichen Richtungen in die Luft austreten. Einer dieser Strahlen (AR) ist parallel zu dem Strahl NQ, und interferirt mit ihm in demjenigen Punkte der Brennebene der Linse, welcher auf der zur Strahlenrichtung AR parallelen Linsenaxe liegt.

Um den Gangunterschied des Strahlenpaares AR und NQ zu bestimmen, fällen wir von den Punkten B und N die Senkrechten BU und NV resp. auf die Strahlen SA und AR; der Gangunterschied δ ist alsdann, wenn man berücksichtigt, dafs die Wege BPA und AMN im Glase zurückgelegt werden, und dafs $BP = AP$ und $MN = AM$ ist:

$$\delta = 2\mu \,.\, AP + AV - (UA + 2\mu \,.\, AM).$$

Bezeichnet man nun die Glasdicke des Spiegels mit d, und den zum Einfallswinkel i gehörigen Brechungswinkel mit r (so daſs $\sin i = \mu \sin r$ ist), so hat man

$$AP = \frac{d}{\cos r}$$
$$AV = 2\,d\,\mathrm{tg}\,\varphi' \sin \varphi$$
$$UA = 2\,d\,\mathrm{tg}\,r \sin i$$
$$AM = \frac{d}{\cos \varphi'},$$

folglich

$$\delta = 2\,d\left(\frac{\mu}{\cos r} + \mathrm{tg}\,\varphi' \sin \varphi - \mathrm{tg}\,r \sin i - \frac{\mu}{\cos \varphi'}\right)$$
$$= \frac{2\mu d}{\cos r}(1 - \sin^2 r) - \frac{2\mu d}{\cos \varphi'}(1 - \sin^2 \varphi') = 2\mu d(\cos r - \cos \varphi'),$$

oder auch

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi' = \sin^2 \tfrac{1}{2} r + \frac{\delta}{4\mu d} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Bei Ableitung dieser Gleichung wurde keineswegs vorausgesetzt, daſs die Ebene, welche die beiden Strahlen AR und NQ enthält, mit der Einfallsebene SAL zusammenfalle; sie kann vielmehr um das Einfallsloth AL durch alle Azimuthe gedreht werden, ohne daſs die Gleichung (I.) zu gelten aufhört; daraus geht hervor, daſs alle Strahlen, welche den nämlichen Gangunterschied δ haben, zu dem Einfallslothe AL und daher auch zur Axe der Linse unter dem nämlichen Winkel φ geneigt sind, und daher auf dem Schirme in den Umfang eines Kreises treffen, welcher um den Brennpunkt als Centrum beschrieben ist. Zugleich leuchtet ein, daſs alle von den verschiedenen Punkten des Spiegels herrührenden Kreise von gleichem Gangunterschied auf dem Schirme zusammenfallen.

Bei den erwähnten Versuchen sind die Winkel i, r, φ, φ' stets so klein, daſs man ohne merklichen Fehler

$$\sin \tfrac{1}{2} r \text{ durch } \tfrac{1}{2} \sin r = \frac{1}{2\mu} \sin i,$$

ferner

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi' \text{ durch } \tfrac{1}{2} \sin \varphi' = \frac{1}{2\mu} \sin \varphi$$

und demnach die genaue Gleichung (I.) durch die genäherte

$$\sin^2 \varphi = \sin^2 i + \frac{\mu \delta}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

ersetzen kann. Bezeichnet man die Brennweite der Linse mit f und den Radius des dem Gangunterschied δ entsprechenden Kreises mit ϱ, so ist

$$\varrho = f \operatorname{tg} \varphi$$

oder mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\varrho = f \sin \varphi;$$

wird endlich noch ϱ_0 statt $f \sin i$ gesetzt, so hat man auch

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + f^2 \cdot \frac{\mu \delta}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Für $\delta = 0$ ist

$$\varrho = \varrho_0 = f \sin i;$$

der Kreis *ohne* Gangunterschied, welcher bei Anwendung von weißem Licht *weiſs* erscheint, geht sonach durch den Punkt, in welchem sich die regelmäſsig reflectirten Strahlen auf dem Schirm vereinigen. Im Innern dieses Kreises ist δ negativ, auſserhalb positiv.

Für homogenes Licht von der Wellenlänge λ treten dunkle Ringe ein, so oft $\delta = \frac{2n+1}{2} \lambda$, helle Ringe, so oft $\delta = \frac{2n}{2} \lambda$ ist, unter n eine ganze Zahl verstanden. Den dunkeln Ringen entspricht also die Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + f^2 \cdot \frac{(2n+1)\mu\lambda}{2d} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IIIa)}.$$

Trifft das einfallende Strahlenbündel senkrecht auf den Spiegel, so ist i und darum auch $\varrho_0 = 0$, und man hat

$$\varrho^2 = f^2 \cdot \frac{(2n+1)\mu\lambda}{2d} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IIIb)}.$$

Im letzteren Falle gelten also folgende Gesetze: Die Halbmesser der aufeinanderfolgenden dunkeln Ringe verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen; sie sind ferner der Brennweite der Linse und den Quadratwurzeln aus dem Brechungsverhältniſs des Spiegelglases und aus der Wellenlänge direct, und endlich

der Quadratwurzel aus der Glasdicke umgekehrt proportional.

Die Formel IIIb ist die nämliche, welche Herschel für die durch einen Hohlspiegel erzeugten Ringe Newton's gefunden hat, mit dem einzigen Unterschied, daſs dort der Krümmungsradius des Hohlspiegels statt der Brennweite der Linse steht.

Um die Formel (IIIb) mit der Beobachtung zu vergleichen, wurden, während ein *rothes* Glas die Oeffnung des Heliostaten verschloſs, die Durchmesser der dunkeln Ringe auf folgende Weise gemessen. Auf dem weiſsen Papierschirm waren zwei feine zu einander senkrechte Linien gezogen, deren Kreuzungspunkt in den Mittelpunkt des Sonnenbildchens gerückt wurde. Längs dieser beiden Linien wurden die Durchmesser der Ringe mit dem Zirkel gemessen, indem dessen Spitzen auf die dunkelsten Stellen eingesetzt wurden; aus den beiden wenig von einander abweichenden Zahlen, welche sich auf diese Weise ergaben, wurde das Mittel genommen. Eine solche Messungsreihe wurde mit einer achromatischen Linse von 858mm Brennweite, eine zweite mittelst einer nicht achromatischen Linse von 917mm Brennweite durchgeführt.

Für die acht ersten Ringe ergaben sich folgende Werthe in Millimetern:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$f = 858^{mm}$:	27,30 mm;	46,50;	59,90;	70,75;	80,25;	88,60;	96,40;	103,40.
$f = 917^{mm}$:	29,45 mm;	49,70;	64,00;	75,55;	85,80;	94,80;	103,00;	110,40.

Diese Zahlenwerthe sind aber nicht unmittelbar mit der Formel (IIIb) vergleichbar. Jeder Punkt der Sonnenscheibe erzeugt nämlich sein eigenes Ringsystem; für einen Punkt des Sonnenrandes z. B. ergiebt sich der Radius ϱ_1 des $(n+1)$ten dunkeln Ringes aus der Gleichung

$$\varrho_1^2 = \varrho_0^2 + f^2 \frac{(2n+1)\mu\lambda}{2d} \quad . \quad . \quad \text{(III a)},$$

unter ϱ_0 den Radius des Sonnenbildchens auf dem Schirme

verstanden, während für den Sonnenmittelpunkt der Radius ϱ des gleichvielten Ringes aus der Gleichung

$$\varrho^2 = f^2 \frac{(2n+1)\mu\lambda}{2d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III b)}$$

hervorgeht. In dem Zwischenraum zwischen diesen beiden Ringen, dessen Breite $\varrho_1 - \varrho$ ist, mufs die dunkelste Stelle liegen, auf welche bei der Messung eingestellt wurde. Nehmen wir an, was auch sehr nahe zutrifft, dafs sie in die Mitte des Zwischenraumes falle, so ist $\varrho_1 + \varrho$ der *beobachtete* Durchmesser, von welchem man die *Correctur* $\varrho_1 - \varrho$ abziehen mufs, um den auf den Mittelpunkt *reducirten* Durchmesser 2ϱ zu erhalten. Zieht man die beiden obigen Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$\varrho_1^2 - \varrho^2 = \varrho_0^2$$

und daraus

$$\varrho_1 - \varrho = \frac{\varrho_0^2}{\varrho_1 + \varrho};$$

man findet also die Correctur, indem man das Quadrat des Radius des Sonnenbildchens durch den beobachteten Durchmesser dividirt. Mit der Linse von 858^{mm} Brennweite zeigte das Sonnenbildchen einen Durchmesser von 8^{mm}, mit der Linse von 917^{mm} einen solchen von 8^{mm},5. Mittelst dieser Daten berechnen sich folgende Correcturen:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$f = 858^{mm}$:	0^{mm},59;	0,35;	0,27;	0,23;	0,20;	0,18;	0,17;	0,15.
$f = 917^{mm}$:	0^{mm},60;	0,36;	0,28;	0,24;	0,21;	0,19;	0,17;	0,16.

Zieht man dieselben der Reihe nach von den obigen durch Messung gefundenen Werthen der Durchmesser ab, so erhält man die in der folgenden kleinen Tabelle unter der entsprechenden Rubrik aufgeführten „reducirten" Durchmesser, welche der Formel (III b) genügen müssen. Um zunächst das Gesetz zu bewahrheiten, dafs sich die aufeinander folgenden Durchmesser verhalten wie die Quadratwurzeln der ungeraden Zahlen, berechnen wir nach

demselben aus einem Durchmesser, z. B. aus dem dritten, alle übrigen; die gefundenen Werthe sind in nachstehender Tabelle den reducirten Beobachtungen unter der Ueberschrift „berechnet" an die Seite gestellt, und die kleinen Differenzen beweisen, daſs die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie eine vollkommen befriedigende ist.

	$f = 358^{mm}$			$f = 917^{mm}$		
	beobacht. u. reducirt	berechnet	Diff.	beobacht. u. reducirt	berechnet	Diff.
	mm	mm		mm	mm	
1	26,71	26,67	+ 0,04	28,85	28,50	+ 0,35
2	46,15	46,19	— 0,04	49,34	49,36	— 0,02
3	58,63	59,63	0	63,62	63,72	0
4	70,52	70,55	— 0,03	75,31	75,40	— 0,09
5	80,05	80,00	+ 0,05	85,59	85,49	+ 0,10
6	88,42	88,44	— 0,02	94,61	94,51	+ 0,10
7	96,23	96,15	+ 0,08	102,83	102,75	+ 0,08
8	103,25	103,28	— 0,03	110,24	110,36	— 0,12

Die Gleichung (III b) wird übrigens nach allen Beziehungen, welche sie zum Ausdruck bringt, am besten dadurch verificirt, daſs wir aus ihr unter Zugrundelegung der reducirten Werthe von ϱ die Wellenlänge von λ berechnen. Dabei lassen wir aber den ersten Ring, welcher ziemlich breit und verwaschen erscheint, und daher nur eine unsichere Messung gestattet, auſser Acht. Die Glasdicke des Spiegels war $d = 1^{mm},978$; nehmen wir das Brechungsverhältniſs μ zu 1,5 an, so ergeben sich aus der ersten Beobachtungsreihe Werthe von λ, welche zwischen $0^{mm},0006358$ und $0^{mm},0006380$ liegen, und aus der zweiten Reihe Werthe zwischen $0^{mm},0006353$ und $0^{mm},0006382$; aus beiden Reihen aber ergiebt sich der nämliche Mittelwerth

$$\lambda = 0^{mm},0006368.$$

Das durch das rothe Glas gegangene Licht war nun freilich nicht homogen, sondern sein Spektrum erstreckte sich vom äuſsersten Roth ein wenig über die Linie D hin-

aus bis ins Gelb. Der Sinn unseres Resultates kann natürlich nur der seyn, daſs in der durch das rothe Glas gelieferten Mischfarbe die Strahlen von der angegebenen Wellenlänge an Lichtstärke hervorragten, so daſs auf dem Schirme die dunkelsten Stellen da eintreten muſsten, wo diese hellste Strahlengattung fehlte. In der That zeigte bei der spectroskopischen Untersuchung des rothen Glases der Augenschein, daſs sein Spectrum zwischen den Fraunhofer'schen Linien *C* und *D* am hellsten war.

Zum Gelingen der Messungen ist nothwendig, daſs sowohl der Spiegel als die reflectirende Glasplatte *planparallel* sey. Da es aber schwer hält, sich gröſsere Platten von dieser Eigenschaft zu verschaffen, so wird man zu Messungszwecken lieber Platten von kleineren als den oben angegebenen Dimensionen anwenden. Platten von 20 bis 25^{mm} Durchmesser sind vollkommen genügend.

Zur subjectiven Beobachtung und Messung des Ringsystems bei ebenen Platten eignet sich besonders das *Spectrometer*. Der kleine Spiegel (siehe Fig. 4, Taf. 1) wird auf dem Tischchen des Instruments nahe am Rande, dem Beobachtungsfernrohr *F* gegenüber, mit Klebwachs befestigt und mittelst der Methode der Spiegelung des Fadenkreuzes genau senkrecht zur Fernrohraxe gestellt, welche mit der Axe des Collimators *C* einen stumpfen Winkel von etwas mehr als 90° einschlieſst. Das vom Heliostaten kommende Licht trifft zuerst auf eine Linse *L* von kurzer Brennweite (36^{mm}), welche in der Ebene des weitgeöffneten Spaltes ein sehr kleines Sonnenbildchen entwirft. Das aus der Collimatorlinse austretende parallele Strahlenbündel wird von einer planparallelen Glasplatte *p*, welche in der Mitte des Tischchens zwischen Spiegel und Fernrohr mit Klebwachs befestigt ist, auf den Spiegel reflectirt; damit es genau senkrecht auf denselben treffe, braucht man die Glasplatte nur so zu stellen, daſs das kleine Sonnenbild am Fadenkreuz gesehen wird. Indem man das Fadenkreuz auf die Endpunkte der horizontalen Durchmesser der Ringe durch Drehen des Beobachtungsrohrs einstellt,

während das Tischchen feststehen bleibt, ergeben sich die angularen Durchmesser der Ringe. Als Beispiel diene folgende an einem sehr dicken Spiegel ($d = 5^{mm},745$) und mit dem nämlichen rothen Lichte wie oben vorgenommene Messung. Der Limbus des Meyerstein'schen Spectrometers war in Viertelgrade getheilt und mittelst der Nonien konnten noch 20″ abgelesen werden. Zwei Messungen desselben Ringes differirten höchstens um 40″, nur beim ersten Ringe erhob sich der Unterschied bis zu einer Minute. Bei der getroffenen Anordnung war die Correctur wegen des Durchmessers des Sonnenbildchens sehr geringfügig; da nämlich die Brennweite der vor dem Spaltrohr aufgestellten Linse 36^{mm}, diejenige der Collimatorlinse 220^{mm} betrug, so wurde der scheinbare Sonnendurchmesser von 32′ (im Verhältnifs von 36 : 220) auf $5\frac{1}{4}'$ vermindert, und für die aufeinanderfolgenden Ringdurchmesser ergaben sich, nach der oben entwickelten Regel berechnet, folgende nur auf wenige Secunden sich belaufende Correcturen:

6″,4; 3,7; 2,7; 2,3; 2,0; 1,7; 1,6.

In der Rubrik „beobachtet“ der folgenden kleinen Tabelle finden sich nun als Mittel aus fünf Messungen die corrigirten Halbmesser. Unter Zugrundlegung des für den dritten Ring gefundenen Werthes wurden die Zahlen der zweiten Columne aus Formel (II), nämlich, weil in unserem Falle $i = 0$ und $\delta = \frac{2n+1}{2}\lambda$ war, aus

$$\sin^2 \varphi = \frac{(2n+1)\mu\lambda}{2d}$$

berechnet. Dafs die Voraussetzungen, welche dieser Gleichung zu Grunde liegen, bei unserer Beobachtungsmethode zutreffen, liegt auf der Hand. Die Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist auch in der That, wie die Columne der Differenzen zeigt, eine sehr befriedigende.

	φ beobachtet	φ berechnet	Differenz
1	31′ 42″	31′ 27″	+ 15″
2	54 33	54 29	+ 4
3	1° 10 20	1° 10 20	0
4	1 23 15	1 23 13	+ 2
5	1 34 19	1 34 22	− 3
6	1 44 20	1 44 19	+ 1
7	1 53 32	1 53 25	+ 7

Berechnet man aus den Werthen der ersten Columne und zwar wiederum mit Ausschluſs des ersten Ringes und unter der Annahme, daſs $\mu = 1{,}5$ sey, die Wellenlänge λ, so findet man Werthe, welche zwischen $0^{mm}{,}0006428$ und $0^{mm}{,}0006405$ liegen und als Mittel

$$\lambda = 0^{mm}{,}0006416$$

geben, eine Zahl, welche von der früher gefundenen nur wenig abweicht. Die Ursache der Abweichung dürfte in einer Verschiedenheit der Brechungsverhältnisse der Glassorten der beiden Spiegel zu suchen seyn.

Nicht nur an Spiegeln von verschiedener Glasdicke wurde das Ringsystem beobachtet und gemessen, sondern auch in Fällen, wo die spiegelnde und die getrübte Fläche durch eine Luftschicht von einander getrennt waren. Es wurde nämlich ein Silberspiegel mit der Silberfläche nach vorn dem Beobachtungsfernrohr gegenüber aufgestellt, und vor denselben eine planparallele Glasplatte, deren *hintere* dem Spiegel zugewendete Seite getrübt war. Indem man das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbilde zur Deckung brachte, konnten sowohl Spiegel als Glasplatte zur Fernrohraxe senkrecht gestellt werden. Für diesen Fall hat man in den obigen Formeln $\mu = 1$, $\varphi' = \varphi$, $r = i$ zu setzen. Die Messungen befanden sich auch hier mit der Theorie in befriedigendem Einklang.

Will man die Aenderungen verfolgen, welche das Ringsystem bei allmähliger Neigung der einfallenden Strahlen durchmacht, so geschieht dieſs am besten, indem man

das Tischchen des Spectrometers sammt den darauf befestigten Platten um seine Axe dreht; die Aenderung des Einfallswinkels ist alsdann gleich der dem Tischchen ertheilten Drehung. Die reflectirten Strahlen bleiben dabei stets ihrer ursprünglichen Richtung parallel und das Bild des Lichtpunktes bleibt unbeweglich am Fadenkreuz stehen.

Die durchsichtige reflectirende Glasplatte wurde zur subjectiven Beobachtung dieser Klasse von Erscheinungen bereits von Stokes[1]) benutzt, jedoch in etwas anderer Weise als es hier geschehen ist. Um nämlich die „Whewell'schen Streifen" als vollständiges Ringsystem zu sehen, was bei der früher üblichen Beobachtungsweise wegen des Kopfschattens nicht möglich war, liefs Stokes einen Strahlenkegel, der vom Brennpunkt eines kleinen Hohlspiegels ausging, auf den getrübten Planspiegel fallen, und stellte zwischen beide Spiegel eine unter einem Winkel von etwa 45° geneigte Glasplatte; der gröfsere Theil des vom Brennpunkte kommenden Lichtes ging durch die Glasplatte hindurch, nach seiner Rückkehr von dem Planspiegel wurde aber ein Theil desselben seitwärts reflectirt, und man konnte nun von dieser Seite das Ringsystem an der Glasplatte gespiegelt sehen. Während also bei der von uns gewählten Anordnung das Licht an der Glasplatte zuerst reflectirt und dann durchgelassen wird, läfst Stokes das Licht zuerst durchgehen und dann reflectiren. Beide Anordnungen sind vollkommen äquivalent; namentlich kann die oben beschriebene objective Darstellung des Ringsystems auch nach Stokes'scher Weise eingerichtet werden. Auch der kleine oben angegebene Apparat eignet sich zu beiden Versuchsmethoden; läfst man nämlich das Strahlenbündel durch die vordere Oeffnung parallel der Axe der Röhre eintreten, so sieht man das Ringsystem an der Glasplatte gespiegelt, wenn man zur seitlichen Oeffnung hineinblickt. Für die Beobachtungen und Messungen mit dem Spectrometer gebe ich jedoch der von

1) Pogg. Ann. Ergbd. III, S. 570.

mir gewählten Anordnung den Vorzug, weil dieselbe gestattet, den Spiegel bequem und sicher zur Fernrohraxe senkrecht zu stellen.

III.

Im Laufe der bereits oben erwähnten Versuche, welche Biot in Gemeinschaft mit Pouillet über die in Rede stehenden Farbenringe anstellte, beobachtete Pouillet Ringe der nämlichen Art, als er ein mit einem runden Loch versehenes schwarzes Papier vor einen metallenen Hohlspiegel brachte. Es stellte sich heraus, dafs die Gestalt der Oeffnung sowie die Substanz des Diaphragma's völlig gleichgiltig ist; man kann die Oeffnung sogar durch den einfachen Rand einer undurchsichtigen Platte ersetzen: immer bilden sich Ringe, deren Durchmesser das gewöhnliche Gesetz befolgen und bei schiefem Einfallen der Strahlen die bekannten Aenderungen erleiden. Dabei ist bemerkenswerth, dafs z. B. bei Anwendung einer spaltförmigen Oeffnung oder eines geradlinigen Randes die Ringe da am lebhaftesten auftreten, wo sie den zur Längsrichtung des Spaltes oder Randes senkrechten Streifen gebeugten Lichtes durchsetzen[1]). Diese Versuche finden sich beschrieben sowohl in Biot's Traité de Physique, als auch in einer Abhandlung Pouillet's[2]), über welche Ampère und Poisson am 22. Jan. 1816 der Pariser Akademie Bericht erstatteten. Uebrigens hatte auch bereits der Herzog von Chaulnes Farbenringe beobachtet, als er eine Messerschneide vor seinen metallenen Hohlspiegel brachte.

Diese Fälle, in welchen das Ringsystem unzweifelhaft durch gebeugte Strahleu erzeugt wird, legen die Vermuthung nahe, dafs auch bei den getrübten Spiegeln nicht das

1) Biot, Traité de physique, T. IV p. 225, pl. III. Fig. 45 et 46.

2) Pouillet, Expériences sur les anneaux colorés qui se forment par la réflexion des rayons à la seconde surface des lames épaisses, et sur un nouveau phénomène qui s'y rapporte. Ann. de chim. et de phys., (2), I., p. 87. 1816.

beim *Durchgang* durch die Theilchen der Trübung *diffundirte*, sondern das beim *Vorübergang* an denselben *gebeugte* Licht das eigentlich Wirksame sey. Diese Ansicht wird von Stokes in der bereits citirten Abhandlung[1]) ausführlich erläutert und begründet. Die Theorie erleidet dadurch äufserlich keine weitere Aenderung, als dafs jetzt von „gebeugten" statt von „zerstreuten" Strahlen gesprochen wird; sie gewinnt aber an Klarheit und Schärfe, indem jetzt an die Stelle des nicht völlig klaren Vorganges der Diffusion der weit einfachere Begriff der Beugung tritt. Das von Stokes ausgesprochene und durch die Erfahrung bewährte Princip wird auch durch die neue Anschauung leicht begreiflich: denn es leuchtet ein, dafs nur zwei solche Strahlen in der angegebenen Weise interferiren können, welche, der eine auf dem Hinweg, der andere auf dem Rückweg, durch Beugung an demselben Theilchen die gleiche Modification erlitten haben. Ferner erklärt sich aus der neuen Ansicht ganz von selbst eine Thatsache, welche der älteren Theorie mindestens Schwierigkeit bereiten würde: nur diejenigen Theile des Ringsystems erscheinen nämlich mit lebhaftem Glanze, welche sich nahe beim Bilde der Lichtquelle befinden, und zwar defshalb — so werden wir vom jetzigen Standpunkte aus sagen — weil die Intensität des gebeugten Lichtes mit wachsendem Beugungswinkel sehr rasch abnimmt. Am entscheidendsten aber spricht zu Gunsten der Beugungstheorie ein Versuch von Stokes, welchen derselbe geradezu als Experimentum crucis bezeichnet. Wenn nämlich polarisirtes Licht *zerstreut* wird, z. B. durch Reflexion an weifsem Papier oder durch Transmission durch dasselbe, so verliert es seine Polarisation; wenn dagegen polarisirtes Licht eine regelmäfsige Beugung erleidet, so behält es seine Polarisation. Stokes stellte nun eine kleine Flamme nahe an den Krümmungsmittelpunkt eines getrübten Hohlspiegels, und brachte ein Nicol'sches Prisma dicht an die Flamme, so dafs das auf den Spiegel fallende

1) Pogg. Ann. Ergbd. III.

Licht polarisirt war. Bei Untersuchung mit einem zweiten Nicol erwiesen sich die Ringe als vollkommen polarisirt.

Dieser Versuch läſst sich sehr bequem mittelst des oben beschriebenen kleinen Apparates anstellen. Vor die seitliche Oeffnung der Röhre bringt man einen Nicol, so daſs seine Polarisationsebene mit derjenigen der reflectirenden Glasplatte zusammenfällt, und betrachtet die Erscheinung durch einen zweiten Nicol; wird die Polarisationsebene des letzteren zu der des ersteren senkrecht gestellt, so verschwindet mit dem Bilde der Lichtquelle auch das Ringsystem, *während die getrübte Oberfläche des Spiegels vermöge des von ihr ausgestrahlten diffusen Lichtes sichtbar bleibt.*

Die Beobachtungsmethode mit dem Spectrometer giebt ein bequemes Mittel an die Hand, die oben erwähnten Versuche zu wiederholen und auf die mannigfaltigste Art abzuändern. Es wurden z. B. dicht vor den oben erwähnten Spiegel von $5^{mm},745$ Glasdicke, welcher bei sorgfältig gereinigter Oberfläche keine Spur von Ringen zeigte, die verschiedenartigsten beugenden Schirme gebracht, geschwärzte Metallbleche mit einzelnen runden oder eckigen Oeffnungen, oder mit regelmäſsigen Gruppen von Oeffnungen: immer zeigt sich eine Beugungserscheinung, ähnlich derjenigen welche der Schirm allein hervorgebracht haben würde, *durchschnitten* von dem Ringsystem; und läſst man (durch Drehen des Tischchens des Spectrometers) die Strahlen allmählig schief einfallen, so gleiten die Ringe über das Beugungsbild, welches an den Lichtpunkt gefesselt fest am Fadenkreuze stehen bleibt. Durch Messung der Ringe im rothen Licht konnte man sich endlich überzeugen, daſs ihre Durchmesser genau die nämlichen waren, welche derselbe Spiegel bei getrübter Oberfläche (s. oben) gezeigt hatte. — Dieselben Resultate ergeben sich, wenn der beugende Schirm vor dem Spiegel mit metallischer Oberfläche, durch eine Luftschicht von ihm getrennt, aufgestellt wird.

Ein mit Semen Lycopodii bestreuter Spiegel zeigt die Beugungsringe des Bärlappsamens und darüber gelagert die Interferenzringe. Besteht dagegen die Trübung aus unregelmäſsigen und ungleichen Theilchen, so wird eine Beugungserscheinung nicht gesehen, weil die gebeugten Strahlen, welche von den verschiedenen Theilchen nach der gleichen Richtung ausgesandt werden, die verschiedensten Phasenunterschiede besitzen; gleichwohl aber entsteht das Ringsystem durch Interferenz von Strahlenpaaren, welche je an einem und demselben Theilchen gebeugt worden sind. Statt der vom Herzog von Chaulnes und von Stokes angewendeten verdünnten Milch wählte ich zur Trübung lieber unorganische Stoffe, welche keine Zersetzung erleiden und daher beliebig lange wirksam bleiben. Bei den oben beschriebenen Versuchen waren die Spiegel mit Zinkweiſs oder mit schwefelsaurem Baryt getrübt; diese weiſsen Pulver wurden entweder auf die Spiegel gesiebt, oder in Wasser fein zertheilt auf die Spiegeloberfläche gebracht, wo sie haften blieben, nachdem das Wasser verdunstet war. Sehr lehrreich war die Anwendung von farbigen Pulvern, z. B. blauem und grünem Ultramarin, Zinnober, Mennige, Chromgelb etc., indem dieselben eine neue Bestätigung der Beugungstheorie lieferten. Würden nämlich gemäſs der älteren Ansicht die Ringe erzeugt durch das beim Durchgang durch die Staubtheilchen diffundirte Licht, so müſste an den Ringen der Einfluſs der von dem farbigen Pulver ausgeübten Absorption wahrnehmbar sein, d. h. beim Zinnober müſsten die Ringe roth, beim Ultramarin blau erscheinen; nichts von alledem trat ein, sondern das Ringsystem zeigte in allen Fällen die dem weiſsen Lichte entsprechende Farbenvertheilung und unterschied sich in nichts von dem durch ein weiſses Pulver erzeugten, woraus geschlossen werden muſs, daſs es durch das *weiſse* Licht hervorgebracht wird, welches neben den Staubtheilchen *vorbei* geht. Im polarisirten Licht blieb, wenn die Polarisationsebenen zu einander senkrecht standen und das Ringsystem ausgelöscht war, das *farbige* diffuse Licht noch sichtbar. Dasselbe ist

natürlich auch gleichzeitig mit dem Ringsystem vorhanden, und legt sich wie ein zarter Schleier gleichmäfsig über die ganze Erscheinung, ohne jedoch etwas zu ihrer Entstehung beizutragen.

Endlich wurde noch, als trübendes Mittel von sehr geringem Diffusionsvermögen, der Rufs versucht. Eine sehr zarte Rufsschicht, welche sich auf dem Spiegel absetzt, wenn man ihn einen Augenblick in eine Flamme hält, bringt *keine* Ringe hervor. Eine solche Rufsschicht, welche im durchfallenden Lichte röthlich und im diffus reflectirten Lichte vor dunklem Hintergrunde bläulich erscheint, stellt sich unter dem Mikroscop als eine zusammenhängende gleichmäfsige Schicht dar; dieselbe besteht wahrscheinlich aus Theilchen, deren Durchmesser und gegenseitige Abstände kleiner sind als die kleinste Wellenlänge, und daher eine Beugung im gewöhnlichen Sinne nicht veranlassen. Die Ringe treten aber sofort auf, wenn man etwa mit einem spitzen Hölzchen Punkte oder Striche in die Rufsschicht zeichnet und damit die Möglichkeit einer Beugung herbeiführt. Ebenso zeigt sich das Ringsystem, wenn man Kienrufs auf den Spiegel siebt, oder wenn man, nachdem der Spiegel über einer Flamme mit einer dicken undurchsichtigen Rufsschicht überzogen worden, in diese beliebige Figuren zeichnet.

Durch die angeführten Versuche scheint mir nun hinlänglich dargethan zu seyn, *dafs das Ringsystem durch die Interferenz je zweier Strahlen entsteht, von denen der eine vor der Reflexion, der andere nach der Reflexion an derselben Stelle gebeugt wurde.* Durch die Bezeichnung „*Interferenz des gebeugten Lichts,*“ welche wir als Ueberschrift voranstellten, wird daher die wahre Natur der besprochenen Erscheinungen richtig ausgedrückt.

Obgleich die Diffusionstheorie und die Beugungstheorie, auf den Fall der unregelmäfsig getrübten Spiegel angewandt, zu demselben Ergebnisse führen, so besteht zwischen beiden doch ein principieller Unterschied, der noch besonders hervorgehoben zu werden verdient. Die Diffusionstheorie

nämlich nimmt an, dafs die elementaren Strahlenpaare, welche von den verschiedenen Punkten der getrübten Fläche kommend sich in einem Punkte des Schirmes vereinigen, unter sich nicht interferenzfähig, oder, wie man zu sagen pflegt, dafs sie „incohärent“ seyen. Die Beugungstheorie dagegen verlangt, dafs diese Strahlenpaare auch noch unter sich interferiren, oder dafs sie „cohärent“ seyen. Besteht die Trübung aus ungleichen und unregelmäfsig angeordneten Theilchen, so besitzen die in jedem Punkte des Schirmes zusammentreffenden unzählig vielen Strahlenpaare alle möglichen Phasenunterschiede; das Resultat ihrer Interferenz unter sich ist daher für alle Punkte des Schirmes das nämliche, und es treten keine anderen Intensitätsunterschiede auf als jene, welche durch die elementaren Strahlenpaare an und für sich bereits bedingt sind. Befindet sich aber vor der spiegelnden Fläche ein regelmäfsig beugender Schirm, so giebt die Interferenz der Strahlenpaare unter sich zu einer Beugungserscheinung Anlafs, welche modificirt ist durch die innerhalb eines jeden einzelnen Strahlenpaares sich vollziehende Interferenz.

IV.

Als Beispiel für den letzteren Fall untersuchen wir die merkwürdige Erscheinung, welche sich darbietet, wenn ein *Gitter* vor eine spiegelnde Fläche gebracht wird.

Ein kleiner Spiegel wird, mit der metallischen Fläche dem Beobachter zugewendet, auf dem Tischchen des Spectrometers senkrecht zur Axe des Fernrohrs aufgestellt, ganz so, wie oben bereits beschrieben wurde. In der Mitte des Tischchens wird eine planparallele Glasplatte so angebracht, dafs sie das vom Collimator kommende Licht senkrecht auf den Spiegel wirft, d. h. so, dafs das Bild des Spaltes am Fadenkreuz erscheint. Der Spalt ist aber jetzt möglichst verengt, und wird von dem vom Heliostaten kommenden Sonnenlicht (oder von dem Lichte einer vor dem Spalte aufgestellten Lampe) unmittelbar, nämlich ohne Da-

zwischenkunft einer Linse, getroffen. Vor dem Spiegel wird ein auf ein planparalleles Glas geritztes Gitter, mit der geritzten Fläche dem Spiegel zugewendet, so aufgestellt, daſs die Gitterstriche vertical stehen und die Ebene des Gitters mit derjenigen des Spiegels parallel ist; letzteres wird dadurch erreicht, daſs man das von der ungeritzten Fläche des Gitters reflectirte Spaltbild ebenfalls mit dem Fadenkreuz zur Coincidenz bringt.

Man sieht nun in den Beugungsspectren, welche zu beiden Seiten des Spaltbildes erscheinen, auſser den Fraunhofer'schen Linien *eine Anzahl dunkler Streifen.* Die Streifen haben weder den gleichen Abstand von einander, noch gleiches Aussehen; während die einen vollkommen schwarz und scharf erscheinen, sind andere blaſs und verwaschen. In den Spectren höherer Ordnungszahl, welche sich gegenseitig überdecken, sind die Streifen nicht mehr schwarz, sondern sie stehen farbig auf anders gefärbtem Grunde; in dem purpurfarbigen Gebiete z. B., wo sich das violette Ende des dritten Spectrums über das rothe Ende des zweiten legt, erscheinen die dem zweiten Spectrum angehörigen Streifen violett, während dem dritten Spectrum zugehörige Streifen die rothe Farbe zeigen. Die höheren Spectren erhalten dadurch ein eingenthümlich buntgestreiftes Aussehen.

Die Anzahl der Streifen wächst in dem Maaſse, als das Gitter von dem Spiegel entfernt wird.

Die Erscheinung ist zu beiden Seiten des Spaltbildes symmetrisch, wenn der in der Axe des Collimators verlaufende Strahl genau senkrecht auf den Spiegel trifft. Bei der geringsten Abweichung aus dieser Stellung wird die Streifung der Spectren auf beiden Seiten ungleich. Einen höchst sonderbaren Anblick aber gewährt die Erscheinung, wenn man durch gleichmäſsiges Drehen des Spectometer-Tischchens die Strahlen allmählig immer schiefer einfallen läſst. Die Streifen gerathen alsdann in Bewegung, während aber einige sich nur langsam von der Stelle bewegen und manche sogar, an die nämliche Stelle des zugehörigen

Spectrums gebannt, stillzustehen scheinen, wandern andere Streifen mit gröfserer Geschwindigkeit über die Spectren hinweg, indem sie auf ihrem Wege die stillstehenden oder langsamer voranschreitenden einholen, einen Augenblick mit ihnen in einen Streifen zusammenfliefsen, um sich im nächsten Augenblick wieder von ihnen loszureifsen und ihre Wanderung fortzusetzen.

Obgleich diese wandelbare und complicirte Erscheinung von den bisher besprochenen auf den ersten Anblick sehr verschieden zu seyn scheint, so glauben wir doch, dafs sie zu derselben Klasse gerechnet werden mufs. Die Frage zunächst warum hier keine Ringe, sondern geradlinige Interferenzstreifen auftreten, beantwortet sich nach der von uns adoptirten Theorie sehr leicht.

Angenommen, vor dem Spiegel befinde sich ein verticaler Spalt, und die Lichtquelle sey eine unendlich ferne verticale leuchtende Linie, nämlich der Spalt des Collimators. Wenn die Breite des beugenden Spaltes im Vergleich zu seiner Länge verschwindend klein ist, so beschränkt sich das zu einem Punkte der Lichtlinie gehörige gebeugte Licht auf eine durch das Bild des Lichtpunktes gehende zu den Spalträndern senkrechte (also horizontale) Gerade. Jedem Punkte der Lichtlinie entspricht nun ein besonderes Ringsystem, welches aber nur da in die Erscheinung treten kann, wo es die zugehörigen horizontalen Streifen gebeugten Lichtes schneidet. Der dem Gangunterschied δ entsprechende Ring, welcher von dem Mittelpunkte der Lichtlinie herrührt, trifft nun (nach Gl. II. S. 93) die durch die Mitte des Gesichtsfeldes gehende Horizontale in dem Winkelabstande[1])

$$\varphi = \sqrt{\frac{\mu \delta}{d}}.$$

Für einen Punkt der Lichtlinie, welcher um die kleine

1) Wegen der Kleinheit der in Betracht kommenden Winkel kann nämlich in der erwähnten Gleichung des Sinus durch den Bogen ersetzt werden.

Winkeldistanz i oberhalb oder unterhalb ihres Mittelpunkts liegt, hat der Ring vom Gangunterschied δ den Radius

$$\varphi' = \sqrt{i_2 + \frac{\mu\delta}{d}}$$

und trifft daher die durch den Punkt i des Gesichtsfeldes gehende Horizontale in einem Punkte, welcher um

$$\sqrt{\varphi'^2 - i^2},$$

also ebenfalls um

$$\sqrt{\frac{\mu\delta}{d}}$$

von dem Punkte i entfernt ist. Man sieht daraus, daſs alle Punkte des Gesichtsfeldes mit gleichem Gangunterschied der elementaren Strahlenpaare in gerade Linien geordnet sind, welche mit dem Bilde der Lichtlinie und mit den Spalträndern parallel laufen. Was von *einem* beugenden Spalte gilt, gilt natürlich auch für eine beliebige Gruppe paralleler Spalte.

Wir können daher bei der Entwickelung der Theorie der vorhin beschriebenen Erscheinung unsere Betrachtung auf eine zu den Gitterstrichen senkrechte Ebene beschränken, welche zugleich die Einfallsebene ist.

In einer solchen Ebene sey AN (Fig. 5, Taf. 1) die Spur der Gitterebene, und die damit parallele Gerade PM die Spur der Spiegelebene; den Zwischenraum zwischen Gitter und Spiegel denken wir uns der Allgemeinheit wegen mit einer brechenden Substanz vom Index μ ausgefüllt. Der unter dem Einfallswinkel $SAL = \varphi$ auf den Punkt A des Gitters fallende Strahl SA wird daselbst gebeugt; der gebeugte Elementarstrahl AM, welcher mit der Normale AL den Winkel ψ bildet, wird in M nach MN zurückgeworfen und tritt in N unter dem Winkel ψ nach NQ wieder aus, so daſs

$$\sin\psi = \mu \sin\psi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist. Ein zweiter mit SA parallel einfallender Strahl TB falle auf das Gitter in einem Punkte B, der so gelegen ist, daſs der in B unter dem Winkel φ' gebrochene Strahl

nachdem er in P reflectirt worden, ebenfalls auf den Punkt A treffe; vermöge des Brechungsgesetzes besteht zwischen den Winkeln φ und φ' die Beziehung

$$\sin\varphi = \mu \sin\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Beim Austritt in A wird auch dieser zweite Strahl gebeugt, und unter den von A ausgehenden Elementarstrahlen wird einer (AR) seyn, welcher mit NQ parallel ist. Die beiden Strahlen $SAMNQ$ und $TBPAR$ bilden nun das dem Punkte A zugeordnete elementare Strahlenpaar, dessen Gangunterschied zunächst zu ermitteln ist.

Wir betrachten die Spur AN der Gitterebene als Abscissenaxe, wählen einen beliebigen Punkt O derselben zum Coordinatenanfang und bezeichnen die Entfernung OB mit x. Von O aus wird die Gerade $OT'S'$ senkrecht zum eintretenden Strahlenpaar SA und TB, und die Gerade $OR'Q'$ senkrecht zum austretenden Strahlenpaar NQ und AR gezogen; diese Senkrechten sind die Spuren der zu den einfallenden und zu den austretenden gebeugten Strahlen gehörigen Wellenebenen. Der Strahl SA hat von der ersten bis zur zweiten Wellenebene den Weg

$$S'A + \mu\,(AM + MN) - NQ',$$

oder, weil $MN = AM$ ist, den Weg

$$S'A + 2\mu\,.\,AM - NQ'$$

zurückzulegen, während der Strahl TB zwischen denselben beiden Ebenen die Strecke

$$T'B + 2\mu\,.\,BP - AR'$$

zu durchlaufen hat. Nun ist aber

$$S'A = x\sin\varphi \qquad T'B = (x - 2d\,\mathrm{tg}\,\varphi')\sin\varphi$$

$$AM = \frac{d}{\cos\varphi'} \qquad BP = \frac{d}{\cos\varphi'}$$

$$NQ' = (x + 2d\,\mathrm{tg}\,\psi')\sin\psi \qquad AR' = x\sin\psi;$$

für obige Weglängen ergeben sich demnach folgende Ausdrücke

$$\frac{2\mu d}{\cos\psi'} - 2d\,\mathrm{tg}\,\psi'\sin\psi - x(\sin\psi - \sin\varphi)$$

und

$$\frac{2\mu d}{\cos\varphi'} - 2d\operatorname{tg}\varphi'\sin\varphi - x(\sin\psi - \sin\varphi)$$

oder mit Rücksicht auf die Relationen (1) und (2):

$$2\mu d\cos\psi' - x(\sin\psi - \sin\varphi)$$

und

$$2\mu d\cos\varphi' - x(\sin\psi - \sin\varphi).$$

Wenn wir annehmen, daſs die in der Wellenebene OTS' vor sich gehende schwingende Bewegung die Phase $\frac{2\pi}{\lambda}vt$ besitze (wo t die Zeit, λ die Wellenlänge und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts bezeichnet), und daſs der Längeneinheit der Wellenspur OTS' die Amplitude 1 entspreche, so sind die Bewegungszustände der beiden Strahlen, welche vor und nach der Reflexion in dem bei A gelegenen Elemente dx des Gitters gebeugt werden, gegeben durch die beiden Ausdrücke

$$Q)\ \cos\varphi . dx . \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - 2\mu d\cos\psi' + x(\sin\psi - \sin\varphi))$$

und $$R)\ \cos\varphi . dx . \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - 2\mu d\cos\varphi' + x(\sin\psi - \sin\varphi)).$$

Die Resultante sämmtlicher von *einer* Oeffnung des Gitters ausgehender Bewegungen erhalten wir, indem wir jeden dieser beiden Ausdrücke über sämmtliche wirksame Elemente dx der Oeffnung integriren und die beiden Integrale addiren. Daſs im Allgemeinen nicht sämmtliche Elemente der Oeffnung wirksam sind, ist leicht einzusehen; das aus den Strahlen Q zusammengesetzte Lichtbündel z. B. wird nur dann bei seinem Austritt auf eine volle Oeffnung des Gitters treffen und unversehrt austreten, wenn $2d\operatorname{tg}\psi' = ne$ ist, unter e die Gesammtbreite von Oeffnung und dunklem Zwischenraum, und unter n Null oder eine beliebige ganze Zahl verstanden. Bei jeder anderen Neigung wird dem Strahlenbündel ein dunkler Gitterstab ganz oder theilweise in den Weg treten und einen entsprechenden Theil des Bündels am Austritt verhindern und dadurch unwirksam machen. Ebenso wird das Bündel der Strahlen

R nur dann ungeschmälert zur Wirkung kommen, wenn $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi' = me$ ist, wo m wiederum eine beliebige ganze Zahl vorstellt. Denn für jeden anderen Winkel φ' wird ein Theil des einfallenden Bündels durch einen Gitterstab aufgefangen.

Nehmen wir nun an, daſs der Coordinatenanfang O in der Mitte einer Oeffnung liege, bezeichnen wir die Breite einer Oeffnung mit b, bezeichnen wir ferner die Integrationsgrenzen, welche den unwirksamen Theilen der Strahlenbündel entsprechen, für die Strahlen Q mit α und β, für die Strahlen R mit α' und β', mit dem Vorbehalte, die Beschaffenheit dieser Grenzen späterhin festzustellen, so ergiebt sich die Resultante der durch *eine* Oeffnung gebeugten Strahlen in folgender Gestalt:

$$N = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\varphi\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}\sin(p-\omega+sx)\,dx - \cos\varphi\int_{\alpha}^{\beta}\sin(p-\omega+sx)\,dx$$
$$+\cos\varphi\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}\sin(p-\chi+sx)\,dx - \cos\varphi\int_{\alpha'}^{\beta'}\sin(p-\chi+sx)\,dx\Big)$$ [1]

wo der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{\lambda}\,vt = p$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\,2\mu d\cos\psi' = \omega$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}\,2\mu d\cos\varphi' = \chi$$

und

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\psi - \sin\varphi) = s$$

gesetzt wurde. Die unter der Voraussetzung, daſs s nicht Null ist, durchgeführte Integration liefert, nachdem die auftretenden Cosinusdifferenzen in Sinusproducte umgewandelt sind:

1) Der Factor $\frac{1}{2}$ muſs hinzugefügt werden, damit nicht jeder einfallende Strahl doppelt gezählt werde.

$$N = \frac{\cos\varphi}{s}\Big\{\sin\tfrac{1}{2}bs\sin(p-\omega)+\sin\tfrac{1}{2}bs\sin(p-\chi)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s\,.\,\sin(p-\omega+\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s\,.\,\sin(p-\chi+\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s)\Big\}.$$

Man bringt diesen Ausdruck in bekannter Weise auf die Form $M\sin(p-u)$, indem man durch Auflösen der p enthaltenden Sinus $\sin p$ und $\cos p$ absondert, und dann

$$M\cos u = \frac{\cos\varphi}{s}\Big[\sin\tfrac{1}{2}bs(\cos\omega+\cos\chi)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s\,.\,\cos(\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s-\omega)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s\,.\,\cos(\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s-\chi)\Big]$$

und

$$M\sin u = \frac{\cos\varphi}{s}\Big[\sin\tfrac{1}{2}bs(\sin\omega+\sin\chi)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s-\omega)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s\,.\,\sin(\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s-\chi)\Big]$$

setzt. Durch Quadriren und Addiren dieser beiden Ausdrücke erhält man:

$$M^2 = \frac{\cos^2\varphi}{s^2}\Big\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s+\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s$$
$$+4\sin^2\tfrac{1}{2}bs\cos^2\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)$$
$$+2\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s\,.\cos(\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s-(\chi-\omega))$$
$$-4\sin\tfrac{1}{2}bs\,.\cos\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)\,[\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s\,.\cos(\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s+\tfrac{1}{2}(\chi-\omega))$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s\,.\,\cos(\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s-\tfrac{1}{2}(\chi-\omega))]\Big\}.$$

Jeder Oeffnung des Gitters entspricht nun ein solcher resultirender Strahl von der Form $M\sin(p-u)$, welcher gegenüber demjenigen der vorhergehenden Oeffnung den Phasenunterschied

$$\frac{2\pi}{\lambda}e(\sin\psi-\sin\varphi) = es$$

besitzt. Um die Gesammtresultante sämmtlicher Strahlenbündel zu erhalten, hat man daher, wenn q die Anzahl der Gitteröffnungen ist, die Summe

$$M(\sin(p-u)+\sin(p-u-es)+\sin(p-u-2es)$$
$$+\ldots+\sin(p-u-(q-1)es))$$
$$= M\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}qes}{\sin\frac{1}{2}es}\,.\,\sin(p-u-\tfrac{1}{2}(q-1)es)$$

zu bilden. Der Intensitätsausdruck für die Gesammterscheinung ergiebt sich daraus in folgender Gestalt:

$$J^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} q e s}{q \sin \frac{1}{2} e s}\right)^2 (q M)^2.$$

Der erste Factor dieses Ausdrucks wird der Einheit gleich so oft

$$e s = 2 i \pi$$

oder

$$\sin \psi - \sin \varphi = \frac{i \lambda}{e}$$

ist, wo i eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und kann, wenn die Anzahl q der Oeffnungen sehr grofs ist, für jeden andern Werth von s oder ψ als verschwindend klein betrachtet werden. Eliminirt man daher mittelst der vorstehenden Relation den Winkel ψ aus dem Ausdruck

$$J^2 = q^2 M^2,$$

so verwandelt sich derselbe in eine Function von λ und φ, welche für jeden Einfallswinkel φ die Intensitätsvertheilung innerhalb des i ten Gitterspectrums darstellt.

Wir können jedoch zur nähern Betrachtung des Ausdruckes M^2 nicht eher übergehen, als bis wir die Grenzen α und β, α' und β' in ihrer Abhängigkeit von ψ und φ genauer kennen gelernt haben. Wir wissen bereits, dafs das Bündel der Strahlen Q ungeschmälert durch eine Oeffnung des Gitters austritt, wenn $2 d \operatorname{tg} \psi' = n e$ ist; alsdann hat man $\beta - \alpha = 0$. Wächst nun der Winkel ψ', so schiebt sich ein Gitterstab vom einen Rande des Bündels her allmählig in dasselbe ein, und verdeckt davon zunächst einen der Differenz

$$\beta - \alpha = 2 d \operatorname{tg} \psi' - n e$$

entsprechenden Theil; dabei behält, so lange der Gitterstab noch nicht völlig in das Bündel eingetreten ist, die obere Grenze β den constanten Werth

$$\beta = \tfrac{1}{2} b,$$

oder wenn wir von nun an die Breite eines Gitterstabes mit $\varkappa e$ bezeichnen, und dabei annehmen, dafs dieselbe ge-

ringer sey als die Breite einer Oeffnung, d. h. daſs $x < \frac{1}{2}$ sey:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(1 - x)e.$$

Dieser Werth hört jedoch als obere Grenze zu gelten auf, sobald der Gitterstab vollständig in das Bündel eingetreten ist, d. h. sobald $\beta - \alpha = xe$ oder $2d \operatorname{tg} \psi' - ne = xe$ geworden ist.

So lange also $2d \operatorname{tg} \psi'$ zwischen ne und $ne + xe$ liegt, haben wir

a) $\beta - \alpha = 2d \operatorname{tg} \psi' - ne$ und $\beta + \alpha = (n+1)e - xe - 2d \operatorname{tg} \psi'$.

Indem von nun an der Gitterstab frei das Bündel durchwandert, behält $\beta - \alpha$ den constanten Werth

$$\beta - \alpha = xe,$$

bis der Gitterstab mit seinem voranschreitenden Rande an den zweiten Rand des Strahlenbündels stöſst, d. h. bis $2d \operatorname{tg} \psi' = (n + 1)e - xe$ geworden ist; unterdessen hat man

$$\alpha = ne - 2d \operatorname{tg} \psi' + \tfrac{1}{2}(1 - x)e$$

und

$$\beta = ne - 2d \operatorname{tg} \psi' + \tfrac{1}{2}(1 + x)e,$$

und es gelten demnach, so lange $2d \operatorname{tg} \psi'$ zwischen $ne + xe$ und $(n + 1)e - xe$ liegt, die Beziehungen

b) $\beta - \alpha = xe$ und $\beta + \alpha = (2n + 1)e - 4d \operatorname{tg} \psi'$.

Von nun an beginnt der Gitterstab das Strahlenbündel zu verlassen, und ragt nur noch mit einem Theile $\beta - \alpha = (n + 1)e - 2d \operatorname{tg} \psi'$ in dasselbe hinein; alsdann behält die untere Grenze α den constanten Werth $\alpha = -\tfrac{1}{2}(1 - x)e$, bis $2d \operatorname{tg} \psi' = (n + 1)e$ und damit wieder $\beta - \alpha = 0$ geworden ist. Man hat daher

c) $\beta - \alpha = (n+1)e - 2d \operatorname{tg} \psi'$ und $\beta + \alpha = ne + xe - 2d \operatorname{tg} \psi'$,

wenn $2d \operatorname{tg} \psi'$ zwischen $(n + 1)e - xe$ und $(n + 1)e$ liegt. Bei weiterem Wachsen des Winkels ψ' durchlaufen die Werthe der Grenzen α und β immer wieder von Neuem denselben dreigliedrigen Cyclus.

Was die Grenzen α' und β' betrifft, so gelangen wir durch dieselbe Reihe von Betrachtungen zu ähnlichen Resultaten; wir finden nämlich

$A)$ $\beta'-\alpha'=2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'-me$ und $\beta'+\alpha'=2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'-(m+1)e+\varkappa e$
von $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=me$ bis $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=me+\varkappa e$;

$B)$ $\beta'-\alpha'=\varkappa e$ und $\beta'+\alpha'=4d\,\mathrm{tg}\,\varphi'-(2m+1)e$
von $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=me+\varkappa e$ bis $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=(m+1)e-\varkappa e$;

$C)$ $\beta'-\alpha'=(m+1)e-2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'$ und $\beta'+\alpha'=2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'-me-\varkappa e$
von $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=(m+1)e-\varkappa e$ bis $2d\,\mathrm{tg}\,\varphi'=(m+1)e$.

Anstatt die Funktion M^2 unmittelbar durch λ und φ auszudrücken, führen wir zwei neue Veränderliche ξ und η ein durch die Gleichungen

$$\pi\frac{di}{e}(\mathrm{tg}\,\psi'-\mathrm{tg}\,\varphi')=\xi$$

$$\text{und } \pi\frac{di}{e}(\mathrm{tg}\,\psi'+\mathrm{tg}\,\varphi')=\eta,$$

und nehmen zugleich an, daſs die Winkel ψ' und φ' stets so klein bleiben, daſs ihre Tangenten mit den Sinus vertauscht werden können; dann ist auch

$$\pi\frac{di}{e}(\sin\psi'-\sin\varphi')=\xi \text{ oder } \pi\frac{di}{\mu e}(\sin\psi-\sin\varphi)=\xi$$

$$\text{und } \pi\frac{di}{e}(\sin\psi'+\sin\varphi')=\eta \text{ oder } \pi\frac{di}{\mu e}(\sin\psi+\sin\varphi)=\eta.$$

Wir drücken nun zunächst den in M^2 vorkommenden Bogen $\frac{1}{2}(\chi-\omega)$ durch die neuen Veränderlichen aus; es ist aber

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)&=\frac{\pi}{\lambda}\,2\mu d(\cos\varphi'-\cos\psi')\\&=\frac{\pi}{\lambda}\,4\mu d(\sin^2\tfrac{1}{2}\psi'-\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi')\\&=\frac{\pi}{\lambda}\,4\mu d(\sin\tfrac{1}{2}\psi'-\sin\tfrac{1}{2}\varphi')(\sin\tfrac{1}{2}\psi'+\sin\tfrac{1}{2}\varphi').\end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Winkel ψ' und φ' kann $\frac{1}{2}\sin\psi'$ statt $\sin\frac{1}{2}\psi'$ und $\frac{1}{2}\sin\varphi'$ statt $\sin\frac{1}{2}\varphi'$ gesetzt werden; man erhält daher

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)&=\frac{\pi}{\lambda}\,\mu d(\sin\psi'-\sin\varphi')(\sin\psi'+\sin\varphi')\\&=\frac{\pi}{\lambda}\,d(\sin\psi-\sin\varphi)(\sin\psi'+\sin\varphi');\end{aligned}$$

da nun für das Gitter

$$\sin\psi-\sin\varphi=\frac{i\lambda}{e}$$

ist, so hat man

$$\tfrac{1}{2}(\chi - \omega) = \pi \frac{di}{e}(\sin\psi' + \sin\varphi') = \eta.$$

Da ferner

$$2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg}\psi' = \eta + \xi$$

$$\text{und}\quad 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg}\varphi' = \eta - \xi,$$

und $\tfrac{1}{2}s = \frac{\pi}{\lambda}(\sin\psi - \sin\varphi) = \frac{i\pi}{e}$ ist, so erhalten wir für die in M^2 vorkommenden Ausdrücke $\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)s$ und $\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)s$, je nach der Beschaffenheit der Integrationsgrenzen, folgende zwei Gruppen von Werthen:

a) $\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s = \eta+\xi-ni\pi \quad \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s = (n+1)i\pi - \varkappa i\pi - (\eta+\xi)$
von $\eta+\xi = ni\pi$ bis $\eta+\xi = ni\pi + \varkappa i\pi$;

b) $\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s = \varkappa i\pi \quad \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s = (2n+1)i\pi - 2(\eta+\xi)$
von $\eta+\xi = ni\pi + \varkappa i\pi$ bis $\eta+\xi = (n+1)i\pi - \varkappa i\pi$;

c) $\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s = (n+1)i\pi - (\eta+\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s = ni\pi + \varkappa i\pi - (\eta+\xi)$
von $\eta+\xi = (n+1)i\pi - \varkappa i\pi$ bis $\eta+\xi = (n+1)i\pi$;

A) $\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s = \eta-\xi-mi\pi \quad \tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s = \eta-\xi-(m+1)i\pi + \varkappa i\pi$
von $\eta+\xi = mi\pi$ bis $\eta-\xi = mi\pi + \varkappa i\pi$;

B) $\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s = \varkappa i\pi \quad \tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s = 2(\eta-\xi) - (2m+1)i\pi$
von $\eta-\xi = mi\pi + \varkappa i\pi$ bis $\eta-\xi = (m+1)i\pi - \varkappa i\pi$;

C) $\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha') = (m+1)i\pi - (\eta-\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s = \eta-\xi-mi\pi-\varkappa i\pi$
von $\eta-\xi = (m+1)i\pi - \varkappa i\pi$ bis $\eta-\xi = (m+1)i\pi$.

Indem sich jedes Werthpaar der ersten Gruppe mit jedem der zweiten combinirt, ergeben sich für M^2 neun verschiedene Ausdrücke, deren jedem sein eigenes Geltungsgebiet zukommt. Diese Ausdrüche sollen nun der Reihe nach ermittelt werden.

Aa. In diesem Falle hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s = \sin(\eta+\xi-ni\pi) = (-1)^{ni}\sin(\eta+\xi)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s = \sin(\eta-\xi-mi\pi) = (-1)^{mi}\sin(\eta-\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s + \tfrac{1}{2}(\chi-\omega)] = (-1)^{ni+i}\cos(\varkappa i\pi+\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s - \tfrac{1}{2}(\chi-\omega)] = (-1)^{mi+i}\cos(\varkappa i\pi-\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s - (\chi-\omega)] = (-1)^{mi+ni}\cos 2\varkappa i\pi,$$

während stets

$$\sin\tfrac{1}{2}bs = \sin(i\pi - \varkappa i\pi) = (-1)^{i+1}\sin\varkappa i\pi$$

ist. Setzt man diese Werthe in die obige Formel für M^2 ein, so gewinnt der eingeklammerte Ausdruck zunächst folgende Gestalt:

$$\sin^2(\eta+\xi)+\sin^2(\eta-\xi)+4\sin^2 x i\pi \cos^2\eta$$
$$+2\sin(\eta+\xi)\sin(\eta-\xi)\cos 2xi\pi$$
$$+4\sin xi\pi \cos\eta[\sin(\eta+\xi)\cos(xi\pi+\xi)+\sin(\eta-\xi)\cos(xi\pi-\xi)].$$

Durch schrittweise Umformung wird daraus

$$\sin^2(\eta+\xi)+\sin^2(\eta-\xi)+2\sin(\eta+\xi)\sin(\eta-\xi)$$
$$+4\sin^2 xi\pi[\cos^2\eta-\sin^2\eta\cos^2\xi+\cos^2\eta\sin^2\xi]$$
$$+4\sin xi\pi\cos\eta[2\cos xi\pi\cos^2\xi\sin\eta-2\sin xi\pi\sin^2\xi\cos\eta]$$
$$=4\sin^2\eta\cos^2\xi+4\sin^2 xi\pi[\cos^2\eta\cos^2\xi-\sin^2\eta\cos^2\xi]$$
$$+8\sin xi\pi\cos xi\pi\sin\eta\cos\eta\cos^2\xi$$
$$=4\cos^2\xi[\sin^2\eta+\sin^2 xi\pi\cos^2\eta-\sin^2 xi\pi\sin^2\eta+2\sin xi\pi \cos xi\pi\sin\eta\cos\eta]$$
$$=4\cos^2\xi[\sin^2 xi\pi\cos^2\eta+\cos^2 xi\pi\sin^2\eta+2\sin xi\pi\cos xi\pi \sin\eta\cos\eta]$$
$$=4\cos^2\xi\sin^2(xi\pi+\eta).$$

Man hat demnach gefunden:

$$Aa)\qquad M^2=\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi\,.\,4\cos^2\xi\sin^2(xi\pi+\eta).$$

Ab. Diejenigen Bestandtheile von M^2, welche nur α' und β' enthalten, bleiben jetzt unverändert dieselben wie vorhin. Dagegen hat man im gegenwärtigen Falle zu setzen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s=\sin xi\pi$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s+\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)]=(-1)^i\cos(\eta+2\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s-(\chi-\omega)]=(-1)^{m-i}\cos(xi\pi+\eta+\xi).$$

Der eingeklammerte Ausdruck stellt sich alsdann in folgender Form dar:

$$\sin^2 xi\pi+\sin^2(\eta-\xi)+4\sin^2 xi\pi\cos^2\eta$$
$$+2\sin xi\pi\sin(\eta-\xi)\cos(xi\pi+\eta+\xi)$$
$$+4\sin^2 xi\pi\cos\eta\cos(\eta+2\xi)$$
$$+4\sin xi\pi\cos\eta\sin(\eta-\xi)\cos(xi\pi-\xi).$$

Um diesem Ausdruck eine übersichtlichere Gestalt zu geben, fassen wir zunächst diejenigen Glieder zusammen, welche mit dem Factor $\sin^2 xi\pi$ behaftet sind, und erhalten nach und nach

$$\sin^2 x i\pi [1+4\cos^2\eta+4\cos\eta\cos(\eta+2\xi)]$$
$$=\sin^2 x i\pi [1+8\cos\eta\cos\xi\cos(\eta+\xi)]$$
$$=\sin^2 x i\pi [1+4\cos(\eta+\xi)\cos(\eta-\xi)+4\cos^2(\eta+\xi)]$$
$$=\sin^2 x i\pi [\sin^2(\eta-\xi)+\cos^2(\eta-\xi)$$
$$+4\cos(\eta+\xi)\cos(\eta-\xi)+4\cos^2(\eta+\xi)]$$
$$=\sin^2 x i\pi [\sin^2(\eta-\xi)+(\cos(\eta-\xi)+2\cos(\eta+\xi))^2].$$

Die übrigen Glieder zusammengenommen geben

$$\sin^2(\eta-\xi)+2\sin x i\pi \sin(\eta-\xi)\,[\cos(x i\pi+\eta+\xi)+2\cos\eta \cos(x i\pi-\xi)]$$
$$=\sin^2(\eta-\xi)$$
$$+2\sin x i\pi \sin(\eta-\xi)[\cos(x i\pi+\eta+\xi)+\cos(x i\pi-\eta-\xi) + \cos(x i\pi+\eta-\xi)]$$
$$=\sin^2(\eta-\xi)$$
$$+2\sin x i\pi \sin(\eta-\xi)\,[2\cos x i\pi \cos(\eta+\xi)+\cos x i\pi \cos(\eta-\xi)-\sin x i\pi \sin(\eta-\xi)]$$
$$=\sin^2(\eta-\xi)-2\sin^2 x i\pi \sin^2(\eta-\xi)+2\sin x i\pi \cos x i\pi \sin(\eta-\xi)\,[\cos(\eta-\xi)+2\cos(\eta+\xi)].$$

Faſst man nun diesen Ausdruck mit dem obigen zusammen, so ergiebt sich

$$\cos^2 x i\pi \sin^2(\eta-\xi)+\sin^2 x i\pi [\cos(\eta-\xi)+2\cos(\eta+\xi)]^2$$
$$+2\sin x i\pi \cos x i\pi \sin(\eta-\xi)\,[\cos(\eta-\xi) +2\cos(\eta+\xi)]$$
$$=[\cos x i\pi \sin(\eta-\xi)+\sin x i\pi(\cos(\eta-\xi)+2\cos(\eta+\xi))]^2$$
$$=[2\sin x i\pi \cos(\eta+\xi)+\sin(x i\pi+\eta-\xi)]^2.$$

In diesem zweiten Falle stellt sich also M^2 unter folgender Form dar:

$$Ab)\qquad M^2=\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi\,(2\sin x i\pi \cos(\eta+\xi) + \sin(x i\pi+\eta-\xi))^2.$$

Ac. Während wiederum die nur α' und β' enthaltenden Theile von M^2 ungeändert bleiben, hat man auſserdem

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s=(-1)^{ni+i+1}\sin(\eta+\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s+\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)]=(-1)^{ni}\cos(x i\pi-\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s-(\chi-\omega)]=\cos(m+n+1)i\pi$$
$$=(-1)^{mi+ni+i}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\sin^2(\eta+\xi)+\sin^2(\eta-\xi)+4\sin^2 \varkappa i\pi \cos^2\eta - 2\sin(\eta+\xi)\sin(\eta-\xi)$$
$$-4\sin\varkappa i\pi\cos\eta\cos(\varkappa i\pi-\xi)[\sin(\eta+\xi)-\sin(\eta-\xi)]$$
$$=4\cos^2\eta[\sin^2\varkappa i\pi+\sin^2\xi-2\sin\varkappa i\pi\sin\xi\cos(\varkappa i\pi-\xi)]$$
$$=4\cos^2\eta[\sin^2\varkappa i\pi+\sin^2\xi-2\sin^2\varkappa i\pi\sin^2\xi - 2\sin\varkappa i\pi\cos\varkappa i\pi\sin\xi\cos\xi]$$
$$=4\cos^2\eta[\sin^2\varkappa i\pi\cos^2\xi+\cos^2\varkappa i\pi\sin^2\xi - 2\sin\varkappa i\pi\cos\varkappa i\pi\sin\xi\cos\xi]$$
$$=4\cos^2\eta\sin^2(\varkappa i\pi-\xi).$$

Wir haben also für die gegenwärtige Combination:

$$Ac)\qquad M^2=\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi\,.\,4\cos^2\eta\sin^2(\varkappa i\pi-\xi).$$

Ba. In diesem Falle ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s=(-1)^{n'}\sin(\eta+\xi)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')s=\sin\varkappa i\pi$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s+\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)]=(-1)^{n'+i}\cos(\varkappa i\pi+\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha')s-\tfrac{1}{2}(\chi-\omega)]=(-1)^i\cos(\eta-2\xi)$$
$$\cos[\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s-(\chi-\omega)]=(-1)^{n'}\cos(\varkappa i\pi+\eta-\xi).$$

Der Ausdruck, welcher durch Substitution dieser Werthe hervorgeht, unterscheidet sich von dem für (Ab) erhaltenen nur durch das Vorzeichen von ξ; man hat daher sofort:

$$Ba)\quad M^2=\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi\ (2\sin\varkappa i\pi\cos(\eta-\xi)+\sin(\varkappa i\pi+\eta+\xi))^2.$$

Bb. Während die nur von α' und β' abhängigen Theile ihre vorigen Werthe beibehalten, wird jetzt

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)s=\sin\varkappa i\pi$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)s+\tfrac{1}{2}(\chi-\omega))=(-1)^i\cos(\eta+2\xi)$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta'+\alpha'-\beta-\alpha)s-(\chi-\omega))=\cos 2\eta,$$

so daſs der eingeklammerte Ausdruck sich folgendermaſsen gestaltet:

$$2\sin^2\varkappa i\pi+4\sin^2\varkappa i\pi\cos^2\eta+2\sin^2\varkappa i\pi\cos 2\eta$$
$$+4\sin^2\varkappa i\pi\cos\eta(\cos(\eta+2\xi)+\cos(\eta-2\xi))$$
$$=8\sin^2\varkappa i\pi\cos^2\eta(1+\cos 2\xi)=16\sin^2\varkappa i\pi\cos^2\xi\cos^2\eta.$$

Demnach ist in diesem Falle

$$Bb)\quad M^2=\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi\,.\,16\sin^2\varkappa i\pi\,.\,\cos^2\xi\cos^2\eta.$$

Bc. Dieser Fall, in welchem

$$\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)s = (-1)^{ni+i+1} \sin(\eta + \xi)$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)s + \tfrac{1}{2}(\chi - \omega)) = (-1)^{ni} \cos(\varkappa i \pi - \xi)$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta' + \alpha' - \beta - \alpha)s - (\chi - \omega))$$
$$= (-1)^{ni+i} \cos(\varkappa i \pi - (\eta - \xi))$$

zu setzen ist, führt zu einem Ausdruck, welcher von dem oben für (*Ab*) abgeleiteten nur durch das Vorzeichen von η verschieden ist. Man findet daher ohne weiteres:

$$Bc) \quad M^2 = \left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2 \cos^2 \varphi \, (2 \sin \varkappa i \pi \cos(\eta - \xi)$$
$$+ \sin(\varkappa i \pi - \eta - \xi))^2.$$

Ca. In diesem sowie in den folgenden zwei Fällen hat man

$$\sin \tfrac{1}{2}(\beta' - \alpha')s = (-1)^{mi+i+1} \sin(\eta - \xi)$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta' + \alpha')s - \tfrac{1}{2}(\chi - \omega)) = (-1)^{mi} \cos(\varkappa i \pi + \xi),$$

während $\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)s$ und $\cos(\frac{1}{2}(\beta + \alpha)s + \frac{1}{2}(\chi - \omega))$ Werthe annehmen, welche unter den Fällen *A* und *B* bereits verzeichnet stehen. Da sich ferner jetzt

$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta' + \alpha' - \beta - \alpha)s - (\chi - \omega)) = (-1)^{mi+ni+i}$$

ergiebt, so gelangt man zu einem Ausdruck, welcher sich von dem oben für (*Ac*) gefundenen nur durch das Vorzeichen von ξ unterscheidet. Es ist demnach

$$Ca) \quad M^2 = \left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2 \cos^2 \varphi \, . \, 4 \cos^2 \eta \sin^2(\varkappa i \pi + \xi).$$

Cb. Dieser Fall, in welchem

$$\cos(\tfrac{1}{2}(\beta' + \alpha' - \beta - \alpha)s - (\chi - \omega))$$
$$= (-1)^{mi+i} \cos(\varkappa i \pi - \eta - \xi)$$

zu nehmen ist, differirt von dem Falle (*Bc*) nur durch das Zeichen von ξ, und liefert daher

$$Cb) \quad M^2 = \left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2 \cos^2 \varphi \, . \, (2 \sin \varkappa i \pi \cos(\eta + \xi)$$
$$+ \sin(\varkappa i \pi - (\eta - \xi)))^2.$$

Cc. Ebenso besteht zwischen (*Cc*) und (*Aa*) keine andere Verschiedenheit als diejenige der Vorzeichen von η, so dafs ohne weiteres

$$Cc) \quad M^2 = \left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2 \cos^2\varphi \,.\, 4\cos^2\xi \sin^2(xi\pi - \eta)$$

gefunden wird. —

Um diese neun Ausdrücke zu discutiren, betrachten wir ξ und η als rechtwinklige Coordinaten. Alsdann ist

$$\eta - \xi = K$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche mit der positiven ξ-Axe einen Winkel von 45° bildet, und

$$\eta + \xi = K'$$

stellt ein Gerade vor, welche zu der vorigen senkrecht steht, also mit der positiven ξ-Axe einen Winkel von 135° einschliefst. Wir ziehen nun, für das Gitterspectrum von der Ordnungszahl i, alle Geraden, welche den Gleichungen

$$\eta - \xi = mi\pi \text{ und } \eta - \xi = mi\pi \pm xi\pi,$$
$$\eta + \xi = ni\pi \text{ und } \eta + \xi = ni\pi \pm xi\pi$$

entsprechen; durch diese zwei Systeme zu einander senkrechter Geraden wird die $\xi\eta$-Ebene in Quadrate und Rechtecke (vergl. Fig. 6) zerschnitten, welche die Geltungsgebiete jener Ausdrücke darstellen. Es gilt nämlich der Ausdruck (Aa) innerhalb aller Quadrate von der Seite $xi\pi$ ($x < \frac{1}{2}$ gedacht), welche von den Linien

$$Aa) \begin{cases} \eta - \xi = mi\pi, \; \eta - \xi = mi\pi + xi\pi \\ \eta + \xi = ni\pi, \; \eta + \xi = ni\pi + xi\pi \end{cases}$$

begrenzt werden. Das Gebiet des Ausdrucks (Ab) dagegen setzt sich aus Rechtecken zusammen, deren Seiten $= \pi i - 2xi\pi$ unter 45°, die Seiten $xi\pi$ unter 135° zur ξ-Axe geneigt sind, und von den Linien

$$Ab) \begin{cases} \eta - \xi = mi\pi, \; \eta - \xi = mi\pi + xi\pi \\ \eta + \xi = ni\pi + xi\pi, \; \eta + \xi = (n+1)i\pi - xi\pi \end{cases}$$

gebildet werden. Der Ausdruck (Ac) erstreckt sich über alle jene Quadrate von der Seite $xi\pi$, welche zwischen den Geraden

$$Ac) \begin{cases} \eta - \xi = mi\pi, \; \eta - \xi = mi\pi + xi\pi \\ \eta + \xi = (n+1)i\pi - xi\pi, \; \eta + \xi = (n+1)i\pi \end{cases}$$

liegen. Für (Ba) ergeben sich wieder Rechtecke, den vorigen congruent, deren Seiten $\varkappa i\pi$ jedoch einen Winkel von 45° mit der ξ-Axe bilden, enthalten zwischen den Linien

$$Ba) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = m i\pi + \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1)\, i\pi - \varkappa i\pi \\ \eta + \xi = n i\pi & , \eta + \xi = n i\pi + \varkappa i\pi. \end{array} \right.$$

Der Ausdruck (Bb) entspricht den Quadraten von der Seite $\pi i - 2\varkappa i\pi$, welche von den Geraden

$$Bb) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = m i\pi + \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1)\, i\pi - \varkappa i\pi \\ \eta + \xi = n i\pi + \varkappa i\pi\,, & \eta + \xi = (n+1)\, i\pi - \varkappa i\pi \end{array} \right.$$

begrenzt werden. Die Geltungsgebiete für die noch übrigen Ausdrücke sind entweder Quadrate von der Seite $\varkappa i\pi$, oder Rechtecke von der bereits erwähnten Art, deren Gestalt und Lage übrigens aus den folgenden Gleichungen ihrer Begrenzungslinien leicht zu entnehmen ist:

$$Bc) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = m i\pi + \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1)\, i\pi - \varkappa i\pi, \\ \eta + \xi = (n+1) i\pi - \varkappa i\pi, & \eta + \xi = (n+1) i\pi; \end{array} \right.$$

$$Ca) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = (m+1)\, i\pi - \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1)\, i\pi, \\ \eta + \xi = n i\pi & , \eta + \xi = n i\pi + \varkappa i\pi; \end{array} \right.$$

$$Cb) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = (m+1)\, i\pi - \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1)\, i\pi, \\ \eta + \xi = n i\pi + \varkappa i\pi, & \eta + \xi = (n+1)\, i\pi - \varkappa i\pi; \end{array} \right.$$

$$Cc) \left\{ \begin{array}{ll} \eta - \xi = (m+1) i\pi - \varkappa i\pi\,, & \eta - \xi = (m+1) i\pi, \\ \eta + \xi = (n+1)\, i\pi - \varkappa i\pi\,, & \eta + \xi = (n+1)\, i\pi. \end{array} \right.$$

Betrachten wir M^2 als Ordinate einer krummen Fläche, so ist jede Masche des soeben entworfenen Netzes von einem Flächenstück bedeckt, welches durch das zugehörige M^2 definirt wird. Man kann sich leicht überzeugen, dafs sämmtliche Flächenstücke an den Grenzen ihrer Gebiete mit gleichen Ordinaten zusammenstofsen, ohne jedoch daselbst stetig in einander überzugehen. Die Gesammtheit aller Ausdrücke M^2 stellt daher *eine* zusammenhängende Fläche dar, welche, aus einzelnen Stücken mosaikartig zusammengesetzt, die ganze $\xi\eta$-Ebene bedeckt; diese Fläche ist aber nicht stetig, sondern über den Geraden jenes Netzes geknickt.

Die vorliegende Aufgabe erheischt nun vor Allem, diejenigen Werthe von ξ und η aufzusuchen, für welche M^2 Null wird, oder, mit anderen Worten, diejenigen Punkte oder Linien zu ermitteln, in welchen die Fläche M^2 die $\xi\eta$-Ebene schneidet. Diese Untersuchung mufs für jedes Gitterspectrum, d. i. für jeden Werth von i, besonders geführt werden.

Wir wenden uns zunächst znr Betrachtung des ersten Spectrums, indem wir $i = 1$ setzen, und in der $\xi\eta$-Ebene das Netz der Linien (Fig. 6)

$$\eta - \xi = m\pi\,, \eta - \xi = m\pi \pm \varkappa\pi,$$
$$\eta + \xi = n\pi\ \ , \eta + \xi = n\pi \pm \varkappa\pi$$

entwerfen. Vor Allem fällt in die Augen, dafs $M^2 = o$ wird, sowohl wenn $\cos\xi$, als auch wenn $\cos\eta$ verschwindet, d. h. für

$$\xi = \frac{2m+1}{2}\pi$$

$$\text{und } \eta = \frac{2n+1}{2}\pi.$$

Wir haben demnach als Nulllinien zwei Systeme zu einander senkrechter Geraden, welche resp. der η- und der ξ-Axe parallel sind und in ununterbrochenem Zuge die ganze $\xi\eta$-Ebene durchlaufen. Die ersteren durchsetzen als Diagonalen diejenigen Quadrate (*Aa*), (*Cc*) und (*Bb*), deren Mittelpunkte die Abscissen $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$,... haben; die letzteren dagegen durchschneiden diejenigen Quadrate (*Ac*), (*Ca*) und (*Bb*), deren Mittelpunkte den Ordinaten $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$,... entsprechen.

Innerhalb der Quadrate (*Bb*) giebt es keine weiteren Nullwerthe mehr. Ebensowenig finden sich solche in den übrigen Quadraten, so lange $\varkappa < \frac{1}{4}$ ist. Denn in dem Ausdrucke für (*Aa*) z. B.

$$4\cos^2\xi\sin^2(\varkappa\pi + \eta)^{1})$$

1) Der Factor $\left(\frac{e}{2i\pi}\right)^2\cos^2\varphi$, welcher allen Formen von M^2 gemeinschaftlich ist, kann bei der Discussion natürlich unberücksichtigt bleiben.

kann alsdann die Summe $\varkappa\pi + \eta$, weil η zwischen die Grenzen $\frac{m+n}{2}\pi$ und $\frac{m+n}{2}\pi + \varkappa\pi$ eingeschränkt ist, nie gleich einer ganzen Anzahl von π werden. Sobald aber $\varkappa$ den Werth $\frac{1}{4}$ überschreitet, hat man noch innerhalb jedes Quadrates (Aa) als Nulllinie eine Gerade

$$\eta = m'\pi - \varkappa\pi,$$

und ebenso innerhalb (Cc) eine Gerade

$$\eta = m''\pi + \varkappa\pi;$$

ferner treten, wenn $\varkappa > \frac{1}{4}$ ist, innerhalb der Quadrate (Ac) und (Ca) resp. die Geraden

$$\xi = n'\pi + \varkappa\pi$$

$$\text{und } \xi = n''\pi - \varkappa\pi$$

als Nulllinien auf. Diese vier Geraden überschreiten die Grenzen der dazu gehörigen Quadrate nicht; sie finden sich nur in denjenigen Quadraten, welche auch von den vorhin besprochenen durchgehenden Liniensystemen durchschnitten werden; wenn $\varkappa$ den Werth $\frac{1}{3}$ erreicht, werden sie zu Diagonalen ihres Quadrates, und bilden dann selbst die Seiten eines Quadrates, welches den Punkt $\xi = \frac{2m+1}{2}\pi$, $\eta = \frac{2n+1}{2}\pi$ als Mittelpunkt umschliefst. Bei weiter wachsendem $\varkappa$ zieht sich das letztgenannte Quadrat immer mehr zusammen, und verschwindet zuletzt, wenn $\varkappa = \frac{1}{2}$ geworden ist, in seinem Mittelpunkt.

Es bleiben nun noch die Rechtecke (Ab) und (Cb), (Ba) und (Bc) zu untersuchen. Für das Rechteck (Ab), welches von den Geraden

$$\eta - \xi = 2m'\pi\,,\ \eta - \xi = 2m'\pi + \varkappa\pi$$

$$\eta + \xi = 2n'\pi + \varkappa\pi\,,\ \eta + \xi = (2n'+1)\pi - \varkappa\pi$$

begrenzt ist, stellt die Gleichung

$$2\sin\varkappa\pi\cos(\eta+\xi) + \sin(\varkappa\pi + \eta - \xi) = o$$

eine transcendente Curve dar, welche, falls $\varkappa < \frac{1}{4}$ ist, den Punkt

$$\eta - \xi = 2m'\pi,\ \eta + \xi = (2n'+1)\pi - \tfrac{1}{2}\pi$$

mit dem Eckpunkte

$$\eta - \xi = 2m'\pi + \varkappa\pi,\ \eta + \xi = (2n' + 1)\pi - \varkappa\pi$$

in stetigem Zuge verbindet. Wenn dagegen $\varkappa > \frac{1}{4}$ ist, so läuft die Curve von dem nämlichen Ausgangspunkt nach dem Punkte

$$\xi = (2n' - 2m')\pi + \varkappa\pi,\ \eta + \xi = (2n' + 1)\pi - \varkappa\pi,$$

und vereinigt sich dort mit der Geraden $\xi = (2n' - 2m')\pi + \varkappa\pi$, welche das angrenzende Quadrat (Ac) durchschneidet. Von $\varkappa = \frac{1}{3}$ bis $\varkappa = \frac{1}{2}$ ist die Curve gar nicht mehr vorhanden. Jedes Rechteck enthält ein ganz gleiches Curvenstück; die Curvenstücke je zweier Rechtecke, welche mit gemeinschaftlicher Basis aneinander grenzen, vereinigen sich in dem auf dieser Basis gelegenen gemeinsamen Ausgangspunkte

$$\eta - \xi = 2m'\pi,\ \eta + \xi = (2n' + 1)\pi - \tfrac{1}{2}\pi,$$

und bilden daselbst eine Spitze; die Curvenstücke zweier Rechtecke, welche mit einer Ecke

$$\eta - \xi = 2m'\pi + \varkappa\pi,\ \eta + \xi = (2n' + 1)\pi - \varkappa\pi$$

zusammenstofsen, vereinigen sich daselbst ebenfalls in einer Spitze; auf diese Weise setzen sich, wenn $\varkappa < \frac{1}{4}$ ist, je acht Curvenstücke zu einer geschlossenen Figur zusammen, einer Art Rosette, welche den Punkt

$$\xi = \frac{2n' - 2m' + 1}{2}\pi,\ \eta = \frac{2n' + 2m' + 1}{2}$$

als Mittelpunkt umgiebt. Wenn $\varkappa$ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ liegt, besteht der Umrifs der Rosette aus Curvenbögen und aus den geradlinigen Stücken, welche alsdann innerhalb der Quadrate (Aa), (Cc), (Ac), (Ca) als Nulllinien auftreten. Wird $\varkappa > \frac{1}{3}$, so verwandelt sich die Rosette in das von diesen geraden Nulllinien gebildete Quadrat.

Die Gesammtheit aller Nulllinien besteht demnach

1) aus zwei Systemen paralleler gerader Linien, welche sich rechtwinklig durchschneiden;

2) aus rosettenförmigen Figuren (resp. Quadraten), welche die Durchschnittspunkte jener Geraden als Mittelpunkte umschliefsen.

Als bemerkenswerthe Punkte der Fläche M^2 heben wir aufserdem noch hervor die Mittelpunkte der von den Linien (1) gebildeten Quadrate, nämlich die Punkte

$$\xi = m\pi, \quad \eta = n\pi;$$

in jedem dieser Punkte besitzt nämlich unsere Fläche, so lange $x < \frac{1}{3}$ ist, eine trichterartige Einsenkung, oder, mit anderen Worten, die Ordinate M^2 hat daselbst eine Art Minimum. In Fig. 6 sind die Stellen dieser Einsenkungen durch kleine Ringe angedeutet, und in Fig. 6a ist der Verlauf der Werthe von M^2 längs der Geraden $\eta - \xi = o$ von $\eta + \xi = \pi$ bis $\eta + \xi = 3\pi$ dargestellt.

Nachdem die Fläche M^2 für $i = 1$ über der $\xi\eta$-Ebene ausgebreitet ist, ist es leicht, die Intensitätsvertheilung innerhalb des ersten Gitterspectrums für jede Neigung der einfallenden Strahlen anzugeben.

Zunächst bemerken wir, dafs, weil

$$\xi = \pi \frac{di}{\mu e} (\sin\psi - \sin\varphi)$$

$$\text{und } \sin\psi - \sin\varphi = \frac{i\lambda}{e},$$

die Abscisse

$$\xi = \pi \frac{di^2}{\mu e^2} \lambda$$

nicht von dem Einfallswinkel φ, sondern nur von der Wellenlänge λ abhängig und zwar derselben proportinal ist.

Bezeichnen wir daher die Wellenlänge des äufsersten Violett mit λ_1, diejenige des äufsersten Roth mit λ_2, und ziehen wir (für das erste Spectrum) die Geraden

$$\xi_1 = \pm \pi \frac{d}{\mu e^2} \lambda_1,$$

$$\text{und } \xi_2 = \pm \pi \frac{d}{\mu e^2} \lambda_2$$

parallel zur η-Axe, so hat man sich zwischen diesen beiden Linienpaaren das erste Spectrum jederseits gleichsam auf die $\xi\eta$-Ebene gemalt zu denken, so dafs die Fraunhofer'schen Linien mit der η-Axe parallel laufen; die η-Axe selbst stellt alsdann das schmale Bild des linearen Spaltes vor.

Um nun zu erfahren, an welchen Stellen des Spectrums für den Einfallswinkel φ dunkle Streifen auftreten, ziehen wir die zur ξ-Axe unter 45° geneigte Gerade

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{d}{e} \operatorname{tg} \varphi',$$

deren Gleichung unter der Voraussetzung, dafs $\operatorname{tg} \varphi'$ mit $\sin \varphi'$ und $\operatorname{tg} \varphi$ mit $\sin \varphi$ vertauscht werden darf, auch in der Form

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{d}{\mu e} \operatorname{tg} \varphi$$

geschrieben werden kann, und sehen zu, an welchen Stellen der innerhalb des Spectrums jederseits enthaltene Theil dieser Geraden die Nulllinien schneidet. Jeder Schnittpunkt entspricht einem an der betreffenden Stelle des Spectrums vorhandenen dunklen Streifen. Man sieht, dafs die Anordnung der Streifen in den Spectren rechts und links im Allgemeinen unsymmetrisch ist, jedoch symmetrisch wird, sobald

$$\eta - \xi = m\pi$$

$$\text{oder } 2\,d \operatorname{tg} \varphi' = m e$$

wird, d. h. so oft das einfallende und dann am Spiegel reflectirte Strahlenbündel ungeschmälert aus dem Gitter austritt. Man kann sich von diesem Verhalten leicht durch den Versuch überzeugen; indem man von einer Stellung der Symmetrie, z. B. von der senkrechten Incidenz, welcher die durch den Coordinatenanfang gehende Gerade $\eta - \xi = o$ entspricht, ausgehend, das Spectrometertischchen ein wenig dreht, erreicht man bald eine Stellung, bei welcher die Vertheilung der Streifen in beiden Spectren wieder symmetrisch und zwar die nämliche ist wie in der Ausgangsstellung. Auch bei unsymmetrischer Stellung kehrt die nämliche Anordnung der Streifen wieder, wenn man $\eta - \xi$ um π, oder $2\,d \operatorname{tg} \varphi'$ um e sich ändern läfst.

Um alle Aenderungen zu übersehen, welche bei gleichförmig wachsendem oder abnehmendem Einfallswinkel in der Anordnung der Streifen eintreten, läfst man in der Gleichung

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{d}{\mu \varepsilon} \operatorname{tg} \varphi$$

den Winkel φ sich gleichförmig ändern, oder man läfst, was bei der vorausgesetzten Kleinheit des Winkels φ auf dasselbe hinauskommt, diese Gerade parallel mit sich selbst mit gleichförmiger Geschwindigkeit über die $\xi\eta$-Ebene weggleiten. Man sieht alsdann, dafs die den Nulllinien

$$\xi = \frac{2m+1}{2}\pi$$

entsprechenden Streifen an denselben Stellen jedes Spectrums stehen bleiben, während die den Linien

$$\eta = \frac{2n+1}{2}\pi$$

entsprechenden Streifen die Spectren mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen. Diejenigen Streifen, welche von den rosettenförmigen Figuren herrühren, bewegen sich mit ungleichförmiger Geschwindigkeit, welche sich ruckweise ändert, sobald die Linie $\eta - \xi$ über ein Eck der Rosette gleitet. Man sieht ferner, wie die beweglichen Streifen mit den feststehenden bald zusammenfliefsen, bald sich wieder von ihnen trennen, oder wie ein Streifen der dritten Art in zwei mit verschiedener Geschwindigkeit sich bewegende auseinandergeht, welche sich dann an einer andern Stelle des Spectrums wieder vereinigen.

Wir haben demnach in dem ersten Spectrum jederseits folgende Arten von dunkeln Streifen:

1) Streifen, welche in gleichen Abständen von einander an bestimmten Stellen des Spectrums stehen bleiben;

2) Streifen, welche mit denselben Abständen bei gleichförmiger Aenderung des Einfallswinkels das Spectrum seiner ganzen Breite nach mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen;

3) Streifen, welche mit ungleichförmiger, manchmal plötzlich geänderter Geschwindigkeit sich bald diesseits, bald jenseits der stationären Streifen bewegen, dann plötzlich verschwinden, um bald an der ursprünglichen Stelle wieder aufzutauchen. Wenn $\varkappa > \frac{1}{4}$ ist, kann die ungleich-

förmige Bewegung dieser Streifen eine Zeit lang in gleichförmige Bewegung oder in Stillstand übergehen, oder sie wechselt bloss, wenn $\varkappa > \frac{1}{3}$ ist, zwischen Stillstand und gleichförmiger Bewegung.

4) Endlich giebt es, entsprechend den oben erwähnten trichterartigen Einsenkungen der Fläche M^2, noch Streifen, welche nicht völlig dunkel sind. Sie zeigen sich nur in den Stellungen der Symmetrie immer an denselben Stellen des Spectrums, nämlich in der Mitte zwischen zwei stationären Streifen. —

Gehen wir nun zur Untersuchung der Erscheinungen im zweiten Spectrum über, so haben wir, $i = 2$ setzend, in der $\xi\eta$-Ebene das Netz der Linien (vergl. Fig. 7)

$$\eta - \xi = 2m\pi, \; \eta - \xi = 2m\pi \pm 2\varkappa\pi,$$
$$\eta + \xi = 2n\pi, \; \eta + \xi = 2n\pi \pm 2\varkappa\pi$$

zu zeichnen. Dasselbe zeigt bei doppelt so grossem Maassstabe die nämlichen Verhältnisse wie im vorigen Fall. Der Verlauf der Nulllinien ist aber ein ganz anderer. Was zuerst die Quadrate (Bb) anbelangt, so verhalten sich dieselben alle unter sich gleich; in jedem nämlich finden sich vier gerade Nulllinien, von welchen zwei, nämlich

$$\xi = 2m\pi - \tfrac{1}{2}\pi \text{ und } \xi = 2m\pi + \tfrac{1}{2}\pi$$

der η-Axe, die zwei andern

$$\eta = 2n\pi - \tfrac{1}{2}\pi \text{ und } \eta = 2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi$$

der ξ-Axe parallel sind. Diese Linien durchlaufen *nicht* ununterbrochen die $\xi\eta$-Ebene, sondern endigen an den Grenzen der zugehörigen Quadrate; sie sind, falls $\varkappa > \frac{1}{4}$ ist, gar nicht mehr vorhanden.

Innerhalb der Quadrate (Aa), (Cc), (Ac), (Ca) giebt es keine Nulllinien, so lange $\varkappa < \frac{1}{4}$ ist. Ist aber $\varkappa > \frac{1}{4}$, so findet sich in dem Quadrate (Aa), welchem der Ausdruck

$$4\cos^2\xi \sin(2\varkappa\pi + \eta)$$

entspricht, die gerade Linie

$$Aa) \qquad \eta = 2n'\pi - 2\varkappa\pi,$$

und ebenso in den drei übrigen Quadraten die Geraden

$Cc)$ $\eta = 2n'\pi + 2\varkappa\pi,$

$Ac)$ $\xi = 2m'\pi + 2\varkappa\pi,$

$Ca)$ $\xi = 2m'\pi - 2\varkappa\pi;$

für $\varkappa = \frac{1}{3}$ werden sie zu Diagonalen ihrer Quadrate, und schliefsen sich zu je vier sowohl um die Punkte

$$\xi = (2m+1)\pi, \quad \eta = (2n+1)\pi$$

als auch um die Punkte

$$\xi = 2m\pi, \quad \eta = 2n\pi$$

zu Quadraten zusammen; diese Quadrate werden bei wachsendem $\varkappa$ immer kleiner, und verschwinden endlich, wenn $\varkappa = \frac{1}{2}$ geworden ist, in den ebengedachten Punkten.

Was endlich die Rechtecke (Ab), (Cb), (Ba), (Bc) anlangt, so enthält jedes derselben zwei Curvenzweige, welche z. B. im Falle (Ab) der Gleichung

$$2 \sin 2\varkappa\pi \cos(\eta + \xi) + \sin(2\varkappa\pi + \eta - \xi) = o$$

genügen und von den in der Grundlinie $\eta - \xi = 2m\pi$ gelegenen beiden Punkten

$$\eta - \xi = 2m\pi, \quad \eta + \xi = 2n\pi + \tfrac{2}{3}\pi;$$
$$\eta - \xi = 2m\pi, \quad \eta + \xi = (2n+2)\pi - \tfrac{2}{3}\pi$$

ausgehend, entweder, so lange $\varkappa < \frac{1}{4}$ bleibt, nach den Punkten hinlaufen, wo die den Quadraten (Bb) angehörigen Nulllinien die mit dem Rechteck gemeinschaftliche Quadratseite treffen, oder, wenn $\varkappa$ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ liegt, nach den Punkten, wo die innerhalb der Quadrate $(Aa,)$ (Ac) verlaufenden Nulllinien den anstofsenden Seiten des Rechtecks begegnen. Wenn $\varkappa > \frac{1}{3}$ ist, sind diese Curvenäste nicht mehr vorhanden. So lange sie aber vorhanden sind, bilden sie in Gemeinschaft mit den innerhalb der Quadrate verlaufenden geraden Linien geschlossene rosettenartige Figuren, welche die Punkte

$$\xi = m\pi, \quad \eta = n\pi$$

als Mittelpunkte umgeben; wenn $\varkappa > \frac{1}{3}$ wird, treten an Stelle dieser Rosetten jene oben bereits erwähnten, von Nulllinien gebildeten Quadrate. Die Mittelpunkte der

Rosetten (oder Quadrate) sind zugleich diejenigen Punkte, in welchen die Fläche M^2 trichterförmige Einsenkungen besitzt.

Das Muster der Nulllinien des zweiten Spectrums enthält also nur Rosetten ohne durchgehende gerade Linien. Wollen wir das Verhalten der dunkeln Streifen kennen lernen, so haben wir jetzt das zweite Spectrum zwischen den Grenzlinien

$$\xi_1 = \pm \pi \frac{4d}{\mu e^2} \lambda_1$$

$$\text{und } \xi_2 = \pm \pi \frac{4d}{\mu e^2} \lambda_2$$

aufzutragen, und die Gerade

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{2d}{\mu e} \operatorname{tg} \varphi$$

darüber gleiten zu lassen. Das Spectrum hat die vierfachen, das Netz, in welches die Nulllinien eingezeichnet sind, die doppelten Dimensionen wie vorhin. Geben wir dem Netze, was für die Ausführung der Zeichnung (Fig. 7) bequem ist, dieselbe Gröfse wie im ersten Fall, so bekommt das zweite Spectrum die doppelte Breite wie das erste, wie es sich auch in Wirklichkeit verhält. Man bemerkt, dafs an denselben Stellen, d. h. bei den nämlichen Wellenlängen, wo im ersten Spectrum Rosettenmittelpunkte oder Minima lagen, im zweiten Spectrum Rosettenmittelpunkte vorhanden sind, und zwar ist hier jedes Minimum der Mittelpunkt einer Rosette. Die Anordnung der Streifen gestaltet sich auch hier beiderseits symmetrisch, so oft $2d \operatorname{tg} \varphi = me$ wird, und wiederholt sich, wenn $2d \operatorname{tg} \varphi$ um e zunimmt. Es giebt jedoch im zweiten Spectrum keine Streifen der ersten und zweiten Art, sondern nur solche, deren Bewegung abwechselnd aus gleichförmiger und ungleichförmiger Bewegung und zeitweisem Stillstand gemischt ist. Aufserdem finden sich noch, an bestimmten Stellen des Spectrums, die halbdunklen Streifen, welche den trichterförmigen Einsenkungen der Fläche M^2 entsprechen. Die Fig. 7a, Taf. I zeigt den Verlauf der

Werthe von M^2 längs der Linie $\eta - \xi = o$ von $\eta + \xi = 2\pi$ bis $\eta + \xi = 6\pi$.

Zum dritten Spectrum, welchem das Netz

$$\eta - \xi = 3m\pi,\ \eta - \xi = 3m\pi \pm 3\varkappa\pi,$$
$$\eta + \xi = 3n\pi,\ \eta + \xi = 3n\pi \pm 3\varkappa\pi$$

zu Grunde liegt, gehören wieder zwei Schaaren von durchgehenden Nulllinien (vergl. Fig. 8, Taf. I), nämlich

$$\xi = (3m + \tfrac{3}{2})\pi$$
$$\text{und } \eta = (3n + \tfrac{3}{2})\pi;$$

jeder Durchschnittspunkt derselben ist von zwei concentrischen Rosetten umgeben, während noch jeder der Punkte

$$\xi = 3m\pi,\quad \eta = 3n\pi$$

von je einer Rosette umschlossen wird. Ueber das dreimal so grofse Netz wäre, vermöge der Gleichung

$$\xi = \pi \frac{di^2}{\mu e^2} \lambda$$

ein Spectrum von neunfacher Breite zu legen; führt man aber das Netz in denselben Dimensionen aus wie in den vorigen Fällen (Fig. 8), so hat man das Spectrum dreimal so breit zu nehmen wie das erste. Die Fig. 8a stellt die Intensitätsvertheilung im dritten Spectrum dar für $\eta - \xi = o$ von $\eta + \xi = 3\pi$ bis $\eta + \xi = 9\pi$. Der Weg, welchen die Discussion im gegenwärtigen sowie in den folgenden Fällen einzuschlagen hat, ist durch das Vorhergehende so deutlich vorgezeichnet, dafs wir, auch ohne ihn Schritt für Schritt zu verfolgen, die eintretenden Erscheinungen klar übersehen. Nur folgende Bemerkung sey noch gestattet. Durchgehende Nulllinien giebt es nur für die Spectra ungerader Ordnungszahl $(2k + 1)$, und zwar entsprechend den Gleichungen

$$\xi = (2k + 1)\frac{2m + 1}{2}\pi$$
$$\text{und } \eta = (2k + 1)\frac{2n + 1}{2}\pi;$$

demnach giebt es nur in diesen Spectren Streifen, welche immer an derselben Stelle stehen bleiben, und solche, welche das Spectrum seiner ganzen Breite nach mit gleichförmiger

Geschwindigkeit durchwandern. Sowohl die erste als die zweite Art von Streifen bewahren unter sich stets die nämlichen Abstände, wie im ersten Spectrum. —

Wir haben uns bisher blos mit den Vorgängen innerhalb der Beugungsspectra beschäftigt, dagegen das Bild des Collimatorspaltes, in welchem sich das ungebeugte Licht vereinigt, ganz aufser Acht gelassen. Dem linearen Spaltbilde entspricht aber die η-Axe unserer Projection, für welche $i = o$ und daher auch $s = o$ ist; der Ausdruck M^2, welcher aus der Formel N S. 113 unter der Voraussetzung, dafs s *nicht* Null sey, hergeleitet wurde, verliert also auf der η-Axe seine Geltung. Wir müssen daher die bisher zusammenhängend gedachte Fläche M^2 längs der η-Axe durchschneiden, und längs des Schnittes diejenigen Intensitätswerthe aufpflanzen, welche dem ungebeugten Lichte für die verschiedenen Einfallswinkel φ zukommen.

Die Intensität des durch *einen* Gitterspalt direct eingetretenen und ungebeugt wieder austretenden Lichtes ergiebt sich aber sowohl aus dem Ausdruck N S. 113 (für $s = o$), als auch durch unmittelbare Ueberlegung

$$= \cos^2 \varphi \, [(1 - x) \, e - (\beta' - \alpha')]^2;$$

man hat daher, unter Berücksichtigung der früher (S. 117) angegebenen Werthe von $\beta' - \alpha'$, statt M^2 die folgenden Werthe in den entsprechenden Punkten der η-Axe aufzutragen:

$A)$ $\cos^2 \varphi \, [(m + 1) \, e - xe - 2 d \operatorname{tg} \varphi']^2$,
von $2 d \operatorname{tg} \varphi' = me$ bis $2 d \operatorname{tg} \varphi' = me + xe$;

$B)$ $\cos^2 \varphi \, [(1 - 2x) \, e]^2$,
von $2 d \operatorname{tg} \varphi' = me + xe$ bis $2 d \operatorname{tg} \varphi' = (m + 1) \, e - xe$;

$C)$ $\cos^2 \varphi \, (2 d \operatorname{tg} \varphi' - me - xe)^2$,
von $2 d \operatorname{tg} \varphi' = (m + 1) \, e - xe$ bis $2 d \operatorname{tg} \varphi' = (m + 1) e$.

Lassen wir den Factor $\cos^2 \varphi$, welcher die allmählige Abnahme der Lichtstärke bei zunehmender Schrägheit der Strahlen ausdrückt, aber hier wegen der vorausgesetzten Kleinheit des Winkels φ nahezu gleich 1 ist, aufser Acht,

so lehren uns diese Ausdrücke, dafs die Intensität des Spaltbildes, soweit sie blos von einer Gitteröffnung herrührt[1]), während $2d \operatorname{tg} \varphi'$ von me bis $(m+1)e$ geht, zuerst von ihrem gröfsten Werthe $[(1-\varkappa)e]^2$ abnimmt bis zum Werthe $[(1-2\varkappa)e]^2$, welcher bei $2d \operatorname{tg} \varphi' = me + \varkappa e$ eintritt; diesen kleinsten Werth behält sie unverändert bei bis $2d \operatorname{tg} \varphi' = (m+1)e - \varkappa e$, um von da an wieder in nahezu gleichförmigem Wachsthum bis zum gröfsten Werthe $[(1-\varkappa)e]^2$ anzusteigen, der bei $2d \operatorname{tg} \varphi' = (m+1)e$ erreicht wird. Denken wir uns diese Werthe längs der η-Axe aufgepflanzt, so giebt die Gerade

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{di}{\mu e} \operatorname{tg} \varphi,$$

indem sie über die η-Axe gleitet, zunächst die Intensitätsänderungen an, welche das Spaltbild bei allmähliger Aenderung des Einfallswinkels durchmacht. Dafs diese Intensitätsänderungen wirklich stattfinden, wird durch die Beobachtung in der That bestätigt[2]).

Unsere Theorie giebt demnach in qualitativer Beziehung von den Umständen der Erscheinung befriedigende Rechenschaft. Um sie auch in quantitativer Hinsicht zu prüfen, wurde die Lage der dunklen Streifen durch Messung bestimmt. Nachdem der Spiegel sorgfältig in der bereits beschriebenen Weise zu den von der durchsichtigen Glasplatte reflectirten Strahlen senkrecht und das Gitter mit dem Spiegel parallel gestellt war, so dafs die Streifung der Spectren zu beiden Seiten des Spaltbildes symmetrisch erschien, wurde das Fadenkreuz nach und nach auf die dunkeln Streifen des ersten und zweiten Spectrums zur Rechten und zur Linken eingestellt. Die Hälfte des für den nämlichen Streifen jederseits abgelesenen Winkels giebt alsdann den Winkel ψ. Aus den Winkeln ψ wurden nun mittelst der Formeln $\lambda = e \sin \psi$ für das erste und

1) Um die Intensität für das ganze Gitter von q Oeffnungen zu erhalten, wären obige Ausdrücke noch mit q^2 zu multipliciren.

2) Gewisse Farbenerscheinungen, von welchen diese Intensitätsänderungen begleitet sind, sollen im folgenden Abschnitt besprochen werden.

$\lambda = \frac{1}{2} e \sin\psi$ für das zweite Spectrum die den Streifen zugehörigen Wellenlängen berechnet; sie finden sich, in Milliontel-Millimetern ausgedrückt, in der folgenden Tabelle unter der Rubrik „beobachtet" neben den Werthen von ψ angegeben; diese letzteren sind die Resultate einer einzigen Messung. Das Gitter enthielt 39 Oeffnungen auf 1^{mm}, es war also $e = 0^{mm},02578$. Dieser Werth wurde noch durch Messung der Wellenlängen der **Fraunhofer**'schen Linien controlirt. Da bei senkrechter Incidenz $\eta - \xi = 0$ ist, so hätten wir zur Berechnung der Werthe von ξ, für welche die Lichtstärke Null wird, die Ausdrücke (Aa), (Ab) und (Ac) zu benutzen, nachdem in ihnen $\eta = \xi$ gesetzt worden. Aus der vorausgegangenen allgemeinen Discussion wissen wir aber bereits, daſs im ersten Spectrum (falls wir den unbekannten Werth x kleiner als $\frac{1}{3}$ voraussetzen) Nullwerthe eintreten für

$$\xi = \frac{2m+1}{2}\pi \text{ und für } \eta + \xi = (2n+1)\pi \pm \tfrac{1}{3}\pi$$

oder, da im gegenwärtigen Falle $\eta = \xi$ ist, für

$$\xi = \frac{2m+1}{2}\pi \text{ und } \xi = \left(\frac{2n+1}{2} \pm \frac{1}{6}\right)\pi;$$

dazu kommen noch die Minima bei

$$\xi = m\pi.$$

Da nun das erste Spectrum

$$\xi = \pi \frac{d}{\mu e^2} \lambda$$

ist, so findet man die Werthe von λ, bei welchen im ersten Spectrum dunkle Streifen auftreten, aus den Gleichungen

$$\lambda = \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\mu e^2}{d},\ \lambda = \left(\frac{2m+1}{2} \pm \frac{1}{6}\right)\frac{\mu e^2}{d},\ \lambda = m \cdot \frac{\mu e^2}{d}.$$

Im zweiten Spectrum hat man, für $\eta - \xi = 0$, Nullwerthe bei $\eta + \xi = 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$, oder was im gegenwärtigen Fall dasselbe ist, bei

$$\xi = (n \pm \tfrac{1}{3})\pi$$

und Minima bei $\quad \xi = n\pi;$

im zweiten Spectrum ist aber

$$\xi = \pi \frac{4d}{\mu e^2} \lambda;$$

die dunkeln Streifen in demselben finden sich also bei den folgenden Werthen von λ:

$$\lambda = \left(\frac{n}{4} \pm \frac{1}{12}\right) \frac{\mu e^2}{d} \text{ und } \lambda = \frac{n}{4} \cdot \frac{\mu e^2}{d}.$$

Um aus diesen Formeln die Wellenlängen für die dunkeln Streifen berechnen zu können, braucht nur noch d, die Entfernung des Gitters von dem Spiegel, bekannt zu seyn. Bei dem in der folgenden Tabelle aufgeführten Beispiel war $d = 2^{mm},613$; da sich zwischen Gitter und Spiegel eine Luftschicht befand, war $\mu = 1$ zu setzen, und es ergab sich

$$\frac{\mu e^2}{d} = \frac{e^2}{d} = 0^{mm},00025426.$$

Mit Hilfe dieser Zahl wurden nun die Wellenlängen der dunkeln Streifen bestimmt, und in der Columne „berechnet“ den beobachteten Werthen zur Seite gestellt. Diejenigen Werthe, welche der Theorie zu Folge nicht völlig dunkeln Streifen, sondern Minimis entsprechen, wurden durch den Beisatz „min.“ bezeichnet. In der Beobachtung war jedoch ein Unterschied zwischen ihnen und den andern Streifen nicht zu erkennen. Der Streifen bei 508,6 z. B. erschien fast eben so dunkel wie der Streifen 638,8; es dürfte sich dieſs erklären aus dem Umstand, daſs jedes Minimum zwischen zwei Maximis enthalten ist, welche bei einem kleinen Werthe von x dem Minimum sehr nahe gerückt sind und dessen Werth um mehr als das doppelte übertreffen. Bei dem angewendeten Gitter aber betrug, wie die Betrachtung unter dem Mikroskop zeigte, den Werth x sicher weniger als $\frac{1}{10}$. Durch den Contrast mit den benachbarten Maximis müssen aber die Minima deutlicher hervortreten.

$e = 0^{mm},02578$ $d = 2^{mm},613$

beobachtet				berechnet
ψ			λ	λ
			I. Spectrum	
0°	56′	40″	425,9	423,7
1	7	40	508,6	508,5 min.
1	20	—	601,2	593,2
1	25	—	638,8	635,6
1	31	—	683,9	678,0
			II. Spectrum	
1	47	—	402,1	402,6
1	53	40	427,1	426,2
1	59	40	449,6	447,4 min.
2	4	—	466,9	468,6
2	10	30	490,3	487,3
2	15	20	508,5	508,5 min.
2	22	40	536,0	529,7
2	26	30	550,4	550,9
2	32	50	574,2	572,1 min.
2	38	—	593,6	593,2
2	43	30	614,2	614,4
2	49	—	634,9	635,6 min.
2	55	10	658,0	656,8

Mit demselben Gitter wurden mehrere derartige Messungen für verschiedene Distanzen (bis zu $d = 4,357$) durchgeführt, welche sich theils wie die in der Tabelle mitgetheilte auf die beiden ersten Spectren, theils für die gröſseren Distanzen nur auf das erste Spectrum erstreckten; alle Messungen befinden sich mit der Theorie in genügendem Einklange.

Ein Glasgitter bringt auch für sich schon, d. h. ohne Anwendung eines besonderen Spiegels, die dunkeln Streifen hervor, wenn die geritzte Fläche dem Beobachter zugewendet und die ungeritzte Glasfläche als Spiegel benutzt wird. In diesem Falle erscheinen jedoch die Streifen verhältniſsmäſsig weniger dunkel, weil nämlich die unversehrten Spectra, welche durch Reflexion an der geritzten Fläche entstehen, sich über die ungefähr gleich lichtstarken gestreiften Spectra des an der Glasfläche reflectirten

Lichtes legen. Die von der Reflexion an der geritzten Fläche herrührenden Spectra sind allerdings auch bei Anwendung eines Silberspiegels vorhanden, da sie aber ungestreift sind und im Vergleiche mit den durch Reflexion an der Silberfläche erzeugten gestreiften Spectren nur eine geringe Lichtstärke besitzen, so geben sie zu einer merklichen Störung keinen Anlaſs. Störend würde es jedoch wirken, wenn man das Glasgitter mit nach vorn gewendeter geritzter Fläche vor den Glasspiegel bringen wollte, weil jetzt nebst den eben erwähnten glatten auch noch die dem Glasgitter selbst angehörigen gestreiften Spectren auf die enger gestreiften des Silberspiegels sich legen würden. Die letztere Anordnung muſs daher, wenn es sich um messende Versuche handelt, vermieden, und wie oben angegeben wurde, die geritzte Fläche dem Spiegel zugekehrt werden; immerhin aber kann man sich an dem zierlich cannelirten Anblick erfreuen, welchen die Spectra durch Uebereinanderlagerung einer engeren und schärferen mit einer weiteren und weniger scharfen Streifung darbieten. Man kann sogar drei verschiedene Streifungen gleichzeitig hervorbringen, wenn man noch die unbelegte Fläche des Silberspiegels nach vorn wendet.

Auch Ruſsgitter und Drahtgitter bringen vor einer spiegelnden Fläche ähnliche Erscheinungen hervor wie Glasgitter; auſser den oben erwähnten wurden jedoch keine weiteren Messungen angestellt, weil jene zur Bestätigung der Theorie hinzureichen schienen. Jedenfalls dürfen wir in diesen zierlichen Erscheinungen, welche unzweifelhaft durch die *Interferenz gebeugter Strahlen* entstehen, eine wesentliche Stütze der von uns vertretenen Anschauung erblicken, daſs auch die in den vorhergehenden Abschnitten besprochenen und bisher als „Farben dicker Platten“ bezeichneten Erscheinungen der nämlichen Ursache zuzuschreiben sind.

(Schluſs im nächsten Heft.)

V. *Die Grundprincipien der Edlund'schen Elektrodynamik von O. Chwolson in St. Petersburg.*

§ 1.

Zu den mancherlei Versuchen, die in letzter Zeit gemacht wurden in das verworrene und dunkle Gebiet der elektrischen, insbesondere der elektrodynamischen Erscheinungen, Klarheit und Licht zu bringen und sie einem faſsbaren Principe unterzuordnen, gehört auch die tiefsinnig angelegte und consequent durchgeführte Theorie von Edlund. Man könnte die sämmtlichen Zweige derselben in drei Abtheilungen theilen: die Elektrostatik, die Elektrodynamik und die Theorie der stationären Strömung. Die Erstere, einfach und elegant aufgebaut, werden wir nicht in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen: sie kann nicht in ihren Grundlagen, sondern lediglich in ihren Consequenzen kritisirt werden. Nur die Grundlagen des wichtigsten Theiles, der Elektrodynamik, wollen wir hier einer kritischen Analyse unterwerfen und zu zeigen versuchen, daſs dieselben theilweise mit sich selbst im Widerspruche stehen und manche unwahrscheinliche Annahme versteckt enthalten. Die Arbeiten von Edlund waren ursprünglich in einer Menge von einzelnen Aufsätzen in Pogg. Annalen verstreut. Im Herbst 1873 aber veröffentlichte Edlund eine gröſsere französische Schrift, die gleichsam eine erweiterte Sammlung jener Aufsätze darstellte unter dem Titel „*Théorie des phénomènes électriques*“ Stockholm 1874; sie ist bei Brockhaus in Leipzig in Commission und wohl jetzt in aller Händen — ich werde daher alle weiteren Seiten und Paragraphe auf jene Schrift beziehen. Nach Diesem hat Edlund noch einige weitere Arbeiten veröffentlich, die wir nur flüchtig berühren. Die Arbeiten von Edlund haben groſses Aufsehen erregt und mancherlei kritische Bemerkungen (Rioti etc.) veranlaſst, welche aber sämmtlich von Edlund glücklich beantwortet wurden.

Alle diese Bemerkungen waren aber fast ausschliefslich gegen die Consequenzen, welche sich aus der Edlund'schen Theorie ziehen lassen, gerichtet, die tieferen Grundideen, die, man kann sagen, philosophische Begründung derselben ist, meines Wissens, bisher noch nicht der Gegenstand eines eingehenden Studiums gewesen. Diese Grundlagen, durch ihre scheinbare Einfachheit ungemein verführerisch, erweisen sich bei genauerer Untersuchung als ganz aufserordentlich verwickelt: je tiefer man einzudringen sucht, desto verwickelter und schwerer zu verfolgen wird der Gegenstand und zuletzt steht man Fragen gegenüber von derselben Unzugänglichkeit, wie die Grundfragen über Bewegung, Zeit, Continuität etc.

Es giebt nichts Leichteres, als einer neuen Theorie Einwürfe entgegenzustellen, da bei der Lectüre einer solchen fast immer mannigfache Bedenken und Zweifel aufsteigen, die aber oft bei tieferem Nachdenken verschwinden. Um daher überflüssigen Worten und Mifsverständnissen auszuweichen, werde ich so scharf als möglich nur meine hauptsächlichsten drei Bedenken hervorheben. In kurzen Zügen will ich zuerst die Deduction des Herrn Edlund wiedergeben, welche sich dadurch vortheilhaft vor einigen anderen Theorieen unterscheidet, dafs sie nicht von einer todten mathematischen, dem Verstande Nichts darbietenden Formel ausgeht, sondern ein Naturprincip als Grundlage annehmend, von diesem aus die Formel [(13) pag. 21] erst herleitet. Dies Princip besteht in Folgendem: pag. 12, „tout ce qui se passe ou s'effectue dans la nature extérieure exige un certain temps." Von diesem einzigen Satz, welcher dem grofsen ex nihilo nihil fit gleichsam coordinirt wird, ausgehend, entwickelt Herr Edlund seine Theorie auf folgende Weise: bewegt sich ein Theilchen m gegen ein anderes unbewegliches m' hin mit der constanten Geschwindigkeit h, so ist die zwischen den beiden Theilchen wirksame abstofsende Kraft nicht $-\frac{m\,m'}{r^2}$, sondern kleiner und zwar gleich

$$-\frac{m\,m'}{r^2}f(h) = -\frac{m\,m'}{r^2}F(-h) = -\frac{m\,m'}{r^2}[1+\varphi(-h)];$$

entfernt sich dagegen m von m', so ist die Kraft gleich

$$-\frac{m\,m'}{r^2}F(+h) = -\frac{m\,m'}{r^2}[1+\varphi(h)],$$

(wo φ und h dieselben Vorzeichen haben), weil bei der Annäherung die Kraft nicht Zeit hat, ihr Maximum zu erreichen, der Bewegung des Theilchens zu folgen, bei der Entfernung nicht Zeit hat, so schnell zu sinken, wie es der Bewegung des Theilchens entsprechen müfste (siehe pag. 13). Bewegt sich das Theilchen m ungleichförmig, so erhält die Kraft eine neue, von der Beschleunigung abhängige Aenderung, so dafs für die Kraft der Ausdruck (3) pag. 15

$$-\frac{m\,m'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)+\psi\left(r,\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]$$

erhalten wird. Die Function ψ, welche auch von r abhängen mag, soll nun nach der Deduction des Herrn Edlund positiv seyn bei der Annäherung für positive und bei der Entfernung für negative Werthe der relativen Beschleunigungen, d. h. also für alle Lagen der sich bewegenden Theilchen, welche bei den eletrokdynamischen Erscheinungen vorkommen können (pag. 14). Ich werde versuchen zu zeigen, dafs sich in diese Deduction ein Versehen eingeschlichen hat; entfernt man dasselbe, so erhält man für das Vorzeichen von ψ das entgegengesetzte Resultat und in Folge dessen bei der weiteren Rechnung Resultate, die den experimentellen Thatsachen in allen Punkten widersprechen. Durch Vergleichung mit speciellen Formen des Ampère'schen Gesetzes bestimmt nun Herr Edlund die Form der unbekannten Functionen φ und ψ und erhält zuletzt die Formel (13) pag. 21

$$-\frac{m\,m'}{r^2}\left[1+a\frac{dr}{dt}-\frac{1}{4}k\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{kr}{2}\frac{d^2r}{dt^2}\right]. \quad . \quad (1)$$

für den Ausdruck der Kraft. Hier sind a und k Constante. —

Gegen diese Entwickelung habe ich nun drei Bedenken, die ich in den nachfolgenden drei §§ besprechen will: das erste bezieht sich auf die Art, wie die Functionen $\varphi(h)$ und ψ eingeführt werden, das zweite auf die Anwendung des neuen Princips und die Widersprüche, die in einer solchen Anwendung liegen, das dritte ist gegen die schon erwähnte Einführung der Function ψ gerichtet. Die erste Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Zöllner in Leipzig.

§ 2.

Mein erstes Bedenken ist gegen die Art der analytischen Behandlungsweise des Gegenstandes gerichtet. Herrn Edlund's ersten Schlufs, dafs bei der Annäherung ein Kräfteverlust stattfinden mufs, weil die Kraft nicht Zeit habe, während der Bewegung zu ihrem vollen Werthe anzuschwellen, wollen wir annehmen. Mit welchem Rechte aber setzt nun Herr Edlund den neuen Werth der Kraft gleich $-\frac{m\,m_1}{r^2}f(h)$, wo $f(h) < 1$? Darin liegt doch offenbar die zu begründende und recht unwahrscheinliche Annahme versteckt, dafs jener Verlust bei gegebener Geschwindigkeit h stets ein und derselbe aliquote Theil der ganzen Kraft sey, denselben Bruchtheil derselben z. B. in Procenten ausgedrückt, bilde. Logischerweise und mit Vermeidung jeder neuen, der Theorie, die sich einzig und allein auf jenes Grundprincip zu stützen hat, wenn sie werthvoll seyn soll — fremden Annahme, hätte die neue Kraft gleich

$$m\,m'\left(\frac{1}{r^2}+f(r,t)\right)$$

gesetzt werden müssen, wo für den betrachteten Fall der Annäherung, d. h. für negative h die Function f negativ ist. Herr Edlund nimmt an, dafs der Ausdruck für den Kraftverlust r^2 im Nenner habe und sonst von r unabhängig sey — das ist eben eine *Annahme*, wie ausdrück-

lich hätte hervorgehoben werden müssen. Das Sonderbare derselben tritt noch mehr hervor, wenn man in Betracht zieht, dafs Herr Edlund für die durch die Beschleunigung hervorgerufene Kraftveränderung weiterhin den analytischen Ausdruck annimmt:

$$\frac{m\,m'}{r^2}\,\psi\left(r, \frac{d^2 r}{d t^2}\right),$$

es ist dieselbe bei gegebener Beschleunigung also nicht einfach proportional der gesammten Kraft, sondern auch noch anderweit von r abhängig, und zwar demselben proportional, wie sich weiterhin ergiebt (pag. 20). Warum soll dasselbe nicht auch hier der Fall seyn? Dafs nachträglich $\varphi\,(h)$ wirklich von r als unabhängig gefunden wird und zwar durch Hinzuziehung empirisch wahrscheinlich gemachter Sätze, ist doch wohl keine Bekräftigung jener Annahme, sondern viel eher eine Widerlegung der den gesammten Deductionen zu Grunde gelegten Betrachtungen, die zu solcher Annahme nicht nur keinen logisch zwingenden Grund enthalten, sondern viel eher dieselbe ganz unwahrscheinlich machen.

Ungleich schwerer sind die Bedenken gegen die folgende zweite Annahme: Herr Edlund setzt, wie schon oben angeführt, die bei Annäherung verkleinerte Kraft gleich $-\frac{m\,m'}{r^2}[1+\varphi\,(h)]$ und die bei der Entfernung vergröfserte Kraft gleich $-\frac{m\,m'}{r^2}[1+\varphi\,(-h)]$, so dafs die durch die Bewegung veranlafste Variation der Kraft ein und dieselbe Functionenart ist für positive, wie für negative Geschwindigkeiten. Auf was für Gedanken stützt sich wohl diese Annahme? Mir scheint es, als müsse die näher liegende Annahme gemacht werden, dafs jene Variation der Kraft für positive und für negative h einen und denselben absoluten Werth hat, dafs also $-\frac{m\,m'}{r^2}[1+\varphi\,(h)]$ und $-\frac{m\,m'}{r^2}[1-\varphi\,(h)]$ für die beiden Kraftwerthe hätte gesetzt werden müssen. In der That! Welche Vorstel-

lung wir uns auch von der Kraftausströmung machen mögen, die logische Ueberlegung wird stets dahin führen, dafs der Kraftverlust bei der Annäherung gleich dem Kraftgewinn bei der Entfernung seyn mufs. Denken wir uns ein Theilchen m entferne sich von einem andern m', und durchlaufe mit der constanten Geschwindigkeit h die Strecke von A bis B, kehre darauf mit derselben Geschwindigkeit von B nach A zurück. Die gesammte, von der Abstofsungskraft hierbei geleistete Arbeit mufs Null seyn, was für jede Strecke AB nur dann richtig seyn kann, wenn $\varphi(-h) = -\varphi(+h)$ ist. Herr Edlund findet (pag. 19)

$$\left.\begin{aligned}\varphi(h) &= +ah - \frac{1}{4}kh^2\\ \varphi(-h) &= -ah - \frac{1}{4}kh^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo a und k Constante sind, so dafs also $\varphi(-h)$ nicht gleich $-\varphi(+h)$ ist. Der Kraftverlust ist gröfser als der Kraftzuwachs; bewegt sich also ein Theilchen zwischen A und B vielmals hin und her und kehrt zu seiner Anfangslage zurück, so hat doch die Abstofsungskraft dabei eine endliche positive Arbeit geleistet, die, in Wärme umgewandelt, dem Grundsatz ex nihilo nihil fit widersprechen würde. Zu dem sonderbarsten Resultate führen die Formeln (2) noch in anderer Beziehung. Während nämlich der absolute Werth von $\varphi(-h)$ mit h beständig wächst, ist diefs bei $\varphi(+h)$ nicht der Fall; für $h = \frac{2a}{k}$ erreicht der Kraftzuwachs sein Maximum $\frac{a^2}{k}$, dann wird er mit wachsendem h kleiner; für $h = \frac{4a}{k}$ wird er Null und für $h > \frac{4a}{k}$ gar negativ. Bei einer gewissen Geschwindigkeit (bei Annäherung) ist also die Kraft ebenso grofs, wie wenn das Theilchen in Ruhe wäre, und bei einer Geschwindigkeit $h > \frac{4a}{k}$ ist die Kraft nun gar immer zu klein, möge sich das eine Theilchen vom andern entfernen oder sich

ihm nähern! Das ist ein Resultat, welches entweder auf einem Fehler meinerseits basirt, oder, wenn richtig, kaum einen Vertheidiger finden dürfte. Es widerspricht doch offenbar auf das Vollständigste den Grundanschauungen, von welchen Herr Edlund ausgeht. — Daſs Herr Edlund (pag. 19) durch Vergleich mit dem Ampère'schen Gesetze

$$\varphi(+h) + \varphi(-h) = -\frac{1}{2}kh^2$$

findet, ist wieder keine Stütze für die obige Annahme, sondern nur ein Beweis dafür, daſs eine gewisse mehr oder weniger anerkannte Thatsache, wie das Ampère'sche Gesetz *mit den Grundanschauungen* der Edlund'schen Theorie sich nicht in Einklang bringen läſst.

Die dritte bedenkliche Annahme ist versteckt in der Art und Weise, wie die den Einfluſs der Beschleunigung darstellende Function ψ in die Rechnung eingeführt wird, ganz abgesehen von dem, ihr zugeschriebenen Vorzeichen, von welchem wir im § 4 sprechen werden. Herr Edlund setzt die Kraft gleich

$$-\frac{m m'}{r^2}\left\{1 + \varphi + \psi\right\}$$

d. h. *er nimmt an* sie sey eine lineare Function der beiden von Geschwindigkeit und von Beschleunigung abhängigen Functionen oder, mit anderen Worten, *die Wirkung der Beschleunigung sey unabhängig von der gerade vorhandenen Geschwindigkeit.* Das ist eben eine willkürliche Annahme, die durch irgend welche Betrachtungen gestützt werden müſste, wenn sie ihre Bedenklichkeit verlieren soll. Mit eben solchem Rechte wie die obige, hätte z. B. auch die Annahme gemacht werden können, der volle Ausdruck für die Kraft habe die Form

$$-\frac{m m'}{r^2}\left\{1 + \varphi(1 + \psi)\right\}$$

d. h. die Wirkung der Beschleunigung bilde einen aliquoten Bruchtheil von der Wirkung der Geschwindigkeit.

Für solch eine Annahme und noch viele beliebig andere ließe sich sogar allenfalls eine Art Stütze auffinden. —

Ich habe versucht zu zeigen, daß in der Deduction des Herrn Edlund drei ungestützte Annahmen versteckt sind, von welchen, wie mir scheint, die zweite zu Resultaten führt, die den Grundanschauungen stracks widersprechen und welche zum Mindesten den Werth der Endformel beeinträchtigen müssen, die eben nur scheinbar ohne weitere Annahmen aus dem Grundprincip hergeleitet ist. Ich gehe nun zur näheren Beleuchtung dieses Principes selbst über.

§ 3.

Wir denken uns die gerade Linie, welche das Theilchen m durchläuft, indem es sich dem auf derselben Linie befindlichen festen Theilchen m' *nähert*, in äußerst kleine Abschnitte α getheilt und stellen uns vor, daß die äußere Abstoßungskraft nicht continuirlich, sondern sprungweise von Abschnitt zu Abschnitt wachse. Tritt das Theilchen mit der Geschwindigkeit h in einen Abschnitt ein, so hat es am Anfang gleichsam ein Kraftdeficit, das wir mit w bezeichnen wollen; während der kleinen Zeit τ, welche das Theilchen braucht, um den betrachteten Abschnitt α zu durchlaufen, wächst die Kraft, indem sie einen Zuwachs δ erhält, welcher Function der Zeit t ist und bei $t = \tau$, d. h. im Momente des Austritts des Theilchens aus jenem Abschnitt, sein Maximum erreicht hat; beim Eintritt in den nächsten Abschnitt fängt dann ein neuer Zuwachs an sich einzustellen, der sich aber unter dem Einfluß einer stärkeren Kraft bildet. Die Größe $\frac{d\delta}{dt}$ können wir die Geschwindigkeit der Kraftzunahme nennen und mit v bezeichnen. — Es sey r die Entfernung des Abschnittes α vom wirkenden Theilchen m'. Die Größe v kann nun abhängig seyn von dem augenblicklichen Deficit w, indem die Kraft desto schneller wächst, je mehr noch zur vollen Kraft, die im Falle der Ruhe an dem betreffenden Orte

wirksam wäre, fehlt; ferner mag v von der Gröfse der Kraft $\frac{m m'}{r^2}$ selbst abhängen, indem eine stärkere Kraft schneller auf das Theilchen eindringen wird, als eine schwächere.

Die zwei nachfolgenden Betrachtungen werden uns nun zu zwei entgegengesetzten Resultaten hinführen in Betreff der Abhängigkeit der Geschwindigkeit v von w.

Ist die vorhandene äufsere Kraft (nicht mit der wirklich einwirkenden zu verwechseln!) gleich $\frac{m m'}{r^2}$, so ist die Kraft in der nächsten Abtheilung gleich $\frac{m m'}{(r-\alpha)^2} = \frac{m m'}{r^2} + 2\frac{m m'.\alpha}{r^3}$ oder bei $m = m' = 1$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{2\alpha}{r^3}.$$

Nun war aber die einwirkende Kraft nicht gleich $\frac{1}{r^2}$, sondern gleich $\frac{1}{r^2}[1 + \varphi(-h)]$ gewesen, so dafs also das Deficit

$$w = \frac{2\alpha}{r^3} - \frac{\varphi(-h)}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist, wo $\varphi(-h)$ negativ ist. Während das Theilchen nun die nächste Abtheilung durchläuft, wächst die Kraft von $\frac{1}{r^2}[1 + \varphi(-h)]$ bis zu

$$\frac{1}{(r-\alpha)^2}[1 + \varphi(-h)] = \frac{1}{r^2}[1 + \varphi(-h)] + \frac{2\alpha}{r^3}[1 + \varphi(-h)]$$

d. h. also um

$$\delta = \frac{2\alpha}{r^3}[1 + \varphi(-h)].$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs δ unmöglich Function von w seyn kann, denn nehmen wir $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so sinkt auch δ auf die Hälfte, während w ein von α unabhängiges Glied enthält — das von früher her vor dem Eintritt in den Wegedifferential α bereits vorhandene Deficit. Da die vorhandene Kraft den Zuwachs $\sigma = \frac{2\alpha}{r^3}$ erhält, so könnten wir

$$\delta = \sigma[1 + \varphi(-h)]$$

setzen. In der von Herrn Edlund angenommenen Formel ist also die Annahme versteckt, dafs *der Kraftzuwachs unabhängig ist von dem gerade vorhandenen Deficit und proportional dem Zuwachs der dem Ruhezustande entsprechenden Kraft.* Darin aber läge schon ein Widerspruch, da der Zuwachs σ doch auch nur ein Theil des Deficits wäre und man müfste daher den Ausdruck für δ anders *deuten*, und zwar durch Einführung des Werthes für die Kraft $f = \frac{1}{r^3}$:

$$\delta = 2\alpha f^{\frac{3}{2}} [1 + \varphi(-h)]$$

d. h. man müfste annehmen, *dafs der Kraftzuflufs proportional sey der $\frac{3}{2}$sten Potenz der Kraft selbst!*

Man verstehe mich recht! der in δ auftretende Factor $\frac{2\alpha}{r^3}$ kann nicht ausdrücken, dafs δ proportional sey dem Kraftzuwachs $\frac{2\alpha}{r^3}$, denn dieser Kraftzuwachs kann sich doch nur dadurch manifestiren, dafs er beim Eintritt des Theilchens in die neue Wegeabtheilung ein Deficit darstellt — dann aber müfste sich auf analoge Weise der andere Theil des Deficits $\left(-\frac{\varphi(-h)}{r^3}\right)$ in dem Ausdruck von δ manifestiren, was nicht der Fall ist. So werden wir denn zu der obigen Annahme gedrängt, die denn doch eine zu geringe Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Wichtiger ist der folgende Einwurf: δ besteht aus zwei Theilen, von denen der erste unabhängig ist von der Geschwindigkeit h, der zweite dagegen von h abhängt, im Vergleiche mit dem ersten Theile aber äufserst klein ist. Denken wir uns die Geschwindigkeit des beweglichen Theilchens verdoppelt, so erhalten wir das Resultat, dafs der Kraftzuwachs δ in seinem gröfsten Haupttheile $\left(\frac{2\alpha}{r^3}\right)$ unveränderlich bleibt und der additive kleine Theil $\frac{2\alpha}{r^3}\varphi(-h)$ einen anderen Werth, nämlich $\frac{2\alpha}{r^3}\varphi(-2h)$ erhält, obwohl nun das Theilchen sich nur die Hälfte der früheren Zeit über in dem betreffenden Abschnitt befindet

und der Wirkung der äufseren Kraft ausgesetzt ist. Das ist unfafsbar! Noch sonderbarer erscheint die Sache, wenn man annimmt, die Bewegung habe sich um das Doppelte verlangsamt. Auch in diesem Falle ist der Hauptzuwachs der Kraft wieder derselbe, $\frac{2\sigma}{r^3}$, und nur der kleinste Theil des Zuwachses ein anderer. Wie ist das möglich? Als die Geschwindigkeit h war, hat die äufsere Kraft in der kurzen Zeit τ nicht Zeit, das Deficit w voll auszufüllen, indem ein sehr kleiner Theil desselben übrig blieb; als nun aber die Zeit *die doppelte* wurde, war die äufsere Kraft doch nicht im Stande, dieses winzige Ueberbleibsel des Deficites auszufüllen und ebensowenig, als die Zeit die tausendfache der früheren war? Das ist logisch undenkbar und liegt darin ein Widerspruch, zu welchem die Grundideen der Edlund'schen Theorie unwiderstehlich hindrängen.

Auf alle Betrachtungen dieses § wird man nun entgegnen, dafs dieselben auf ganz eigenthümlichen Anschauungen gegründet sind, die, am Anfang dieses § aufgestellt, sich in Herrn Edlund's Schriften nirgends vorfinden. Darauf erwidere ich, dafs, wenn man α immer kleiner werden läfst, man den wirklichen Verhältnissen immer näher kommt, ohne dafs dabei die obigen Betrachtungen modificirt werden. Am klarsten ist dies wohl bei dem letzten Einwurf: selbst wenn man für unendlich kleine α zur Grenze übergeht, mufs man zugeben, dafs bei der halben Geschwindigkeit das Theilchen doppelt so lange der Einwirkung der äufseren Kraft ausgesetzt ist, und doch sollte der kleinste Theil des übrig gebliebenen Deficites nicht ausgefüllt werden! Und bei der doppelten, ja der zehnfachen Geschwindigkeit sollte der grofse, dem wirklichen Anwachsen der äufseren Kraft entsprechende Theil des Deficites wie früher ausgefüllt werden! Das scheint mir ein unlösbarer Widerspruch.

§ 4.

Ich glaube, daſs selbst bei Zulassung aller oben erwähnten unwahrscheinlichen Annahmen dennoch die Theorie des Herrn Edlund zu Resultaten führt, welche mit den feststehenden Thatsachen im Widerspruche stehen. Es legt nämlich Herr Edlund der Function ψ das entgegengesetzte Vorzeichen bei, als es meiner Meinung nach haben muſs. Herr Edlund macht die folgenden Schlüsse (pag. 13 bis 14): es bewege sich das Theilchen m mit negativer Beschleunigung von x bis y auf das Theilchen m' zu,

$$\underset{x \underbrace{\quad}_{\Delta r} y \qquad r}{\overset{m \qquad\qquad m'}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}}$$

so daſs die Geschwindigkeit bei x gröſser ist als bei y. Dann muſs die Abstoſsungskraft gröſser seyn als sie es im Falle der gleichförmigen Bewegung gewesen wäre, da sich das Theilchen in der Nähe von x schneller bewegt, als bei y und daher längere Zeit sich aufhält in den Punkten, wo die Abstoſsungskraft die gröſsere ist. — Das eigenthümliche Versehen, welches mir in dieser Betrachtung zu stecken scheint, besteht in Folgendem: Herr Edlund vergleicht die Kraft bei der verlangsamten Bewegung mit der bei gleichförmiger Bewegung — aber *welche* gleichförmige Bewegung muſs zum Vergleiche herangezogen werden? Doch offenbar die in der Entfernung r, also im Punkte y stattfindende; Herr Edlund aber nimmt zum Vergleiche offenbar den Fall einer gleichförmigen Bewegung mit derjenigen Geschwindigkeit, welche bei x, in der Entfernung $r + \Delta r$, stattfindet und erhält so einen Zuwachs an Kraft durch die verlangsamte Bewegung bei y, und darin scheint mir eben der Fehler zu stecken. Meiner Meinung nach müſste folgendermaſsen geschlossen werden: es sey in der Entfernung r, bei y die augenblickliche Geschwindigkeit h, während sie bei x den Werth $h + \Delta h$ gehabt hatte; diese Bewegung vergleichen wir mit der gleichförmigen Bewegung mit constanter Geschwindig-

keit h und erhalten offenbar im ersteren Falle eine kleinere Kraft als im letzteren, da das Theilchen m sich bei x zu rasch bewegte und daher mit gröſserem Deficit nach y kommt, als es der Fall gewesen wäre, wenn das Theilchen m auch bei x die Geschwindigkeit h gehabt hätte. Auf analoge Weise erhält Herr Edlund für den Fall, daſs sich m mit positiver Beschleunigung von m' entfernt, eine verhältniſsmäſsig zu groſse Kraft, während sie meiner Meinung nach zu klein seyn wird. *Die von Herrn Edlund mit ψ bezeichnete Function ist* in den beiden allein in Betracht kommenden Fällen, wie es mir scheint, *negativ* und nicht positiv; dies führt zu dem Resultate, daſs zwei parallele Stromelemente sich abstoſsen und nicht wie Herr Edlund es findet (pag. 18, Formel [5]) sich anziehen.

Mit der Deduction der Formel (13) pag. 21 (siehe oben [1]) fällt aber auch der Werth derselben und damit auch fast die ganze Theorie, welche sich in ihren wichtigsten Theilen: Electrodynamik, Electrolyse (pag. 50), Drehung der Polarisationsebene (pag. 63) und Induction (pag. 64) auf diese Formel stützt. Welchen Werth die Theorie behält, wenn man die Deduction der Formel ganz aufgiebt und dieselbe ohne Herleitung als Ausgangspunkt weiterer Rechnungen nimmt (wie Aehnliches in letzter Zeit oft genug geschehen ist) — wage ich nicht zu untersuchen.

Gegen das Grundprincip selbst, welches sehr einleuchtend klingt, läſst sich Manches bemerken. Ohne mich bei dem Worte „extérieure", dessen Bedeutung mir unklar ist, aufzuhalten, muſs ich gestehen, daſs mir das Princip durchaus nicht ohne Weiteres richtig zu seyn scheint. Jeder „*Vorgang*" braucht Zeit — aber wer vermöchte die Grenze zu ziehen, wo der Vorgang aufhört? Wenn zwei elastische Kugeln auf einander stoſsen, so ist ihr Aneinanderprallen, die Zusammendrückung, das Auseinanderfahren bis zur Trennung ein Vorgang, der allerdings unzweifelhaft Zeit gebraucht. Nehmen wir aber *die erste Berührung* — auch das ist ein Vorgang, der aber absolut keine Zeit braucht, ebensowenig wie die letzte Trennung.

Gleitet ein schwerer Körper auf einer glatten Fläche, so ist die Berührung einer gewissen Stelle dieser Fläche ein Vorgang, und doch ist die Zeit, die vergeht von dem Augenblick an, daſs der gleitende Körper an eine gewisse Stelle der Fläche gelangt ist, bis er diese Stelle berührt, absolut gleich Null! Ganz *analog* mag es mit der Kraft seyn — sowie das sich bewegende Theilchen an eine Stelle gekommen ist, wird es gleichsam von der dort wirkenden Kraft berührt, erfaſst und ist dazu absolut keine Zeit nöthig. —

Mit aller Reserve möchte ich es wagen den Gedanken auszusprechen, daſs das Edlund'sche Grundprincip vielleicht durch das folgende zu ersetzen ist: *Jeder Vorgang braucht einen endlichen Raum in dem er geschieht.* Dies Princip würde in seiner Anwendung zu einer Negirung des Continuitätsprincipes und der Anwendbarkeit der Theorie der unendlich kleinen Gröſsen in der mathematischen Physik führen — es ist noch zu früh den Werth eines solchen Resultates zu discutiren.

Zum Schlusse will ich mir eine kleine Bemerkung zu Herrn Edlund's letzter Arbeit — Pogg. Ann. CLVI, p. 251, erlauben. Herr Edlund will beweisen, daſs der galvanische Widerstand von der Bewegung des Leiters abhängig sey und macht dazu einen Versuch. (S. Taf. I, Fig. 1 a. a. O.) Den, bei der Bewegung der Flüssigkeit bei *G* beobachteten Ausschlag erklärt Herr Edlund dadurch, daſs in dem Einen der beiden Zweige *dc* und *de* der Widerstand gestiegen, in dem Andern gesunken sey. Man könnte sich aber auch den ganzen Vortrag noch anders so erklären, daſs durch die Bewegung der Flüssigkeit in der ganzen Strecke *ce* eine neue elektromotorische Kraft entstanden ist, und dadurch ein Strom, der sich durch den geschlossenen Kreis *cfghnec* entladet. Es wäre das ein Diaphragmastrom, merklich gemacht durch die groſse Geschwindigkeit der Flüssigkeit und die Feinheit des benutzten Galvanometers — wie er ja ganz ähnlich auch bei den Zöllner'schen Versuchen (Pogg. Ann. T. 148) sich manifestirte.

VI. *Volumchemische Studien von W. Ostwald,*

Assistenten am physikalischen Cabinet zu Dorpat.

I. Ueber das Berthollet'sche Problem.

Auf die Frage, wie in wässeriger Lösung zwei Säuren sich in eine Basis theilen, wenn alles gelöst bleibt, giebt bekanntlich die gewöhnliche chemische Analyse keine Antwort. Dafs man durch besondere Kunstgriffe auf chemischem Wege einen Einblick in diese Verhältnisse gewinnen kann, haben Berthelot und St. Martin gezeigt[1]), ihr Verfahren aber ist, wie der Natur der Sache gemäfs jedes, das mit chemischen Mitteln an die Frage herantritt, keineswegs einwurfsfrei. — Denn eine strenge Prüfung auf ihre Zuverlässigkeit bestehen nur solche Methoden, welche ohne Eingriff in die chemischen Verhältnisse des Untersuchungsobjectes die chemische Veränderung mittelst einer durch dieselbe bedingten physikalischen zu messen gestatten. Von solchen sind bisher mit Erfolg zwei angewendet worden: von A. Müller die ihrer Natur nach auf sehr wenig Objecte beschränkte calorimetrische[2]) und von J. Thomsen, die auf Wärmeerscheinungen beruhende, welche von sehr allgemeiner Anwendbarkeit ist und die genauesten und zuverlässigsten Resultate[3]) ergeben hat. Leider lassen sich solche nur mit einem grofsen Aufwande von Hilfsmitteln und Geschicklichkeit erreichen und die Methode hat kaum je Aussicht, Eingang in die chemischen Laboratorien zu gewinnen.

In Folgendem werde ich ein Verfahren entwickeln, welches mindestens ebenso allgemein anwendbar ist, wie das calorimetrische und dazu in den Anforderungen, die es an die Hilfsmittel und Geschicklichkeit des Experimentirenden stellt, das Maafs des Gewöhnlichen in keiner

1) Ann. de chimie et de physique (4) XXVI. 433. (1872.)

2) A. Müller, Pogg. Ann. Ergänzungsband VI, S. 123. (1875.)

3) J. Thomsen, Pogg. Ann. 138, S. 65. (1869.)

Weise überschreitet. Es beruht auf der Messung der zugänglichsten aller physikalischen Constanten, des specifischen Gewichtes[1]. Denn bei chemischen Vorgängen in wässrigen Lösungen finden im Allgemeinen Volumänderungen statt; sind nun dieselben von einem Stoff zum anderen verschieden, so ergiebt bei gleichzeitiger Wirkung zweier Stoffe die Messung der Aenderung das Verhältnifs der resp. Wirkungsgröfsen.

Als Beispiel für die Ausführung dieser Methode gebe ich zwei Versuchsreihen über die Wirkung der Schwefel- und Salpetersäure einerseits, der Schwefel- und Chlorwasserstoffsäure andererseits auf Natron. Ich schliefse mich dabei eng der erwähnten Arbeit von Thomsen an, da ein durchgehender Vergleich mit den Resultaten derselben über den Werth oder Unwerth der neuen Methode entscheiden mufs.

Zur Ausführung der Versuche stellte ich verdünnte Lösungen von Natron[2] und den drei Säuren her, die sich genau Volum für Volum sättigten. So verdünnt, wie Thomsen sie anwendet, konnte ich sie leider nicht nehmen, da die Genauigkeit sonst zu sehr gelitten hätte; die Natronlösung hatte die Zusammensetzung $NaO + 102.5 HO$, während Thomsen Lösungen von $NaO + 200 HO$ benutzte; meine war also beinahe doppelt so concentrirt. Die Flüssigkeiten wurden vermittelst kalibrirter Büretten

1) Während der Ausführung vorliegender Arbeit stiefs ich bei der Zusammenstellung der einschlägigen Litteratur auf eine sehr gründliche Abhandlung von K. Hofmann (Pogg. Ann. 133, S. 575 1868), die einen allerdings erfolglos gebliebenen Versuch enthält, die Dichtigkeiten (und die Brechungsexponenten) zur Beantwortung einer ähnlichen Frage anzuwenden. Auf Grund derselben mufs ich Hofmann die Priorität der Idee zugestehen und kann, wiewohl ich unabhängig von ihm gearbeitet habe, für mich nur die erste erfolgreiche Anwendung derselben in Anspruch nehmen.

2) Die Darstellung von chemisch-reinem Natron wurde mir durch die Güte des Herrn Professors Dr. C. Schmidt ermöglicht; derselbe gestattete mit gewohnter Freundlichkeit die Ausführung vorliegender Arbeit in seinem Laboratorium.

mit Erdmann'schem Schwimmer in passenden Mengen abgemessen, sorgfältig gemischt und sodann auf ihr specifisches Gewicht untersucht.

Meine Pyknometer faſsten etwa 10 Cc.; sie hatten die von Sprengel[1]) angegebene Form einer U-Röhre mit horizontalen capillaren Armen und gestatteten ein schnelles und genaues Arbeiten. Die Temperatur der zu wägenden Flüssigkeiten wurde durch ein groſses doppeltes Wasserbad stets auf 20° gebracht; das Thermometer war in Zehntelgrade getheilt. Beim Wägen diente ein ähnlicher Apparat als Gegengewicht, der Gewichtssatz war corrigirt.

Die Fehler bei der Bestimmung des specifischen Gewichtes nach dieser Methode betragen höchstens fünf Einheiten der fünften Decimale, entsprechend 0,5 Milligrammen, und setzen sich aus den Fehlern dreier Wägungen = 0.3 Mgr., der Temperaturbestimmung = 0.1 Mgr. und der Einstellung der Flüssigkeit auf die Marke = 0·1 Mgr. zusammen. Fernere Abweichungen werden aber durch die Abmessung der einzelnen Lösungen und besonders durch die Kohlensäure-Anziehung der Natronlösung veranlaſst und steigern den Gesammtfehler auf 1 Mgr. oder eine Einheit der vierten Decimale im Maximo. Anfangs erhielt ich bei der Natronlösung noch viel gröſsere Differenzen, die ich durch folgende Vorrichtung auf das angegebene Maaſs zurückführte. Die Natronlösung befand sich in einer groſsen mit einem doppelt durchbohrten Kork verschlossenen Vorrathsflasche, aus der sie durch einen stets gefüllten Heber mit Quetschhahn unmittelbar in die Bürette strömte. Der Heber ging durch die eine Bohrung; durch die andere führte eine Glasröhre zu einer kleinen Waschflasche, die mit *derselben* Natronlösung, wie die Vorrathflasche gefüllt war. Die beim Abfüllen nachdringende Luft gab auf diese Weise ihren Kohlensäuregehalt ab und nahm soviel Wasserdampf auf, daſs sie die Concentration der Lösung nicht ändern konnte. Auſserdem wurde die Natronlösung immer zuletzt zugemischt.

1) Pogg. Ann. 150, S. 459 (1873).

Die folgende Tabelle giebt nun die specifischen Gewichte der untersuchten Flüssigkeiten. Der Bequemlichkeit wegen sind Aequivalentformeln benutzt worden; in Folge der Versuchsanordnung drücken also die Formeln der Mischungen gleichzeitig ihre Volumverhältnisse aus. Die erste Spalte enthält die Versuchsnummer, die zweite die Zusammensetzung der Lösungen, die dritte die specifischen Gewichte, bezogen auf Wasser von 20° = 100000

No.	Formel	spec. Gew.
1	$\dot{\mathrm{Na}}$	104047
2	$\dot{\mathrm{Na}}$	104055
	Mittel	104051
3	$\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102970
4	$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	103084
5	HCl	101653
6	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102961
7	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102958
	Mittel	102959
8	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{5}{4}\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102903
9	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{3}{2}\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102876
10	$\dot{\mathrm{Na}} . 2\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102856
11	$\dot{\mathrm{Na}} . 3\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102865
12	$\dot{\mathrm{Na}} . 5\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$	102891
13	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102633
14	$\dot{\mathrm{Na}} . 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102773
15	$\dot{\mathrm{Na}} . 3\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102848
16	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{1}{4}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102842
17	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{1}{2}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102795
18	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102781
19	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102834
20	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . 3\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102876
21	$\dot{\mathrm{Na}} . 2\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102872
22	$\dot{\mathrm{Na}} . 3\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102888
23	$\dot{\mathrm{Na}} . 4\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102904
24	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{1}{2}\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{3}{4}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102732
25	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{1}{3}\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102735
26	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{1}{3}\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{2}{3}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102771
27	$\dot{\mathrm{Na}} . 2\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102831
28	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{1}{4}\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{1}{2}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	102794
29	$\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	103028
30	$\dot{\mathrm{Na}}$. HCl	101931
31	$\dot{\mathrm{Na}}$. HCl	101930
	Mittel	101931
32	$\dot{\mathrm{Na}}$. 2 HCl	101842
33	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{1}{2}$ HCl	102509
34	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}}$. HCl	102319
35	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}}$. 2 HCl	102134
36	$\dot{\mathrm{Na}} . \overset{\cdots}{\mathrm{S}}$. 3 HCl	101964
37	$\dot{\mathrm{Na}} . 2\overset{\cdots}{\mathrm{S}}$. HCl	102477
38	$\dot{\mathrm{Na}} . \frac{1}{4}\overset{\cdots}{\mathrm{S}} . \frac{1}{2}$ HCl	102444

Ueber die Berechnung der Versuche ist Folgendes zu bemerken. Die specifischen Gewichte der vorstehenden Tabelle beziehen sich auf gleiche Volumina der Gemische, welche aus sehr verschiedenen Antheilen der Componenten bestehen. Wollte man, um die Verdichtung oder Ausdehnung durch den chemischen Vorgang zu erfahren, einfach die Differenz zwischen dem gefundenen specifischen Gewicht und dem aus den Componenten berechneten bilden, so erhielte man Zahlen, die sich auf ganz verschiedene chemische Einheiten beziehen. Um diesem Mifsstande zu entgehen, mufs man nur die in vorstehender Tabelle angegebenen Werthe mit der Zahl des in der Formel befindlichen Aequivalentes multipliciren; da beim Ansetzen der Formel stets das des Natrons = 1 genommen worden ist, so sind auf diese Weise alle Verdichtungen auf 1 Aeq. Natron bezogen und unter sich und mit den Thomsen'schen Wärmeversuchen vergleichbar.

Berechnen wir nun die Versuche, so finden wir Folgendes.

Bei der Verbindung von Natron und Schwefelsäure findet eine Verminderung des specifischen Gewichtes statt, denn

$$
\begin{array}{rll}
1 \text{ Vol. } \dot{\text{N}}\text{a} & = 104051 & (1 \text{ und } 2) \\
\text{„ „ } \dddot{\text{S}} & = 102970 & (3) \\
\hline
\text{Summe} & = 207021 & \\
\dot{\text{N}}\text{a} . \dddot{\text{S}} \text{ gefunden} & = 205918 & (6 \text{ und } 7) \\
\hline
\text{Differenz} & - 1103 &
\end{array}
$$

(Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Nummer des benutzten Versuches.)

Ein Gleiches gilt für Natron und Salpetersäure

$$
\begin{array}{rll}
\dot{\text{N}}\text{a} & = 104051 & \\
\overset{\therefore}{\text{N}} & = 103083 & (4) \\
\hline
 & 207134 & \\
\dot{\text{N}}\text{a} . \overset{\therefore}{\text{N}} \text{ gefunden} & = 205266 & (13) \\
\hline
 & - \quad 1868 &
\end{array}
$$

Der Unterschied beider Verminderungen beträgt

$$- 1868 - (-1103) = - 765$$

und die Grundbedingung für die Anwendbarkeit der Methode (Seite 155) ist erfüllt.

Die Vermischung von schwefelsaurem Natron mit Schwefelsäure giebt zu einer Ausdehnung Anlaſs

$\dot{Na}\dddot{S} = 205918$ (6 u. 7)
$\frac{1}{4}\dddot{S} = 25743$ (3)
231661
$\dot{Na}\dddot{S} . \frac{1}{4}\dddot{S} = 231532$ (8)[1]
$- 129$

$\dot{Na}\dddot{S} = 205918$
$\dddot{S} = 102970$
308888
$\dot{Na}\dddot{S} . \dddot{S} = 308568$ (10)
$- 320$

$\dot{Na}\dddot{S} = 205918$
$4\dddot{S} = 411880$
617798
$\dot{Na}\dddot{S} . 4\dddot{S} = 617346$ (12)
$- 452$

$\dot{Na}\dddot{S} = 205918$
$\frac{1}{2}\dddot{S} = 51485$
257403
$\dot{Na}\dddot{S} . \frac{1}{2}\dddot{S} = 257190$ (9)
$- 213$

$\dot{Na}\dddot{S} = 205918$
$2\dddot{S} = 205940$
411858
$\dot{Na}\dddot{S} . 2\dddot{S} = 411460$ (11)
$- 398$

Diese Versuche sind den von Thomsen angestellten (a. a. O. S. 75) entsprechend angeordnet. Thomsen vereinigt die seinigen mittelst einer empirischen Formel von der Form $\frac{n}{n + 0.8} \times$ Const.; versucht man dieselbe auf meine Zahlen anzuwenden, so erhält man *unter Beibehaltung der Constanten* 0.8 die Formel

$$\frac{n}{n + 0.8} \times 555$$

und mittelst derselben folgende Vergleichstafel

1) Es ist mir wohl bekannt, daſs in der letzten Rechnung sowie in allen folgenden ein kleiner theoretischer Fehler steckt. Man überzeugt sich aber leicht, daſs derselbe sehr gering ist; er erreicht nie die Versuchsfehler und ich behalte zu Gunsten der Uebersichtlichkeit diese Praxis bei. Aus demselben Grunde habe ich auch unterlassen, die specifischen Gewichte in Volumina zu übersetzen.

Reaction	gefunden	berechnet
$\dot{Na}\dddot{S},\ \frac{1}{4}\dddot{S}$	— 129	— 132
$\dot{Na}\dddot{S},\ \frac{1}{2}\dddot{S}$	— 213	— 213
$\dot{Na}\dddot{S},\ \dddot{S}$	— 320	— 309
$\dot{Na}\dddot{S},\ 2\dddot{S}$	— 398	— 396
$\dot{Na}\dddot{S},\ 4\dddot{S}$	— 452	— 462

welche eine durchaus genügende Uebereinstimmung bekundet. Gleichzeitig ersieht man aus der übereinstimmenden Gestalt der Formeln, daſs meine Zahlen sich von den Thomsen'schen nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Bei der Reaction von Salpetersäure auf salpetersaures Natron findet eine kleine Verminderung des specifischen Gewichtes statt, die wenig die Versuchsfehler übersteigt.

$$\begin{array}{rl} \dot{Na}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 205266\ (13) \\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 103083 \\ \hline & 308349 \\ \dot{Na}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 308319\ (14) \\ \hline - & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dot{Na}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 205266 \\ 2\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 206166 \\ \hline & 411432 \\ \sqrt{\dot{Na}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N},2\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N}} & 411392\ (15) \\ \hline - & 40 \end{array}$$

Wenn Salpetersäure auf schwefelsaures Natron wirkt, so vermindert sich das specifische Gewicht ziemlich beträchtlich

$$\begin{array}{rl} \dot{Na}\,\dddot{S} = & 205918 \\ \frac{1}{4}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 25771 \\ \hline & 231689 \\ \dot{Na}\,\dddot{S},\ \frac{1}{4}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 231395\ (16) \\ \hline - & 294 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dot{Na}\,\dddot{S} = & 205918 \\ \frac{1}{2}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 51542 \\ \hline & 257460 \\ \sqrt{\dot{Na}}\,\dddot{S},\ \frac{1}{2}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 256988\ (17) \\ \hline - & 427 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \dot{Na}\,\dddot{S} = & 205918 \\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 103083 \\ \hline & 309001 \\ \dot{Na}\,\dddot{S},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 308343\ (18) \\ \hline - & 658 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dot{Na}\,\dddot{S} = & 205918 \\ 2\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 206166 \\ \hline & 412084 \\ \dot{Na}\,\dddot{S},\ 2\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 411336\ (19) \\ \hline - & 748 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{Na}\,\dddot{S} &= 205918 \\
3\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 309249 \\
\hline
& \ 515167 \\
\dot{Na}\dddot{S},\, 3\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 514380\ (20) \\
\hline
- &\ \ \ \ \ \ \ 787
\end{aligned}
$$

Um nun aus diesen Zahlen die Gröfse der Zersetzung des schwefelsauren Natrons durch Salpetersäure zu finden, mufs man den Einflufs der Nebenreactionen berücksichtigen. Die Wirkung der Schwefelsäure auf schwefelsaures Natron ist beträchtlich, und somit in Rechnung zu ziehen. Die der Salpetersäure auf salpetersaures Natron kann zum Zweck einer ersten Annäherung vernachlässigt werden, ebenso die der freien Säuren und der neutralen Salze auf einander, wie folgende Zahlen lehren:

$$
\begin{aligned}
\dot{Na}\,\dddot{S} &= 205918 \\
\dot{Na}\,\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 205266 \\
& \ 411184 \\
\dot{Na}\dddot{S},\, \dot{Na}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 411174\ (28) \\
\hline
- &\ \ \ \ \ \ \ \ 10
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\dddot{S} &= 102970 \\
\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 103083 \\
\hline
& \ 206053 \\
\dddot{S} + \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} &= 206056\ (29) \\
\hline
+ &\ \ \ \ \ \ \ \ \ 3
\end{aligned}
$$

Die Rechnung für die Wirkung eines Aequivalents Salpetersäure auf ein Aequivalent schwefelsaures Natron kann also ganz wie die Thomsen'sche (a. a. O. S. 87) geführt werden; man hat, wenn x die Menge des entstandenen salpetersauren Natrons bezeichnet:

$$
\dot{Na}\,\dddot{S},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = -x\,(\dot{Na},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} - \dot{Na},\ \dddot{S}) + (1-x)\left(\dot{Na}\,\dddot{S},\ \frac{x}{1-x}\,\dddot{S}\right).
$$

$\dot{Na}\,\dddot{S},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N}$ ist nun $= -856$ und die Differenz $(\dot{Na}\,\dddot{S} - \dot{Na},\ \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N}) = -765$; die Gleichung wird also

$$
-658 = -x\,.\,765 + (1-x)\left(\dot{Na}\,\dddot{S},\ \frac{x}{1-x}\,\dddot{S}\right).
$$

Setzt man für x denselben Werth $\frac{1}{3}$, der Thomsen's Gleichung befriedigt, so findet man

$$-658 = -\frac{2}{3} \cdot 765 + \frac{1}{3}(-396) = -643.$$

Die Differenz 15 bleibt innerhalb der Versuchsfehler. ***Beide Methoden, die calorimetrische und die volumetrische führen also zu demselben Resultat.*** Zur Berechnung der anderen Versuche mit schwefelsaurem Natron und Salpetersäure ist die Guldberg'sche Formel für die Massenwirkung[1]) (a. a. O. S. 94) anzuwenden; man erhält, wenn β die Menge der Salpetersäure bedeutet:

β	x	$(1-x)\left(\dot{Na}\dddot{S}, \frac{x}{1-x}\dddot{S}\right)$	$\dot{Na}\dddot{S}, \beta \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N}$ berechnet	$\dot{Na}\dddot{S}, \beta \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N}$ beobachtet
$\frac{1}{4}$	0·232	— 116	— 292	— 294
$\frac{1}{2}$	0·432	— 152	— 476	— 472
1	0·778	— 133	— 641	— 658
2	0·845	— 77	— 723	— 748
3	0·903	— 51	— 763	— 787

Die scheinbar grofsen Abweichungen in den beiden letzten Spalten erklären sich durch die starke Multiplication der Versuchswerthe, thatsächlich überschreiten sie nirgend die Fehlergrenze.

Aus den der Reaction $(\dot{Na}\dddot{S}^{1+\nu}, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N})$ entsprechenden Versuchen folgt (vergl. Thomsen's 1. Reihe zweiter Abschnitt, a. a. O. Seite 80 und 96):

$$\begin{array}{rrl} \dot{Na}\dddot{S}^{2} = & 308568 & (10) \\ 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 206166 & \\ \hline & 514734 & \\ \dot{Na}\dddot{S}^{2}, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 514360 & (21) \\ \hline - & 370 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} \dot{Na}\dddot{S}^{3} = & 411460 & (21) \\ 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 206166 & \\ \hline & 617626 & \\ \dot{Na}\dddot{S}^{3}, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 617328 & (22) \\ \hline - & 298 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \dot{Na}\dddot{S}^{4} = & 514380 & \text{(interpolirt)} \\ 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 206166 & \\ \hline & 720546 & \\ \dot{Na}\dddot{S}^{4}, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{N} = & 720328 & (23) \\ \hline - & 218 & \end{array}$$

1) Guldberg et Waage: Etudes sur les affinités chimiques. Christiania 1867.

Nimmt man hierzu für $\gamma = 0$ die Reaction $(\dot{Na}\ddot{S}, \dddot{N})$ aus der vorigen Tafel, so kommt nach Guldberg's Formel:

γ	x	$(1-x)\left(\dot{Na}\ddot{S}, \frac{\gamma+1}{1-x}\ddot{S}\right)$	$(\dot{Na}\ddot{S}, \gamma\ddot{S})$	$\dot{Na}\ddot{S}^{1+\gamma}, 2\dddot{N}$	
				berechnet	beobacht.
0	0.845	77	0	723	748
1	0.742	129	320	377	374
2	0.665	168	398	280	298
3	0.607	201	452	213	218

Die Uebereinstimmung ist genügend.

Bei der Einwirkung von Salpetersäure auf ein Gemenge von schwefelsaurem und salpetersaurem Natron wird das specifische Gewicht ebenfalls kleiner. (Vergl. Thomsen's dritte Reihe, S. 82 und 98.) Die Versuche geben:

$$\tfrac{1}{2}(\dot{Na}\ddot{S} + \dot{Na}\dddot{N}) = 205592 \text{ (6 u. 13)}$$
$$\tfrac{1}{4}\dddot{N} = 25771$$
$$231363$$
$$\dot{Na}\,.\,\tfrac{1}{2}\ddot{S}\,.\,\tfrac{3}{4}\dddot{N} = 231147 \text{ (24)}$$
$$-\ 216$$

$$\tfrac{1}{2}(\dot{Na}\ddot{S} + \dot{Na}\dddot{N}) = 205592$$
$$\tfrac{1}{2}\dddot{N} = 51542$$
$$257134$$
$$\dot{Na}\,.\,\tfrac{1}{2}\ddot{S}\,.\,\dddot{N} = 256838 \text{ (25)}$$
$$-\ 296$$

$$\tfrac{1}{2}(\dot{Na}\ddot{S} + \dot{Na}\dddot{N}) = 205592$$
$$\dddot{N} = 103083$$
$$\dot{Na}\,.\,\tfrac{1}{2}\ddot{S}\,.\,\tfrac{3}{2}\dddot{N} = 308675$$
$$308313$$
$$-\ 362$$

Mit der Formel zeigt sich folgende Uebereinstimmung:

β	x	$(\tfrac{1}{2}-x)\left(\dot{Na}\ddot{S}, \frac{x}{\frac{1}{2}-x}\ddot{S}\right)$	$[\tfrac{1}{2}(\dot{Na}\ddot{S} + \dot{Na}\dddot{N}), \beta\dddot{N}]$	
			berechnet	beobachtet
$\tfrac{1}{4}$	0.167	− 73	− 201	− 216
$\tfrac{1}{2}$	0 271	− 76	− 283	− 296
1	0.371	− 57	− 341	− 362

Die Einwirkung der Schwefelsäure auf salpetersaures Natron erhöht das specifische Gewicht, denn:

$$\begin{array}{rlrl}
\dot{\mathrm{Na}}\,\dddot{\mathrm{N}} & = 205266 & \dot{\mathrm{Na}}\,\dddot{\mathrm{N}} & = 205266 \\
\dddot{\mathrm{S}} & = 102970 & 2\dddot{\mathrm{S}} & = 205940 \\
\hline
 & 308236 & & 411206 \\
\dot{\mathrm{Na}}\,\dddot{\mathrm{N}}\,.\,\dddot{\mathrm{S}} & = 308346 & \dot{\mathrm{Na}}.\dddot{\mathrm{N}}.2\dddot{\mathrm{S}} & = 411842 \\
\hline
 & + \quad 110 & & + \quad 118
\end{array}$$

Die Berechnung ergiebt (Thomsen, Seite 99):

γ	x	$x\left(\dot{\mathrm{Na}}\,\dddot{\mathrm{S}}, \frac{\gamma - x}{x}\dddot{\mathrm{S}}\right)$	$\dot{\mathrm{Na}}\,\dddot{\mathrm{N}}, \gamma\,\dddot{\mathrm{S}}$ berechnet	beobachtet
1	0.333	— 132	+ 123	+ 110
2	0.458	— 202	+ 148	+ 118

Dieselben Rechnungen für Chlorwasserstoffsäure, Schwefelsäure und Natron ergeben zunächst:

$$\begin{array}{rl}
\dot{\mathrm{Na}} & = 104051 \\
\mathrm{H\,Cl} & = 101653 \;\; (5) \\
\hline
 & \;\; 205704 \\
\mathrm{Na\,Cl,\; H\,Cl} & = 202851 \;\; (30 \text{ und } 31) \\
\hline
 & - \quad 1843
\end{array}$$

Der Unterschied der Verminderung des specifischen Gewichtes gegenüber der Schwefelsäure beträgt

$$- 1843 - (- 1103) = - 740.$$

Er ist fast gleich dem für Salpetersäure gefundenen — 765.

Durch die Uebersättigung des Chlornatriums mit Chlorwasserstoffsäure entsteht eine kaum merkliche Verminderung des specifischen Gewichtes.

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{Na\,Cl} & = 203861 \\
\mathrm{H\,Cl} & = 101653 \\
\hline
 & \;\; 305514 \\
\mathrm{Na\,Cl\,.\,HCl} & = 305526 \;\; (32) \\
\hline
 & - \quad 12
\end{array}$$

Die Einwirkung der Chlorwasserstoffsäure auf schwefelsaures Natron vermindert das specifische Gewicht beträchtlich:

$$\dot{Na}\ddot{S} = 205918 \qquad \dot{Na}\ddot{S} = 205918$$
$$\tfrac{1}{2}HCl = \underline{\ 50827} \qquad HCl = \underline{101653}$$
$$256745 \qquad 307571$$
$$\dot{Na}\ddot{S}.\tfrac{1}{2}HCl = \underline{256273}\ (33) \qquad (\dot{Na}\ddot{S}.HCl) = \underline{306957}\ (34)$$
$$-\quad 472 \qquad -\quad 614$$
$$\dot{Na}\ddot{S} = 205918 \qquad \dot{Na}\ddot{S} = 205918$$
$$2HCl = \underline{203396} \qquad 4HCl = \underline{406612}$$
$$409224 \qquad 602530$$
$$\dot{Na}\ddot{S}, 2HCl = \underline{408536}\ (35) \qquad \dot{Na}\ddot{S}.4HCl = \underline{611784}$$
$$-\quad 688 \qquad -\quad 746$$

Der zweite Versuch ergiebt für die Reaction $(\dot{Na}\ddot{S}, HCl) =$

$$-x(\dot{Na}, HCl - \dot{Na}, \ddot{S}) + (1-x)\left(\dot{Na}\ddot{S}, \frac{x}{1-x}\ddot{S}\right)$$

die Gleichung

$$-618 = -740 \times + (1-x)\left(\dot{Na}\ddot{S}, \frac{x}{1-x}\ddot{S}\right)$$

welche ebenfalls durch $x = \frac{2}{3}$ befriedigt wird, denn

$$-618 = -\frac{2}{3}\,740 + \frac{1}{3}(-396) = -625.$$

Die ganze Reihe berechnet sich demnach in folgender Weise:

β	x	$(1-x)\left(\dot{Na}\ddot{S}, \frac{x}{1-x}\ddot{S}\right)$	$(\dot{Na}\ddot{S}, \beta HCl)$ berechnet	$(\dot{Na}\ddot{S}, \beta HCl)$ beobachtet
$\frac{1}{2}$	0.423	− 152	− 465	− 472
1	0.667	− 132	− 625	− 614
2	0.845	− 75	− 691	− 688
4	0.921	− 41	− 723	− 746

Die Zersetzung des Chlornatriums durch Schwefelsäure

endlich ist mit einer Vermehrung des specifischen Gewichts verbunden.

Na Cl = 203861		Na Cl = 203861	
$\dddot{S}$ = 102970		2 $\dddot{S}$ = 205940	
306831		409801	
Na Cl, $\dddot{S}$ = 306957	(34)	409908	(37)
+ 126		+ 107	

Nach der Formel (a. a. O. Seite 100) wird

γ	x	$x\left(\dot{\text{Na}}\,\dddot{S}, \frac{1-x}{x}\dddot{S}\right)$	Na Cl, $\gamma\,\dddot{S}$ berechnet	Na Cl, $\gamma\,\dddot{S}$ beobachtet
1	0.333	− 132	+ 114	+ 126
2	0.458	− 202	+ 136	+ 107

Damit ist das vorliegende Material erschöpft.

Als allgemeines Resultat kann auf Grund des Gegebenen *die völlige Brauchbarkeit der volumetrischen Methode* zur Lösung des vorliegenden Problems hingestellt werden. In Bezug auf die Genauigkeit ist zu sagen, daſs dieselbe durch Anwendung gröſserer Pyknometer und concentrirterer Lösungen sich leicht steigern läſst.

Bevor ich diesen Aufsatz schlieſse, muſs ich noch Eines erwähnen, was schon oben angedeutet worden ist, es ist dies die frappante *Analogie der thermischen Erscheinungen mit den Veränderungen des specifischen Gewichtes*. Zur Uebersicht habe ich beide in folgender Tabelle zusammengestellt.

Vergleichende Uebersicht der Wärmeentwickelungen und Volumänderungen.

Reaction	Wärme-entwickelung	Verdichtung
$\dot{\mathrm{Na}}, \dddot{\mathrm{S}} - \dot{\mathrm{Na}}, \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−2072	−765
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}} - \dot{\mathrm{Na}}$, H Cl	−1949	−740
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}, \frac{1}{4}\dddot{\mathrm{S}}$	− 396	−129
„ $\frac{1}{2}\dddot{\mathrm{S}}$	− 631	−213
„ $\dddot{\mathrm{S}}$	− 931	−320
„ $2\dddot{\mathrm{S}}$	−1176	−398
„ $4\dddot{\mathrm{S}}$	−1341	−452
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}, \frac{1}{4}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 808	−294
„ $\frac{1}{2}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−1292	−472
„ $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−1752	−658
„ $2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−2026	−748
„ $3\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−2050	−787
$\dot{\mathrm{Na}}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}, \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 39	− 30
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	−2026	−748
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}^2, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 978	−374
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}^3, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 664	−298
$\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}}^4, 2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 520	−221

Reaction	Wärme-entwickelung	Verdichtung
$\frac{1}{2}(\dot{\mathrm{Na}}\dddot{\mathrm{S}} + \dot{\mathrm{Na}}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}), \frac{1}{4}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 546	−216
„ $\frac{1}{2}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 761	−296
„ $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}$	− 968	−362
$\dot{\mathrm{Na}}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}, \dddot{\mathrm{S}}$	+ 288	+110
$\mathrm{Na}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathrm{N}}, 2\dddot{\mathrm{S}}$	+ 379	+118
Na Cl, H Cl	− 32	− 12
$\mathrm{Na}\dddot{\mathrm{S}}$, $\frac{1}{2}$ H Cl	−1247	−472
„ H Cl	−1682	−618
„ 2 H Cl	−1878	−688
„ 4 H Cl	−1917	−746
Na Cl, $\dddot{\mathrm{S}}$	+ 244	+126
Na Cl, $2\dddot{\mathrm{S}}$	+ 336	+107

Die Analogie findet in der That so durchgreifend statt, dafs es unnütz wäre, irgend etwas besonders hervorzuheben.

Nur einmal, und das ist sehr bemerkenswerth, ist sie nicht vorhanden, nämlich bei der Verbindung zwischen Säure und Basis selbst, wo der mächtigen Wärmeentwickelung keine Contraction, sondern eine Dilatation entspricht. Aber schon mit den *Differenzen* beider Erschei-

nungen von einer Säure zur andern beginnt sie und geht dann ohne jegliche Störung, aufser durch innerhalb der Grenzen liegende Versuchsfehler, durch alle Bestimmungen. Ueber ihre Ursache enthalte ich mich zunächst jeder Vermuthung.

Weiteres über die Anwendung der neuen Methode, namentlich bei verschiedenen Temperaturen, sowie über die erwähnte merkwürdige Analogie hoffe ich nach nicht zu langer Zeit in einer Fortsetzung dieser Abhandlung berichten zu können.

Dorpat, den 24. April 1876.

VII. *Ueber den Einflufs des Trichterventils auf die elektrischen Funkenentladungen in der Luft; von W. Holtz.*

Nachdem es mir gelungen war, ein dem Gaugain'schen Ventil analog wirkendes Trichterventil für Geissler'sche Röhren herzustellen[1]), lag es nahe, zu untersuchen, ob nicht auch in der Luft ein zwischen die Elektroden gestellter, oder um eine Elektrode befestigter Trichter einen ähnlichen Erfolg haben werde.

Ich liefs mir für diesen Zweck zunächst einen Holztrichter drehen, welcher bei einer Tiefe von 55^{mm} zwei Oeffnungen von 10 und 85^{mm} und eine so starke Wandung hatte, dafs bei genügender Verrundung der Kanten keine elektrische Ausströmung zu befürchten war. An einer seitlich befestigten Siegellackstange oder einem Ebonitstäbchen konnte derselbe entweder mit der Hand oder mit Hülfe eines Stativs zwischen den Elektroden einer Influenzmaschine gehalten werden. Andernfalls konnte man ihn über eine der Entladungsstangen schieben.

1) Siehe hierüber Poggendorff's Abhandlung d. Ann. Bd. 134, S. 1.

Die beiden Elektroden waren Kugeln von 25^{mm} Durchmesser. Zur Erzeugung der Funken wurden die gewöhnlichen Condensatoren gebraucht. Das Maximum der Schlagweite war unter solchen Verhältnissen 150—170^{mm}.

Wurde die Trichterspitze nun an die negative Electrode gelegt, so liefs sich die Schlagweite bis auf 180^{mm} verlängern, während gar keine oder kaum 30^{mm} lange Funken entstanden, wenn die Trichterspitze an die positive Elektrode gelegt wurde. Wurde der Trichter in die Mitte der Funkenbahn gestellt, so variirte die Schlagweite, so lange sie überhaupt grofs war, mit der Richtung der Oeffnungen wenig, wohl aber trat ein anderer charakteristischer Unterschied hervor. Bis dahin hatte der Funke allemal den Trichter selbst passirt, jetzt geschah dies gewöhnlich nur, wenn die gröfsere Oeffnung nach der positiven Elektrode zeigte, während er andernfalls um den Trichter herumschlug und hierbei meistens seine Aufsenseite streifte. Wurden die Elektroden zu weit genähert, so verschwand dieser Unterschied deshalb, weil der Abstand zwischen dem äufseren und dem inneren Wege zu grofs geworden war; man konnte die frühere Erscheinnng jedoch bis zu einem gewissen Grade wieder hervorrufen, wenn man die Axe des Trichters entsprechend aus der Verbindungslinie der Elektroden verrückte.

Aehnlich gestaltete sich das Resultat, wenn der Trichter nicht, wie bisher, zwischen beiden Elektroden stand, sondern die eine Elektrode umschlofs. Hier waren zwei Fälle zu unterscheiden. Man konnte jenen nämlich über die fragliche Elektrode stülpen, so dafs seine Spitze der andern zugekehrt war, oder man konnte ihn mit der Spitze auf dieselbe Entladungsstange schieben, so dafs seine gröfsere Oeffnung nach der andern Elektrode zeigte. Im ersten Falle erhielt ich, je nach der Polarität der Kugeln, die Schlagweiten von 75 und 40^{mm}, im letztern Falle dem analog diejenigen von 45 und 140^{mm}, d. h. jedesmal eine kleinere, wenn entweder die Spitze nach der positiven, oder die gröfsere Oeffnung nach der negativen Elektrode gewendet war.

Da diese Erfolge möglicher Weise der Leitungsfähigkeit des Materials ihre Ursache verdanken konnten, so stellte ich ähnliche Versuche mit einem Ebonit- und einem Glastrichter an, welchen letzteren ich dadurch gewann, dafs ich von einem käuflichen den Stiel absprengte und die dünnen Ränder beider Oeffnungen zur Vermeidung etwaiger Ausströmungen mit einem dicken Wulst von Siegellack umgab. Die Aufsen- und Innenfläche wurde der bessern Isolirung halber lackirt. Hier fiel nun freilich in einzelnen Fällen der polare Unterschied nicht ganz so deutlich, wie früher, in die Augen, immerhin jedoch deutlich genug, um zu erkennen, dafs der Durchgang der Elektricität ein leichterer war, wenn entweder die kleine Oeffnung nach der negativen, oder die gröfsere nach der positiven Elektrode zeigte.

Die Ursache dieser Erscheinung ist ohne Zweifel zu eng mit dem Wesen der Elektricität verknüpft, als dafs man es wagen könnte, schon jetzt eine für alle Einzelheiten genügende Erklärung zu geben. Ich glaube jedoch, dafs man sich die Vorstellung der Sache erleichtern kann, wenn man annimmt, dafs der elektrische Funke, und namentlich der elektrische Funke von grofser Länge, die Fortsetzung des langgestielten positiven Büschels ist, weil Alles, was alsdann die Entstehung oder Ausbreitung dieses Büschels erschwert, auch nothwendig zur Verkürzung des Funkens beitragen mufs. Betrachten wir nun die Erscheinungen, wie sie sich ohne Condensatoren darstellen, wenn wir die eine oder die andere Elektrode mit einem Trichter bekleiden, so finden wir, dafs die Entstehung und Ausbreitung jenes Büchels am meisten erschwert wird, wenn entweder der Trichter an die negative Elektrode gerückt, der positiven seine kleine, oder an die positive gerückt, der negativen seine grofse Oeffnung zuwendet. Auch scheint es natürlich, dafs sich derselbe Büschel mit seinen grofsen baumartigen Verzweigungen, sobald sich der Trichter zwischen beiden Elektroden befindet, gegen die enge Oeffnung des letzteren sträubt, wie

sich ein Busch widerspenstig zeigen würde, wenn man ihn durch einen Trichter von entsprechender Gröſse so hindurchstecken wollte, daſs seine Zweige zuerst die enge Oeffnung zu passiren hätten.

Man wird einwenden, daſs wenn der elektrische Funke wirklich die Fortsetzung einer Büchelentladung sey, man neben jenem nothwendig auch die letztere bemerken müsse, um so eher, als sie der Zeit nach die erstere sey. Allein diese Zeit ist sehr kurz, und der Unterschied der Lichtintensität ein auſserordentlich groſser, und unser Auge besitzt nicht die Fähigkeit, sehr schwache Lichteindrücke zum Bewuſstsein zu bringen, wenn unmittelbar nachher sehr starke andere Lichteindrücke folgen, und um so weniger, je weniger wir auf erstere vorbereitet sind. Man kann die fragliche Fähigkeit aber theilweise ausbilden, und wenn man längere Zeit mit gespannter Aufmerksamkeit Funkenentladungen verfolgt und sich bemüht, die Erscheinungen, von welchen hier die Rede ist, zu erkennen, so bemerkt man in der That, daſs bei allen Funken von groſser Länge neben der hellleuchtenden Hauptlinie noch eine gröſsere Zahl schwachleuchtender Nebenlinien existiren, welche in Form und Farbe Büschelzweigen gleichen und vermuthlich die Hauptstämme der nicht weiter sichtbaren Verzweigungen sind. Diese Erscheinungen zeigen sich am deutlichsten unter Verhältnissen, unter welchen der positive Büschel überhaupt die gröſste Ausdehnung gewinnt, wenn nämlich einer kleineren positiven Elektrode eine groſse negative Hohlscheibe gegenübersteht. Und der Umstand, daſs dies gerade dieselben Verhältnisse sind, unter welchen auch die längsten Funken gewonnen werden, spricht deutlich genug, meine ich, für die in Rede stehende Hypothese, wonach der Funke nur eine weitere Ausbildung eines Büschelzweiges ist.

Die analoge Wirkung der beiden ungleichartigen Ventile dürfte hiernach wenigstens unschwer verständlich seyn.

VIII. *Ueber ein elektrisches Flugrad nach Art der Radiometer; von W. Holtz.*

Es war ursprünglich meine Absicht, ein elektrisches Flugrad zu construiren, welches sich nach Analogie der sogenannten Radiometer bewegen sollte, weil ich glaubte, die Ausstrahlung aus einer berufsten metallischen Fläche würde ähnlich wirken, als ob eine solche mit einer gröfseren Zahl von Spitzen besetzt sey. Ich liefs also ein Flugrad aus vier einseitig berufsten Metallflügeln zusammensetzen, und verband dasselbe mit dem einen Conductor einer Influenz- oder Elektrisirmaschine. Es erfolgte jedoch keine Drehung, oder wenigstens keine constante, oder eine solche, welche auf die beabsichtigte Wirkung schliefsen liefs. Dies konnte nun vielleicht darin seine Ursache haben, dafs die elektrische Ausstrahlung aus einer berufsten Fläche eine hohe Dichtigkeit voraussetzte, welche andererseits bei der weit stärkeren Ausstrahlung aus den — wenn auch möglichst verrundeten — Metallstücken nicht zu erreichen war. Ich ersetzte die letzteren daher durch eben so viele, genau äquilibrirte, sehr leichte Kugeln von 23^{mm} Durchmesser, und sorgte dafür, dafs auch die übrigen Theile des Apparats, hinsichtlich ihrer Form und Gröfse, derselben Absicht entsprachen. Aber auch jetzt blieb die gewünschte, einseitig gerichtete Rotation aus, obwohl ohne Zweifel doch an der berufsten Hälfte den Kugeln eine ziemlich starke Ausstrahlung, wenn auch nur in Form von Glimmlicht, erfolgen mufste.

Wenn ich nun trotz dieses Mifserfolges den kleinen Apparat einer öffentlichen Besprechung für werth halte, so geschieht es einmal, weil das Resultat etwas Befremdendes hat, namentlich aber, weil derselbe Apparat bei einer andern Form der Anwendung immerhin als elektrisches Flugrad zu gebrauchen ist, freilich nicht als ein solches, welches sich durch den Einflufs der aus-

strahlenden Elektricität selbst, sondern als ein solches, welches sich durch den gleichzeitig hervorgerufenen Luftstrom bewegt. Hierbei ist es natürlich gleichgültig, ob die in Betracht kommenden Flächen berufst oder unberufst sind, und ob sie Kugeln oder scharfkantigen Metallstücken angehören. Man wird die letztere Form daher der gröfseren Leichtigkeit halber vorziehen. Bringt man das Rädchen nämlich in die Nähe einer elektrischen Spitze, so wird der von dieser ausgehende Luftstrom dasselbe im einen oder andern Sinne bewegen, je nachdem der Drehpunkt nämlich an der einen oder andern Seite von der gedachten Verlängerung der Spitze liegt. Aehnlich verhält es sich, wenn man das Rädchen selbst elektrisirt und demselben eine abgeleitete Spitze nähert. Bringt man das Rädchen aber so zwischen die zugespitzten Entladungsstangen einer Influenzmaschine, dafs es genau in der Mitte und in der Verbindungslinie derselben liegt, so findet bei genügender Entfernung beider Spitzen eine scheinbar polare Drehung statt, indem die nach vorne zeigenden Flügel sich allemal von der positiven Spitze entfernen. Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, dafs die von der positiven Spitze ausgehende Luftströmung die stärkere ist und durch den Einflufs der an derselben Seite der rotirenden Scheibe frei werdenden gleichnamigen Elektricität aus der Verbindungslinie der Spitzen verschoben wird, was sich im Dunkeln durch die ebenfalls nach vorne verschobene Lichterscheinung sehr deutlich dokumentirt. Im ersten und dritten Falle ist es natürlich gleich, ob das Rädchen isolirt oder unisolirt gehalten wird.

IX. *Dampfstrahl-Luftpumpe; von Nicolae Teclu,*

Professor an der Handelsakademie in Wien.

Bekanntlich adhärirt die Luft ringsum an dem Strahle einer Flüssigkeit oder Luftart, wenn derselbe durch die Luft dringt; sie folgt dem Strahle. In den entstandenen luftverdünnten Raum strömt neue Luft ein, welche ebenso weggeschafft wird, so daſs auf diese Weise ein fortwährendes Strömen von Luft um den Strahl herum entsteht; die Wirkung ist ein beständiges Saugen.

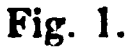
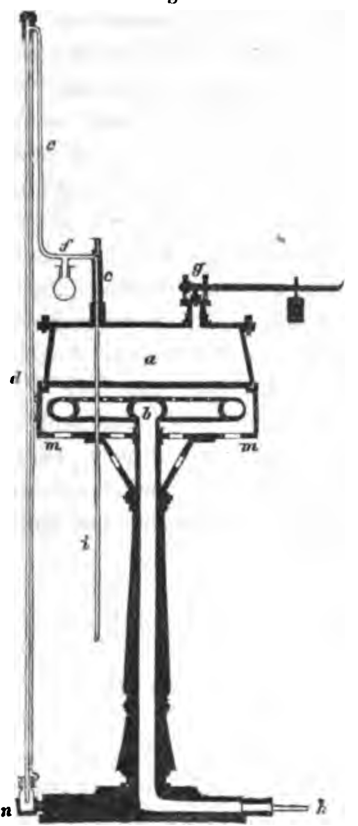


Fig. 1.



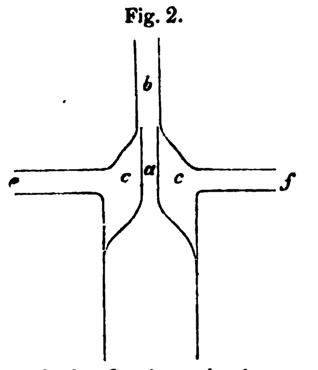
Diese zuerst (1826) von Clement und Desormes beobachtete Erscheinung (Reis, Physik) bestätigen: der Apparat von Buff, jener von Reichert, das Wassertrommelgebläse, das Locomotivenblasrohr, wenn dessen Dampfstrahl durch den Schornstein der Locomotive streicht, Giffard's Injector (Dampfstrahl-Pumpe), Sprengel's Luftsauger, der Bunsen'sche Brenner, die Bunsen'sche, Jagn'sche, Arzberger und Zulkowsky'sche, Dreyer'sche Wasserluftpumpe, Körting's Dampfluftsauger.

Auf demselben Principe fuſsend, ist die Pumpe Fig. 1 (0,1 der natürlichen Gröſse), welche namentlich bei Mangel einer Wasserleitung für Laboratorien

besonders geeignet erscheint, da ihre Anschaffung nur geringe Kosten verursacht und da sie überdies den Vortheil gewährt, nicht nur an jedem beliebigen Orte sofort in Thätigkeit gesetzt werden zu können, sondern durch bestimmt eingestellte Temperaturen auch die Regulirung der Saugung ermöglicht.

Hier ist *a* ein kleiner Dampfkessel, auf etwas über eine Atmosphäre geprüft, welcher 1,5 Liter Wasser (hinreichend für 8 bis 10 Stunden) fafst. Auf dem Stative *m* ist dieser über einem Wiesnegg'schen Ofen *b* angebracht, in welchen das Leuchtgas bei *h* eingeleitet werden kann. Der Dampfkessel ist mit einem gewöhnlichen Sicherheitsventil *g* (das gleichzeitig dazu dient, um durch dasselbe das verdampfte Wasser zu ersetzen) und Wasserstandsanzeiger versehen, ferner mit einem Dampfstrahlrohre *c*. Dieses, Fig. 2, ist aus Messing, besteht aus zwei Röhren *a* und *b*, die sich nach unten erweitern und so übereinander gestellt sind, dafs der erweiterte Theil der Röhre *b* die in den Kessel mündende Röhre *a* luftdicht umschliefst. Die verengten, cylindrisch geformten Theile beider Röhren haben eine gemeinsame Axe und sind derart angeordnet, dafs jener der Röhre *a*, der einen kleineren Querschnitt besitzt, in jenen der Röhre *b* knapp, jedoch ohne diese zu berühren, hineinragt. In den erweiterten Theil der Röhre *b*, also in den Raum *c*, mündet das Saugrohr *i* sowohl als auch das Rohr *f*, welches vermittelst der Röhre *e* die Verbindung mit dem Manometer herstellt.

Fig. 2.



Das Dampfstrahlrohr *c* bei dem durch Fig. 1 dargestellten Apparate hat eine Ausflufsöffnung *b* von 1,5^{mm} im Durchmesser und einer Höhe von 17^{mm}, das in dieses mündende Rohr *a* einen Durchmesser von 1^{mm}, und an der Berührungsstelle beider ist der Durchmesser der Röhre

10^{mm}. Die mit diesem Dampfstrahlrohre vorgenommenen vielfältigen Versuche ergaben die zwischen dem Druck des Dampfes und der Gröfse der Saugung constant bestehende Differenz von 21^{mm}.

Dieses Versuchsergebnifs bestätigt die Annahme, dafs auf saugende Wirkung nicht der im Dampfkessel herrschende Druck, welcher mit D bezeichnet werden soll, verwendet wird, sondern ein kleinerer Druck, welcher dem in dem Aufsatze: „Stromregulator für Gas“[1]) eingeführten „partiellen Drucke d“ entspricht. Denn dort wurde gezeigt, dafs die Differenz $D-d$ eine constante Gröfse δ für alle Werthe von D bleibt, so lange der Ausflufsquerschnitt g sich nicht ändert, was ja auch hier der Fall ist. Es gilt somit auch das am angeführten Orte abgeleitete Gesetz: $\delta : \delta' = g : g'$, wobei g und g' zwei Ausflufsquerschnitte, δ und δ' die zugehörigen Differenzen bedeuten, aus welcher Gleichung die jedesmalige Differenz zwischen dem Dampfdrucke und der saugenden Wirkung für irgend einen Ausflufsquerschnitt g' sich ergiebt, da $\delta = 21^{mm}$, für $g = 1,5^{cm}$ bekannt ist.

Wien, im Oktober 1876.

1) Dieser Aufsatz wird in einem der nächsten Hefte erscheinen.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VIII. ERGÄNZUNG. Stück 2.

I. *Untersuchungen über die Natur des Vocalklanges; von Felix Auerbach.*

§ 1. *Einleitung.*

Die vorliegende Untersuchung wurde veranlafst durch die Einwände, welche Herr E. v. Qvanten gegen die Helmholtz'sche Vocaltheorie[1]) erhoben hat.[2]) Bei der reichen Fruchtbarkeit des Feldes, das sich hier der Beobachtung eröffnete, schien es wünschenswerth, den Gesichtspunkt zu erweitern und vor der Hand den speciellen Anlafs zur Untersuchung aufser Acht zu lassen, um erst später, nach Klärung der Verhältnisse, ihn wieder aufzunehmen.

Ich habe versucht, den Beobachtungen, welche ich im physikalischen Laboratorium der Berliner Universität unter Leitung des Herrn Geh. Rath Helmholtz gemacht habe, diejenigen charakteristischen Momente zu entnehmen, welche geeignet sind, eine physikalische Definition des Vocalklanges im Allgemeinen, sowie der einzelnen Vocalklänge zu ermöglichen, eine Theorie, deren Principien zwar bereits entwickelt sind, aber immerhin in einer Weise, die noch manches räthselhaft läfst, besonders diejenigen Verhältnisse, welche die menschliche Stimme und Sprache vor

1) Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. Erste Abtheilung, 5. Abschnitt: „Klänge der Vocale." — Die physiologische Literatur findet man in den bekannten Lehrbüchern der Physiologie ausführlich angegeben.

2) E. v. Qvanten, Zur Helmholtz'schen Vocaltheorie, Poggend. Ann. 1875, Heft 2 und 4.

allen künstlichen Instrumentenklassen in so auffallendem Grade auszeichnen.

Es ist das Verdienst dieses Jahrhunderts, zu den Untersuchungen über zwei von den hervortretenden Merkmalen eines Tones, Höhe und Stärke, Versuche und Betrachtungen hinzugefügt zu haben, welche eine Kenntnifs des dritten Charakteristicums, der specifischen Klangfarbe, anstreben. Es möge genügen, in dieser Hinsicht die Namen Thomas Young, Willis, Wheatstone angeführt zu haben; bei dem jetzigen Standpunkte der bezüglichen mathematischen Theorien haben diese Betrachtungen ein mehr oder weniger nur mehr historisches Interesse. Gehoben wurde der Schleier, der über diesem eigenthümlichen Phaenomene lag, erst in neuester Zeit, und die Helmholtz'sche Klangtheorie hat inzwischen nicht weniger die Probe bestanden, welche sie bei der Vergleichung mit den empirischen Erfolgen der musikalischen Technik zu bestehen hatte, als sie überdies durch die Fruchtbarkeit ihres Gedankens ihren Standpunkt begründet hat.

Das hiernach bestehende Gesetz, dafs die Art und Weise, wie die Intensität eines Klanges auf die einzelnen, in dem Klange enthaltenen Partialtöne, nach ihrer Ordnungszahl, sich vertheilt, das Bestimmende ist für die Farbe des Klanges, bestätigen Versuche mit allen künstlichen Instrumenten. Dagegen scheinen Versuche mit der menschlichen Stimme zu ergeben, dafs einem bestimmten Vocale nicht sowohl eine bestimmte, nach der Intensität getroffene Anordnung der Theiltöne, als vielmehr eine absolute, etwa durch Stimmgabeln zu fixirende, durch die zugehörige Intensität ausgezeichnete Tonhöhe entspreche. Es wird im Folgenden wesentlich darauf ankommen, den Widerstreit zwischen diesen beiden Principien, welche kurzweg als die Principien der „charakteristischen Vertheilung" resp. der „charakteristischen Tonhöhe" bezeichnet werden mögen, zu lösen.

§ 2. *Beobachtungsmethoden.*

1) Koenig'sche Methode der Flammenbilder.

Ich habe im wesentlichen drei von einander verschiedene Beobachtungsmethoden angewandt. Anfänglich erschien die bekannte Methode der Beobachtung der Flammenbilder im rotirenden Spiegel, nach welcher Koenig die einzelnen Vocalbilder von Intervall zu Intervall dargestellt hat, als die vortheilhafteste, da sie, neben dem Vortheile der Objectivität ihrer Angaben, ein ziemlich detaillirtes, also scheinbar auch ziemlich genaues Bild der Schwingungsvorgänge giebt. Dabei benutzte ich kegelförmige Resonatoren und stellte mir aufserdem einen cylindrischen Resonator her, dessen Resonanzhöhe ich beliebig ändern konnte. Ich verfertigte zu diesem Zwecke einzelne, nahezu cylindrische, aus mehrfachen übereinander geklebten Lagen von Papier und Pappe bestehende Röhren, von denen immer zwei benachbarte, mit den richtigen Enden in einander geschoben, auf einander pafsten und ziemlich luftdicht schlossen. Die weiteste dieser Röhren wurde auf eine kreisrunde Holzplatte mit einem kreisrunden Loch aufgeklebt und auf dieser die Koenig'sche Membran mit der Gaskapsel befestigt; die engste der Röhren wurde auf eine, der obigen ähnliche, mit einem Schallloche versehene, Scheibe aufgeklebt. Bei der geringen Dicke der einzelnen Schichten war dann die Form des so hergestellten Resonators immerhin noch ziemlich genau cylindrisch (Durchmesser etwa 6^{cm}, der Oeffnung etwa $1\frac{1}{2}^{cm}$); dabei war er einigermafsen fest, schlofs luftdicht und liefs sich bis zum Dreifachen seiner kleinsten Länge, nämlich bis zu circa 200^{mm}, ausziehen. Aus den Resultaten, welche diese Methode ergab und welche ich nach Aufzeichnungen, die ich von den Flammenbildern machte, näher verfolgte, ging jedoch hervor, dafs hier fremde Einflüsse wesentliche Modificationen der Erscheinungen bewirken; ein Theil davon mag auf die Veränderlichkeit des Gasdruckes zu schieben seyn, einen anderen erkennt man in der Abhängig-

keit des optischen Phaenomens (der Dauer des Lichteindruckes), welches man bei dieser Methode verwerthet, von der Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels; hauptsächlich aber ist es die die Luftschwingungen auf die Flamme übertragende Membran, deren Verhalten, namentlich in Folge der ihr eigenthümlichen harmonischen Obertöne, von wesentlichem Einfluſs ist, ohne daſs derselbe sich auf diesem Wege eliminiren lieſse. Bei dem gänzlichen Mangel an Anhaltspunkten, welche dem Beobachter zu Gebote stehen und dazu dienen könnten, etwa durch verschiedene Reihen von Beobachtungen unter Aenderung der begleitenden Umstände Resultate zu erlangen, welche von diesen Störungen frei sind, glaubte ich daher, diese Methode zunächst fallen und erst zuletzt zu Controllversuchen wieder aufnehmen zu sollen, zu einer Zeit, wo jene Anhaltspunkte durch eine andere Methode bereits geliefert seyn würden.

2) Seifenblasenmethode.

Das habe ich dann auch gethan und schlieſslich, um den störenden Einfluſs der Membran, der in ihren eigenen Schwingungen liegt, möglichst zu schwächen, auf den Vorschlag des Herrn Geh. Rath Helmholtz noch eine andere objective Prüfungsmethode angewendet. Zu diesem Zwecke stand mir eine Reihe von cylindrischen Zink-Resonatoren zu Gebote, welche auf der einen Seite ganz, auf der andern bis auf eine kreisförmige Schallöffnung verschlossen sind und, in Folge verschiedenen Volumens, verschiedenen Tonhöhen entsprechen. Ueber die Oeffnung wurden Bläschen der Plateau'schen Mischung aus Marseiller Seife und Glycerin gestrichen und die ziemlich kräftigen Mitschwingungen derselben beobachtet; zu diesem Zwecke sind zunächst die Lichtreflexe gut zu verwenden, welche in der Verrückung des Bildes eine der Schwingungsintensität proportionale Gröſse liefern; in manchen Fällen lassen sich noch besser die hier in voller Pracht auftretenden Farben dünner Blättchen benutzen, deren Farbe, Gestalt und Gleichgewichtszustand sich wesentlich

ändert, sobald die Membran in Schwingungen versetzt wird. Da diese Seifenblasen sehr dünn sind, ist ihr selbständiger Einfluſs jedenfalls gering; diese Vermuthung wurde überdies bestätigt durch Versuche mit solchen Membranen derselben Mischung, welche einfach über Metallringe ohne dahinter befindlichen, abgeschlossenen Luftraum ausgespannt waren; vermeidet man es dann nämlich, daſs der (beim Singen oder Pfeifen) aus dem Munde hervordringende Luftstrom die Membran direct treffe, so sieht man, daſs ihre periodischen Bewegungen schnell vergehen und für den für das Folgende wesentlichen Tonbereich überhaupt sehr schwach sind.

Um einen allmäligen Uebergang von einem kleineren Resonanzraume zu einem gröſseren zu ermöglichen, strich ich die Seifenmembran auch über einen getheilten Glascylinder, der in einem gröſseren mit Wasser gefüllten Gefäſse stand und dessen Inneres durch eine gebogene Röhre mit der äuſseren Luft communicirte; letztere sollte einen Ausgleich des Luftdruckes ermöglichen, welcher erforderlich ist, damit die für *eine* Stellung des Cylinders aufgestrichene Membran für die Stellungen, in denen das abgeschlossene Luftvolumen gröſser oder kleiner, also die Spannung kleiner oder gröſser ist, bestehen bleiben soll. Schlieſslich wurden in ähnlicher Weise auch die Schalllöcher der gleich zu beschreibenden Kugelresonatoren benutzt, nachdem letztere mit Wasser gefüllt waren, dessen Quantität durch Abfluſs aus der anderen Oeffnung beliebig regulirt werden, also zum Beispiel auch so gewählt werden konnte, daſs die Tonhöhe des so modificirten Resonators sehr nahe kam dem Eigenton des unveränderten, benachbarten Resonators.

3) Subjective Methode.

Von allen Fehlerquellen dieser beiden Methoden frei ist die folgende subjective Methode, welche auf der Verstärkung und Concentration der Tonempfindung durch die von Helmholtz angegebenen metallischen Kugelreso-

natoren beruht, die auf der einen Seite zu einer in's Ohr passenden Oeffnung zugespitzt sind, während diametral gegenüber das kreisförmige Schallloch liegt.

Es stand mir eine Reihe solcher Resonatoren vom c bis zum c_4 zu Gebote. Die Intensität der in die freie Luft hinausgesungenen Vocalklänge mufs hier, ähnlich wie Sterngröfsen, geschätzt werden; wie ich sogleich zeigen werde, kann man es jedoch in dieser Schätzung zu einer erheblichen Genauigkeit bringen. Der einzige Uebelstand dieser Methode liegt in dem Mifstrauensvotum, welches eine jede subjective Methode von aufsen her erfährt, selbst wenn der Beobachter in sie das Vertrauen zu legen sich für berechtigt hält. Es sind die Controllversuche nach den beiden ersten Methoden, welche diese Bedenken zu heben bezwecken sollen.

§ 3. *Versuche mit den Kugel-Resonatoren.*

Die Reihe der von Koenig angefertigten Resonatoren war nach ihren französischen Zeichen und in deutscher Uebersetzung folgende:

ut_2	sol_2	ut_3	mi_3	sol_3	la_3	ut_4	$ré_4$	mi_4	fa_4	sol_4
c	g	c_1	e_1	g_1	a_1	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2

la_4	si_4 *b-moll*	si_4	ut_5	$ré_5$	mi_5 *b-moll*	mi_5
a_2	b_2	h_2	c_3	d_3	es_3	e_3

und noch einige höhere, die aber ihrer schwachen Resonanz wegen selten benutzt wurden; obige Reihe erstreckt sich daher vorzugsweise auf die drei mittleren Octaven des Klaviers. Da es sich nun um Charakterisirung der einzelnen Vocale handelt, läge es am nächsten, jeden Versuch gleich für die verschiedenen Vocale anzustellen und die Resultate zu vergleichen. Allein hierbei gleichzeitig Intensität und Klangnüance, welch' letztere durch andere Klänge von ihres Gleichen getrennt ist, zu wahren, ist ebenso unmöglich wie es andererseits unerläfslich ist.

Es stehen aber noch zwei andere Wege offen, die Intensität der Partialtöne zu vergleichen. Entweder man

legt einen bestimmten Resonator an's Ohr und singt der Reihe nach alle Töne, unter deren Obertönen der Eigenton des Resonators vorkommt. Man wird dabei, von dem Eigentone des Resonators ausgehend, nach der Tiefe fortschreiten, und erhält dann das Verhältnifs der Stärken, in welchen ein und derselbe Ton resp. als 1., 2., 3. u. s. w. Partialton auftritt. Diese Versuchsreihe ist zunächst für alle Resonatoren, und dann für jeden einzelnen Vocal zu wiederholen. Das Verfahren hat, abgesehen von der Schwierigkeit, verschieden hohe Töne genau gleich stark zu singen, den Nachtheil, dafs es eine andere Aufgabe löst als die vorgesetzte. Diese letztere fordert nämlich, dafs man für eine und dieselbe Höhe des gesungenen Tones das Verhältnifs der Partialtöne, die dann von verschiedener Höhe seyn werden, bestimme, und die Reduction, die zu machen ist, um aus dem indirecten Resultate zu diesem Ziele zu gelangen, ist zwar, bei genügender Anzahl von Beobachtungszahlen, stets möglich, würde aber jedenfalls auf Hypothesen beruhen, welche besser vermieden werden. Dagegen hat das Verfahren zwei wesentliche Vortheile: einmal ist das Resultat, das es liefert, unabhängig von einem etwaigen Einflusse der Volumenverschiedenheit und der nie genau gleichen Form der Resonatoren, und dann gestattet es alle zu vergleichenden Töne schnell hintereinander herzustellen, wodurch die Sicherheit der Schätzung wesentlich erhöht wird.

Der andere Weg behält zunächst denselben Vocal in derselben Stimmhöhe bei, dessen einzelne Partialtöne der Reihe nach durch die verschiedenen Resonatoren verstärkt werden. Er geht dann zunächst zu anderen Höhen desselben Klanges, und dann zu den anderen Vocalen über. Die Nachtheile obiger Methode sind die Vortheile dieser, und umgekehrt. Sie führt zu Resultaten, die zwar einerseits der unmittelbare Ausdruck der Beobachtung sind, ohne der Reduction zu bedürfen, die aber andererseits möglicherweise durch die beiden oben erwähnten Uebelstände getrübt werden. Glücklicherweise giebt die erste

Methode selbst die Entscheidung, indem sie wenigstens das eine mit Sicherheit erkennen läfst, dafs der störende Einflufs der Form- und Volumenverschiedenheit der Resonatoren sehr gering ist. Ueberdies wurden immer nur benachbarte Partialtöne mit einander verglichen, da Wiederholungen der Versuche zeigten, dafs für solche die Zuverlässigkeit der Schätzung die gröfste ist. Leider löst sich der andere, allerdings unwesentlichere Uebelstand, welcher die Sicherheit der Schätzung betrifft, nicht, wie ich geglaubt hatte, auf ähnlich einfache Weise. Ich hatte nämlich gemeint, durch Anwendung beider Ohren gleichzeitig zwei Resonatoren inquiriren zu können; das erwies sich jedoch bei der bedeutenden Differenz in der Empfindungskraft meiner beiden Ohren (es war das rechte hierin dem linken weit überlegen) als unmöglich.

Trotzdem sind die Vortheile dieser Methode immerhin noch so bedeutende, dafs ich die von ihr gelieferten Resultate den ersten vorzog; nur habe ich dabei aus der oben angeführten Reihe zwei Resonatoren, deren Gestalt etwas von der durchschnittlichen der anderen abwich,[1]) ausgeschieden und die dadurch entstehenden Lücken mit Hülfe der benachbarten Resonatoren durch Reduction und Interpolation ausgeführt.

Was nun die Schätzung selbst betrifft, so ist es selbstverständlich nicht möglich, über die einfachsten Zahlenverhältnisse hinauszugehen. Die obere Grenze für die Genauigkeit, bis zu der ich mich hinaufwagte, waren Verhältnisse wie 2 : 5, 3 : 5, und auch die Bedeutung dieser ist mehr die, dafs der zweite Ton etwas mehr als doppelt so stark, oder nicht ganz doppelt so stark wie der erste erklang. In ähnlichem Sinne habe ich bei Verhältnissen wie 1 : 1, 2 : 1 etc. hin und wieder das Zeichen $1^+ : 1$, $2^+ : 1$, resp. $1 : 1^+$, $2 : 1^+$ angewendet. Bedenkt man nun, dafs ein Vocalklang sich durchschittlich aus 8 bis 16

1) Von besonderem Einflusse ist nämlich die Gestalt des Ohr-Ansatzes, weil davon die Vollständigkeit der Communication mit dem inneren Ohre und somit die Stärke der Empfindung wesentlich abhängt.

einigermaſsen starken Einzeltönen zusammensetzt, so erkennt man, daſs aus diesen einfachen Verhältnissen zwischen je zweien dieser Partialtöne für die Gesammtheit derselben sich schon eine gewisse Mannichfaltigkeit der Vertheilung ergiebt. Ich habe daher die Intensität des Gesammtklanges gleich 100 und für die Partialtöne die durch die entsprechende Umrechnung sich ergebenden, dem wahren Werthe am nächsten kommenden ganzen Zahlen gesetzt.

Im Folgenden stelle ich die beiden Tabellen, von denen hier die Rede ist, zusammen und bemerke noch, daſs die Vocalklänge in ihrem für die norddeutsche Aussprache durchschnittlichen Timbre gewählt wurden, und daſs dieselben äuſserst rein bewahrt werden müssen, da die geringste Aenderung, wie sich später zeigen wird, schon beträchtliche Abweichungen von den hier mitgetheilten Zahlen verursacht. Schlieſslich versteht es sich nahezu von selbst, daſs diese letzteren Mittelwerthe aus einer gröſseren Reihe von Versuchen sind, die übrigens in gröſseren Zeitintervallen und in stillen Räumen angestellt werden müssen.

Tabelle I,

enthaltend die Verhältnisse der Intensität benachbarter Partialtöne für verschiedene Tonhöhen und verschiedene Vocale.

Vocal	Tonhöhe des Grundtons	I : II	II : III	III : IV	IV : V	V : VI	VI : VII	VII : VIII	VIII : IX
1. Dumpfes *U.*	c	$c : c_1 = 1^+ : 1$	$c_1 : g_1 = 2 : 1^+$	$g_1 : c_2 = 2 : 3$	$c_2 : e_2 = 3 : 1$	$e_2 : g_2 = 2 : 1^+$	$g_2 : b_2 = 4 : 1$		
	g	$g : g_1 = 1^+ : 1$	$g_1 : d_2 = 2 : 1^+$	$d_2 : g_2 = 1^+ : 1$	$g_2 : h_2 = 3 : 1^+$	$h_2 : d_3 = 5 : 1$			
	c_1	$c_1 : c_2 = 3 : 2$	$c_2 : g_2 = 3 : 1^+$	$g_2 : c_3 = 1 : 2$	$c_3 : e_3 = 6 : 1$				
2. Helles *U.*	c	$c : c_1 = 2 : 3$	$c_1 : g_1 = 4 : 3$	$g_1 : c_2 = 3 : 2$	$c_2 : e_2 = 3 : 1$	$e_2 : g_2 = 5 : 3$	$g_2 : b_2 = 3 : 2$		
	g	$g : g_1 = 2 : 5$	$g_1 : d_2 = 2 : 1^+$	$d_2 : g_2 = 3 : 1$	$g_2 : h_2 = 2^+ : 1$	$h_2 : d_3 = 3 : 2$			
	c_1	$c_1 : c_2 = 1 : 1$	$c_2 : g_2 = 2^+ : 1$	$g_2 : c_3 = 6 : 1$	$c_3 : e_3 = 3 : 1$				
	g_1	$g_1 : g_2 = 2^+ : 1$	$g_2 : d_3 = 8 : 1$	$d_3 : g_3 = 5 : 1$					

3. O (scharf).	c	$c:c_1$ $=1:2$	$c_1:g_1$ $=1:2$	$g_1:c_2$ $=5:2$	$c_2:e_2$ $=1^+:1$	$e_2:g_2$ $=4:3$	$g_2:b_2$ $=2:1$	$b_2:c_3$ $=4:1$	
	g	$g:g_1$ $=2:5$	$g_1:d_2$ $=3:1^+$	$d_2:g_2$ $=3:2$	$g_2:h_2$ $=2:1$	$h_2:d_3$ $=5:1$			
	c_1	$c_1:c_2$ $=3:5$	$c_2:g_2$ $=2:1$	$g_2:c_3$ $=2:1$	$c_3:e_3$ $=5:1$				
	g_1	$g_1:g_2$ $=1^+:1$	$g_2:d_3$ $=3:1$	$d_3:g_3$ $=5:1$					
4. $\mathring{A}$ (breites O).	c	$c:c_1$ $=2:3$	$c_1:g_1$ $=2:3$	$g_1:c_2$ $=1:3$	$c_2:e_2$ $=2^+:1$	$e_2:g_2$ $=1:1^+$	$g_2:b_2$ $=3:2$	$b_2:c_3$ $=2:1$	$c_3:d_3$ $=5:1$
	g	$g:g_1$ $=2:3$	$g_1:d_2$ $=1:2$	$d_2:g_2$ $=2:1$	$g_2:h_2$ $=2:1$	$h_2:d_3$ $=3:1$	$d_3:f_3$ $=3:1$		
	c_1	$c_1:c_2$ $=1^+:3$	$c_2:g_2$ $=4:3$	$g_2:c_3$ $=3:1$	$c_3:e_3$ $=5:1$				
	g_1	$g_1:g_2$ $=3:5$	$g_2:d_3$ $=3:1$	$d_3:g_3$ $=7:1$					
5. A (hell).	c	$c:c_1$ $=2:3$	$c_1:g_1$ $=1^+:2$	$g_1:c_2$ $=3:5$	$c_2:e_2$ $=4:3$	$e_2:g_2$ $=1:2$	$g_2:b_2$ $=4:1$	$b_2:c_3$ $=2:1$	$c_3:d_3$ $=4:1$
	g	$g:g_1$ $=2:3$	$g_1:d_2$ $=3:4$	$d_2:g_2$ $=1:2$	$g_2:h_2$ $=4:3$	$h_2:d_3$ $=3:1$	$d_3:f_3$ $=4:1$		
	c_1	$c_1:c_2$ $=1:2$	$c_2:g_2$ $=3:5$	$g_2:c_3$ $=5:3$	$c_3:e_3$ $=3:1$	$e_3:g_3$ $=4:1$			
	g_1	$g_1:g_2$ $=1:2^+$	$g_2:d_3$ $=5:3$	$d_3:g_3$ $=5:2$	$g_3:h_3$ $=5:1$				

(Tabelle I.)

Vocal	Tonhöhe.	I : II	II : III	III : IV	IV : V	V : VI	VI : VII	VII : VIII	VIII : IX	IX : X	X : XI
	c	$c:c_1$ $=2:3$	$c_1:g_1$ $=1:2$	$g_1:c_2$ $=4:3$	$c_2:e_2$ $=2:1$	$e_2:g_2$ $=1^+:1$	$g_2:b_2$ $=1^+:1$	$b_2:c_3$ $=3:2$	$c_3:d_3$ $=2:1$	$d_3:e_3$ $=2:1$	
6.	g	$g:g_1$ $=3:4$	$g_1:d_2$ $=2:3$	$d_2:g_2$ $=1:1$	$g_2:h_2$ $=2:1$	$h_2:d_3$ $=2:1$	$d_3:f_3$ $=2:1$	$f_3:g_3$ $=3:2$	$g_3:a_3$ $=2:1$		
E.	c_1	$c_1:c_2$ $=3:4$	$c_2:g_2$ $=1:1^+$	$g_2:e_3$ $=3:1$	$c_3:e_3$ $=2:1$	$e_3:g_3$ $=1^+:1$	$g_3:b_3$ $=2:1$	$b_3:c_4$ $=2:1$			
	g_1	$g_1:g_2$ $=5:4$	$g_2:d_3$ $=3:1^+$	$d_3:g_3$ $=3:2$	$g_3:h_3$ $=3:1$	$h_3:d_4$ $=3:2$	$d_4:f_4$ $=2:1$				
	c	$c:c_1$ $=2:3$	$c_1:g_1$ $=4:3$	$g_1:c_2$ $=2:3^+$	$c_2:c_3$ $=3:2$	$e_2:g_2$ $=3:2$	$g_2:b_2$ $=4:3$	$b_2:c_3$ $=3:2$	$c_3:d_3$ $=3:2$	$d_3:e_3$ $=3:2$	$e_3:fis_3$ $=2:1$
7.	g	$g:g_1$ $=2:3$	$g_1:d_2$ $=2:3$	$d_2:g_2$ $=3:2$	$g_2:h_2$ $=2:1$	$h_2:d_3$ $=4:3$	$d_3:f_3$ $=2:1$	$f_3:g_3$ $=2:1$	$g_3:a_3$ $=2:1$	$a_3:h_3$ $=1:1$	
I.	c_1	$c_1:c_2$ $=3:4$	$c_2:g_2$ $=3:4$	$g_2:c_3$ $=1:1$	$c_3:e_3$ $=3:2$	$e_3:g_3$ $=3:2$	$g_3:b_3$ $=2:1$	$b_3:c_4$ $=2:1$	$c_4:d_4$ $=2:1$		
	g_1	$g_1:g_2$ $=1:1^+$	$g_2:d_3$ $=3:2$	$d_3:g_3$ $=4:3$	$g_3:h_3$ $=3:2$	$h_3:d_4$ $=2:1$	$d_4:f_4$ $=2:1$	$f_4:g_4$ $=2:1$			

8. Ü.	c	$c:c_1 = 1:1^+$	$c_1:g_1 = 3:2$	$g_1:c_2 = 1:1$	$c_2:e_2 = 3:2$	$e_2:g_2 = 2:1$	$g_2:b_2 = 2:1$	$b_2:c_3 = 2:1$			
	g	$g:g_1 = 1:1^+$	$g_1:d_2 = 1:1^+$	$d_2:g_2 = 1^+:1$	$g_2:h_2 = 3:1$	$h_2:d_3 = 3:1$	$d_3:f_3 = 3:1$				
	c_1	$c_1:c_2 = 3:2$	$c_2:g_2 = 1^+:1$	$g_2:c_3 = 3:2$	$c_3:e_3 = 2:1$	$e_3:g_3 = 3:1$					
	g_1	$g_1:g_2 = 5:3$	$g_2:d_3 = 2:1$	$d_3:g_3 = 5:2$	$g_3:h_3 = 3:1$						
9. Ö.	c	$c:c_1 = 3:4$	$c_1:g_1 = 2:5$	$g_1:c_2 = 3:2$	$c_2:e_2 = 2:1$	$e_2:g_2 = 1:1^+$	$g_2:b_2 = 2:1$	$b_2:c_3 = 2:1$			
	g	$g:g_1 = 2:3$	$g_1:d_2 = 1:1$	$d_2:g_2 = 3:2$	$g_2:h_2 = 2:1$	$h_2:d_3 = 2:1$	$d_3:f_3 = 4:1$				
	c_1	$c_1:c_2 = 1^+:2$	$c_2:g_2 = 1:1^+$	$g_2:c_3 = 3:2$	$c_3:e_3 = 5:1$	$e_3:g_3 = 2:1$					
10. Ä.	c	$c:c_1 = 1:1$	$c_1:g_1 = 1:1$	$g_1:c_2 = 1^+:2$	$c_2:e_2 = 2:3$	$e_2:g_2 = 1^+:1$	$g_2:b_2 = 3:2$	$b_2:c_3 = 2:1$	$c_3:d_3 = 2:1$		
	g	$g:g_1 = 2:3$	$g_1:d_2 = 3:4$	$d_2:g_2 = 3:2$	$g_2:h_2 = 3:2$	$h_2:d_3 = 2:1$	$d_3:f_3 = 2:1$	$f_3:g_3 = 3:1$			
	c_1	$c_1:c_2 = 2:3$	$c_2:g_2 = 1:2$	$g_2:c_3 = 5:2$	$c_3:e_3 = 2:1$	$e_3:g_3 = 2:1$	$g_3:b_3 = 3:1$				
	g_1	$g_1:g_2 = 1^+:1$	$g_2:d_3 = 2:1$	$d_3:g_3 = 3:1$	$g_3:h_3 = 2:1$	$h_3:d_4 = 3:1$					

Ohne weiteres erhält man aus dieser Tafel durch die oben genannte Umrechnung die folgende, übersichtlichere:

Tabelle II,

enthaltend die Vertheilung der Gesammt-Intensität 100 auf die einzelnen Partialtöne.

Partialtöne..

1. Dumpfes U.

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
c	27	25	14	22	7	4	1		
g	33	30	16	14	5	1			
c_1	40	28	10	19	3				
g_1	49	?	?	?	?				

2. Helles U.

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
c	20	31	23	16	5	3	2		
g	18	45	24	8	3	2			
c_1	39	39	18	3	1				
g_1	61	28	9	2					

3. Scharfes O.

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
c	9	16	36	14	12	9	4	1	
g	19	46	17	11	6	1			
c_1	25	42	21	10	2				
g_1	42	38	16	3					

4. Å (breites O).

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
c	5	7	11	31	14	16	10	4	1
g	12	18	38	19	9	3	1		
c_1	15	41	32	10	2				
g_1	30	50	16	2					

5. Helles A.

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
c	5	7	12	20	15	30	7	4	1
g	8	13	17	30	22	8	2		
c_1	11	21	36	22	8	2			
g_1	19	42	25	10	2				

Tonhöhe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
6. E.											
c	9	13	25	18	10	8	7	5	2	1	
g	12	16	24	24	12	6	3	2	1		
c_1	21	27	31	10	5	4	2	1			
g_1	40	33	13	8	3	2	1				
7. I.											
c	10	16	12	21	14	9	7	5	3	2	1
g	12	17	28	18	10	7	4	2	1	1	
c_1	12	16	22	21	13	9	5	2	1		
g_1	24	28	18	14	9	4	2	1			
8. Ü.											
c	23	25	17	16	11	5	2	1			
g	19	22	26	23	8	3	1				
c_1	35	22	20	14	7	2					
g_1	48	29	15	6	2						
9. Ö.											
c	9	12	31	19	10	11	5	2			
g	18	26	25	17	9	4	1				
c_1	16	27	32	20	4	2					
10. Ä.											
c	9	9	8	14	23	19	11	5	2		
g	12	20	27	19	12	6	3	1			
c_1	14	21	39	15	7	3	1				
g_1	40	35	17	5	3	1					

§ 4. ***Resultate aus den Versuchen mit den Kugelresonatoren.***

Die Tafel II, welche an Stelle der Tafel I gesetzt worden ist, soll bei den folgenden Untersuchungen ausschliefslich benutzt werden; sie ist der reine Ausdruck der Beobachtung.

Von vornherein läfst sich den Zahlen dieser Tafel eine durchweg einheitliche Gesetzmäfsigkeit nicht ansehen. Man erkennt zwar im Grofsen und Ganzen, dafs bei den dumpferen Vocalen die ersten, bei den helleren die späteren am stärksten sind; allein bei näherer Betrachtung zeigen sowohl die Horizontalreihen, welche sich auf gleiche Höhe des Grundtones beziehen, als auch die Verticalreihen, welche für einen durch seine Ordnungszahl bestimmten Partialton gelten, so grofse Unregelmäfsigkeiten, dafs es schwer halten würde, die zur Beschreibung der Naturerscheinungen vor allem erforderliche Einfachheit aus diesen Zahlen zu gewinnen, wenn nicht der gegenwärtige Standpunkt der mathematischen Theorie einen Anhaltspunkt gewährte.

In der „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden"[1]) hat nämlich Helmholtz die Gesetze der Resonanz entwickelt und gezeigt, welchen Einflufs dieselbe auf die Intensität der durch die Zunge einer Zungenpfeife hindurchgegangenen und in die Röhre eintretenden Schwingungen hat. Hiernach hängt die Intensität eines Partialtones zunächst ab von der Länge des Resonanzraumes; wenn man dann die Länge so wählt, dafs die Resonanz, soweit sie von ihr abhängt, am günstigsten ausfällt, so hängt sie noch von vier Gröfsen ab: von dem Intensitätscoefficienten des Partialtones, soweit er allein durch die Zunge bedingt wird ($C_\mathfrak{a}$), ferner von der Ordnungszahl $\mathfrak{a}$ selbst, von der Wellenlänge des Tones und von dem Querschnitte der Röhre. Die beiden ersten Variabeln geben die Funktionalabhängigkeit von der Ordnungszahl, die beiden letzten diejenige von der absoluten Tonhöhe, und zwar ist die Intensität das Produkt dieser beiden Funktionen (auf die Form jeder dieser beiden Funktionen selbst kommt es hier nicht an). Dies Resultat wird sich, mit einem gewissen Grade der Genauigkeit, auch auf die Vocale übertragen lassen; bezeichnet man daher mit $\mathfrak{a}$

1) Poggend. Ann. Bd. 114. Einige der Resultate in den Beilagen zu der „Lehre von den Tonempfindungen."

die Ordnungszahl, mit n die Schwingungszahl (welche die absolute Tonhöhe bestimmt), und mit i die Intensität des Tones, so kann man schreiben:

$$i = \varphi(n) . \psi(a).$$

Soll nun daran gegangen werden, das Bestehen dieser Beziehung aus der Tabelle II nachzuweisen, so ist noch zu beachten, daſs eine Fehlerquelle aus dem Umstande erwachsen könnte, daſs genau genommen die eben abgeleitete Gleichung nicht für gleiche Gesammtintensität gilt (wie sie oben gleich 100 gesetzt worden ist), sondern für gleiche Mengen ausströmender Luft; allein diese Fehlerquelle ist jedenfalls nicht erheblich. Unter dieser Voraussetzung läſst sich leicht das Kriterium dafür angeben, ob die Tabelle II das Resultat der Theorie bestätigt; denn da die eine Gruppe von Factoren unabhängig von der absoluten Tonhöhe seyn soll, muſs für jeden Vocal das Resultat dasselbe seyn, gleichviel aus welcher der vier Horizontalreihen es berechnet wird; und da die Gruppe der andern Factoren unabhängig von der Ordnungszahl seyn soll, muſs es für die Berechnung dieser gleichgültig seyn, welche Zahlencombination, die sich auf eine und dieselbe Tonhöhe bezieht, man dazu benutzt. Das ist nun in der That, wie im folgenden gezeigt wird, der Fall.

Das allgemeine, in jedem speciellen Falle gegebene Schema irgend einer der Versuchsreihen der Tabelle II sey das folgende:

$$\begin{array}{llllllll}
a_{1,c} & a_{2,c'} & a_{3,g'} & a_{4,c''} & . & . & . & . \\
a_{1,g} & a_{2,g'} & a_{3,d''} & a_{4,g''} & . & . & . & . \\
a_{1,c'} & a_{2,c''} & . & . & . & . & . & . \\
a_{1,g'} & . & . & . & . & . & . &
\end{array}$$

Hierin giebt der erste Index stets die Ordnungszahl, der zweite den Ton an, welchem das betreffende a entspricht. An Stelle dieses Systems soll nun, das ist die Aufgabe, ein anderes gesetzt werden; an Stelle jedes a

soll ein Produkt $x \cdot y$ treten; aber die x sollen sich nur durch Indices, welche den ersten, die y nur durch solche, welche den zweiten Indices von a entsprechen, unterscheiden. Das allgemeine Schema wird daher, aufgelöst, die Form haben:

$$\begin{array}{llllc} x_1 \cdot y_c & x_2 \cdot y_{c'} & x_3 \cdot y_{g'} & x_4 \cdot y_{c''} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 \cdot y_g & x_2 \cdot y_{g'} & x_3 \cdot y_{d''} & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 \cdot y_{c'} & x_2 \cdot y_{c''} & x_3 \cdot y_{g''} & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 \cdot y_{g'} & x_2 \cdot y_{g''} & & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Das erste Produkt kann willkürlich zerlegt werden; am einfachsten ist es daher:

$$x_1 = a_{1c} \quad y_c = 1$$

zu wählen. Dadurch sind die beiden Einheiten festgesetzt. Für die andern Produkte der ersten Vertikalreihe ist der zweite Factor nun bereits durch den ersten, gegebenen, bestimmt. Damit sind aber die zweiten Factoren der Produkte der ersten Horizontalreihe gegeben, und diese bestimmen ihre ersten. Damit sind aber (wenn die Beobachtungen vollständig vorliegen), alle Factoren bestimmt. Setzt man daher den ersten Factor von $a_{2,g'}$ gleich dem gefundenen x_2, so mufs der andere gleich der gefundenen Zahl $y_{g'}$ werden. Diese Zahl ist also die erste, welche eine Kontrolle zuläfst. Und so geht es fort.

Für das dumpfe *U* z. B. hat man:

$$a_{1,c} = 27 \times 1$$
$$a_{1,g} = 27 \times 1{,}2$$
$$a_{1,c'} = 27 \times 1{,}5,$$

folglich

$$a_{2,c'} = 17 \times 1{,}5.$$

$a_{1,g'}$ liefs sich hier nur auf circa 50 schätzen.

Es wird daher:

$$a_{1,g'} = 27 \times 1{,}8;$$

es mufs also $a_{2,g'} = 17 \times 1{,}8 = 30$ seyn; das ist aber in der That der Fall.

Weiter wird:

$$a_{3,g'} = 8 \times 1{,}8$$
$$a_{4,c''} = 12 \times 1{,}9\,;$$

da nun $a_{3,g'}$ einem Tone entspricht, der nur um ein Intervall von demjenigen abweicht, welchem $a_{4,c''}$ entspricht, so darf auch der zweite Faktor nur wenig von 1,9 abweichen; der erste ist aber (wie aus $a_{3,g'}$ gefunden) 8; der erforderte Werth ist also etwa

$$8 \times 2 = 16\,;$$

die Beobachtung hat in der That diesen Werth ergeben.

Die Folge der gröfseren Schwankungen, welche überhaupt in den Ziffern auftreten, wenn man zu helleren Vocalen übergeht, ist auch eine weniger unerhebliche Abweichung der beobachteten von den berechneten Zahlen; aber dieselbe überschreitet doch nicht die in Rücksicht auf die Methode der Beobachtung ihr gesteckten Gränzen; so wird für das helle *a*:

$$x_1 = 5,\; x_2 = 3{,}2,\; x_3 = 3{,}1,\; x_4 = 3{,}0$$
$$y_{c'} = 1,\; y_{g'} = 1{,}6,\; y_{c''} = 2{,}2$$

$y_{e''}$ ergiebt in 3 Fällen, aus denen es sich berechnen läfst, die Werthe

3,8   4,0   3,9,

$y_{g''}$ die beiden Zahlen 6,3 und 6,6 $y_{b''}$ die 3 Zahlen 12,5, 11,7, 10,0 $y_{c'''}$ $y_{d'''}$ ergeben sich, wie erfordert wird, sehr nahe gleich, nämlich:

$$y_{c'''} = 7{,}4,\; y_{d'''} = 8{,}0,$$

u. s. w.

Aus den so sich ergebenden, etwas verschiedenen Zahlen kann man dann einen ziemlich zuverlässigen Mittelwerth ableiten.

Hiermit ist die Bestätigung dafür geliefert, dafs „charakteristische Ordnungszahl“ und „charakteristische Ton-

höhe"[1]) gemeinsam den Vocalklang bestimmen. Erstere ist durch die Form, letztere durch das Volumen des stimmlichen Resonators und die Gröſse seiner Oeffnung bedingt.

In den beiden folgenden Tabellen sind die oben angedeuteten Mittelwerthe der beiden Factorengruppen zusammengestellt. Abgesehen von dem Vocalcharakter variirt in der ersten nur die Ordnungszahl, in der zweiten nur die Tonhöhe.

Tabelle III,

enthaltend die Abhängigkeit der Intensität von der Ordnungszahl der Partialtöne.

Anmerkung: Die gleiche Gesammtintensität, die ohnehin hier ihre Bedeutung verliert, ist nunmehr aufgegeben und dafür, zur besseren Vergleichbarkeit, die Intensität des Grundtones für alle Vocale = 27 gesetzt worden, wie sie sich für $\bar{U}$ direct ergiebt, wenn man gleichzeitig für die andere Factorengruppe die Stärke des Tones *c* gleich 1 setzt. Den leergelassenen Feldern entsprechen Ziffern, welche kleiner als 1 sind.

Partialtöne.

Vocale	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
1. *U*, dumpf	27	17	8	12	4	3	1							
2. *U*, hell	27	19	10	9	4	3	2	1						
3. *O*, scharf	27	19	14	10	6	5	2	1						
4. Å.	27	14	8	8	6	5	4	3	2	1				
5. *A*.	27	18	17	17	15	7	5	3	2	1				
6. *E*.	27	19	18	12	8	6	5	5	4	3	2	1		
7. *I*.	27	21	15	11	9	7	6	5	5	4	4	3	2	1
8. *Ü*.	27	14	10	11	8	4	2	1						
9. *Ö*.	27	21	22	15	10	6	3	2	1					
10. *Ä*.	27	19	15	10	16	9	6	4	2	1				

1) Der Kürze halber mögen diese Termini gebraucht werden; der Sinn des ersteren ist völlig klar; derjenige des zweiten kann und wird es erst im Laufe der Untersuchung werden.

Tabelle IV,
enthaltend die Abhängigkeit der Intensität von der absoluten Tonhöhe.

Anmerk. Die Intensität für den Ton c ist durchweg gleich 1 gesetzt.

Töne.[1]

Vocale	c	g	c_1	g_1	c_2	g_2	c_3	g_3	c_4	g_4	c_5	g_5	c_6	g_6	
1. $\bar{U}$, dumpf	1	1.2	1.5	**1.9**[2]	1.9	1.3	1.0								
2. $\breve{U}$, hell	1	1.2	2.2	**3.2**	**3.3**	1.6	1.1	1.0							
3. $O.$	1	2.1	2.8	7.0	**7.5**	5.5	2.0	1.1	1.1						
4. Å.	1	2.4	3	7.9	**18**	11	9	7	3	1.1	1.0				
5. $A.$	1	1.6	2.2	4	6	**12**	10	8	6	4	2	1			
6. $E.$	1	1.3	2.3	3.9	4.3	**5.5**	2.5	2.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	
7. $I.$	1	1.2	1.4	2.2	4.0	4.4	**5.2**	4.0	3.0	2.6	2.0	1.7	1.4	1.2	1.0
8. $\ddot{U}.$	1	1.3	1.5	**2.0**	1.5	**2.5**	1.6	1.0							
9. $\ddot{O}.$	1	**2.0**	1.7	3.7	3.9	4.0	**4.5**	1.8	1.0						
10. $\ddot{A}.$	1	1.3	1.6	3	4	**6**	3.5	1.2	1.0	1.0					

Schon auf den ersten Blick ist die Gesetzmäſsigkeit der beiden Tabellen eine augenfällige. Zunächst möge Tabelle III näher betrachtet werden. Es zeigt sich hier, daſs der erste Partialton für alle Vocale der stärkste ist. Der menschliche Stimmapparat schlieſst sich in diesem Verhalten daher eng an die künstlichen Zungeninstrumente an. Wie bei diesen, so ist auch hier das schlieſsliche Resultat des Zusammenwirkens von Zunge und Resonanzraum dieses, daſs zwar eine groſse Menge starker Partialtöne auftritt, der stärkste bleibt jedoch hier wie dort der Grundton. Derselbe wäre dann als solcher den „Obertönen“ gegenüberzustellen,[3] und die verschiedenen Re-

1) In den höheren Octaven ergeben sich noch die Werthe für die Töne e_3 und b_3 u. s. w. Dieselben tragen aber, da in den tieferen Octaven die entsprechenden Zahlen fehlen, nichts zur Vervollständigung des Bildes bei und sind daher fortgelassen worden.

2) Die hervorgehobenen Zahlen sind diejenigen, welche dem Maximalwerthe einer Horizontalreihe am nächsten kommen.

3) Dadurch erhält auch der Gebrauch, die Tonhöhe eines Klanges nach der des Grundtones zu benennen, seine letzte Rechtfertigung.

sonatoren würden sich dadurch unterscheiden, dafs der Antheil eines jeden dieser Obertöne an der Gesammtintensität, im Verhältnifs zum Antheile des Grundtones, ein verschiedener ist.

Dies zeigt sich nun in der That an den verschiedenen Reihen der Tabelle III in sehr auffallendem Mafse.

Beim dumpfen *U* nimmt die Intensität am schnellsten ab, schon beim siebenten Partialtone beträgt sie nur noch $1\frac{1}{2}$ Proc. der Gesammtstärke; beim hellen *U* und beim scharfen *O* ist die Intensität erst beim 8., bei *A* beim 11., bei *E* beim 12. und bei *J* gar erst beim 14. Partialtone auf den entsprechenden Bruchtheil herabgesunken. Die Vocale *Ü*, *Ö*, *Ä*, entsprechen in dieser Beziehung ungefähr, resp. den Vocalen *O* *Å* *A*.

Dabei ist noch ein Unterschied in der Art dieser Abnahme zu beachten, den ich hier nur vorläufig berühre, da ich später an ihn anknüpfen werde. Die einzelnen Horizontalreihen bilden keine arithmetischen Progressionen, sondern die Abnahme erfolgt einige Mal erst rasch, dann langsam, andere Male umgekehrt. Das erste findet in auffallendster Weise bei *Å* und *J*, das letztere am stärksten bei *Ö* und *A* statt, während in dieser Beziehung *U* und *E* eine mittlere Stellung einnehmen.

Von der allgemeinen Regel der stetigen Abnahme der Intensität beim Durchlaufen der Partialtöne finden nur zwei der Berücksichtigung werthe Ausnahmen statt; beim dumpfen *U* ist nämlich der vierte Partialton stärker als sein Vorgänger, ja bei einer recht dumpfen Klangfärbung sogar stärker als der zweite Partialton, und beim *Ä* tritt der fünfte Theilton stärker, als ihm zukäme, hervor. Der Grund des ersten Phaenomens liegt nach den Beobachtungen, die ich zu diesem Zwecke an der Mundhöhle machte, darin, dafs bei einem sehr dumpfen *U* die Oeffnung des Mundes eine überaus kleine wird, ein Umstand, der einen erheblichen Einflufs der Oeffnungswand wahrscheinlich macht. Ueberdies wird dabei die Gestalt der Oeff-

nung derjenigen sehr ähnlich, wie sie der Mund beim Pfeifen annimmt. Alles das wird durch das dabei hörbare pfeifende Geräusch bestätigt, welches dem Zischen des Consonanten *f* ähnelt. Allerdings wäre danach zu erwarten, daſs der besonders verstärkte Partialton ein noch späterer als der vierte sey. Jedenfalls deutet diese Erscheinung darauf hin, daſs beim dumpfen *U* der Uebergang vom Vocalcharakter zum Consonantencharakter stattfindet, und somit vom regelmäſsigen Ton zum regelmäſsig periodischen Geräusch, bei welch' letzterem eine Zerlegung in Pendelschwingungen zwar immer noch möglich ist, aber eine ganz unregelmäſsige Vertheilung liefern würde. Ein leiser Anklang dieser Unregelmäſsigkeit zeigt sich somit schon hier an der Gränze des Vocalgebietes. Uebrigens findet sich ein zweites Charakteristikum dieser Gränzstellung des *U* auch in der Tabelle IV wieder, worauf ich später zurückkomme.

(Ob das ähnliche Verhalten bei *Ä V*, in analogem Sinne mit dem Umstande in Verbindung zu bringen sey, daſs dieser Vocal am nächsten demjenigen kommt, was man gewöhnlich als „unartikulirten Laut" bezeichnet, möge dahingestellt bleiben.)

Die Resultate aus den Zahlen der Tabelle III lassen sich durch äuſserst mannigfaltige Versuche an der eigenen Stimme bestätigen. Bei denselben spielt der günstige Zufall zwar eine wichtige Rolle, und es hält oft schwer, die Beobachtung einer bis dahin an der Empfindung stets spurlos vorübergegangenen Erscheinung, nachdem man dieselbe ein oder zweimal gemacht hat, wiederholen zu können; allein durch Anwendung von Kunstgriffen, auf die man dabei unwillkürlich geführt wird, erhält man trotzdem oft überraschende Bestätigungen der Theorie. Es möge genügen, hier *einen* solchen Versuch anzuführen. Beim dumpfen *U* sind nach der Tabelle III die beiden ersten Theiltöne, besonders wenn man sie in die Gegend der charakteristischen Tonhöhe fallen läſst, von Allen bei weitem die stärksten. Wählt man nun die Tonhöhe dem-

gemäfs und verstärkt noch den Klang dadurch, dafs man die Ohren durch Auflegen der flachen Handteller sanft verschliefst, so hört man zwei um eine Octave auseinanderliegende Töne, deren jeder, wenn man die Aufmerksamkeit auf ihn allein concentrirt, in der That sehr ähnlich dem Klange einer Stimmgabel ist, welche auf denselben Ton abgestimmt und auf einen Resonanzkasten aufgesetzt ist.

Was die Tabelle IV betrifft, so unterscheidet man sofort zwischen den einzelnen Horizontalreihen zwei Kategorien von Unterschieden. Sämmtliche Reihen fangen mit der dem Tone *c* (dem tiefen *c* des Basses) entsprechenden Einheit der Tonstärke an, aber die eine erreicht früher, die andere später ihr Maximum, und zwar erkennt man unmittelbar, dafs das Maximum desto später erreicht wird, je heller der Vocalklang ist. Zur Definition des „hellen" resp. des „dumpfen" Vocalcharakters wirken daher ebenfalls „charakteristische Tonhöhe" und „charakteristische Ordnungszahl" zusammen. Speciell ergiebt sich die erstere für das dumpfe *U* in der Gegend des *g*, beim hellen *U* zwischen *g* und *b*, also ungefähr dem Violinen-*a* entsprechend; ferner rückt sie für das scharfe *O* bis zum *b* und c_2 hinauf, beim schwedischen *Å* fällt sie auf das e_2, beim hellen *A* auf a_2, ungefähr in dieselbe Gegend auch bei *Ä* und *E*, und am höchsten hinauf, nämlich auf das c_4, d. h. auf die durchschnittliche Gränze der menschlichen (Sopran-) Stimme beim *J*. Endlich zeigt sich, dafs *Ü* und *Ö* zwei charakteristische Tonhöhen haben; und zwar liegen die beiden Maxima der Intensität für *Ü* ziemlich nahe bei einander (bei g_1 und g_2), für *Ö* dagegen beträchtlich von einander entfernt (bei *g* und c_3). Die Abweichung der Zahl für *Ü* auf *g* von dem regulären Verlaufe, wie die Horizontalreihe ihn vermuthen läfst, ist zu geringfügig, um sie in den Kreis der Betrachtung zu ziehen.

Die Gröfse der Mundhöhle, wie sie sich bei den verschiedenen Vocalen herstellt, in Verbindung mit der Weite der Oeffnung entspricht diesen Resultaten vollkommen.

Ordnet man nämlich die Vocale das eine Mal nach der Gröſse der Oeffnung (in steigender Reihe), das andere Mal nach dem Volumen der Mundhöhle (ebenfalls in steigender Reihe), so erhält man für ein mittleres, ungezwungenes Timbre die beiden Anordnungen[1]):

1) *Ū, Ü̆, Ŭ, Ō, Ö̆, J, E, Ȧ, A, A.*

2) *J, E, Ü̆, Ö̆, O, Ŭ, Ū, Å, A, A.*

Die Art und Weise, wie diese beiden Einflüsse sich zusammensetzen, ist jedenfalls eine ziemlich complicirte. (Man vergleiche z. B. die für die einfachsten Resonatoren schon sehr complicirten Formeln von Helmholtz in Crelle's J. Bd. 57, oder bei Kirchhoff, Vorlesungen etc. S. 344.)

Zur Bestätigung des Obigen genügt es aber auch, je zwei demselben Vocal entsprechende Stellen in reciprokem Sinne zu combiniren; d. h. die charakteristische Tonhöhe muſs beim Fortschreiten in der ersten Reihe zunehmen, beim Fortschreiten in der zweiten Reihe dagegen abnehmen. Daraus folgen aber in der That die aus der Tabelle IV geschlossenen Verhältnisse; z. B. daſs *U* die tiefste, *A* eine mittlere, *J* die höchste charakteristische Tonhöhe besitzt. Dabei ist jedoch zu beachten, daſs in einigen Fällen der Einfluſs der Oeffnung denjenigen der Mundhöhle selbst bedeutend übertrifft. Man erkennt dies unter Anderem beim hellen *A*, dessen charakteristische Tonhöhe viel näher derjenigen des *J*, als der des *U*, d. h. viel näher an der oberen, als der unteren Gränze ihres Gebietes überhaupt liegt. Bei dem Kampfe zwischen Oeffnung und innerem Volumen, welche beide hier so groſs als möglich geworden sind, zieht das Innere den Kürzeren. Man wird das aber auch ganz natürlich finden, wenn man bedenkt, daſs

1) Hierin bedeutet *Ū* das dumpfe, *Ŭ* das helle *U*. Etwas abweichend von diesen Reihen, auch im Principe, sind die von Kempelen (man sehe unter Anderem Funke, Lehrbuch der Physiologie, S. 735) aufgestellten, deren eine sich auf die „Weite des Mundkanals" bezieht, während das Princip der entsprechenden obigen Reihe das Volumen ist.

gemäfs der Theorie der Luftschwingungen in Räumen, welche durch eine Oeffnung mit dem unendlichen Raume communiciren, die Grenzschicht, in welcher man die durch den Uebergang gestörte Bewegung gesondert darstellen mufs, gröfser und daher das für die reinen Schwingungen, wie sie dem Inneren des Resonanzraumes entsprechen, in Betracht kommende Gebiet kleiner wird, wenn die Oeffnung eine beträchtliche, und daher die Abgeschlossenheit des betrachteten Raumes, wie des Mundes beim *A*, eine gröfstentheils illusorische wird.

Die hier erörterten Werthe der charakteristischen Tonhöhen, die ich etwa als die *„reducirten charakteristischen Tonhöhen“* bezeichnen möchte, liegen viel näher aneinander, als diejenigen, welche noch durch den Einflufs der Ordnungszahlen getrübt sind, und die man, da sie ein unmittelbarer Ausdruck der Beobachtung sind, den ersteren als die „scheinbaren charakteristischen Tonhöhen“ gegenüberstellen kann. So ist z. B. die scheinbare charakteristische Tonhöhe des dumpfen *U* das ungestrichene *f* [1]), während die reducirte um mehr als eine Octave höher liegt. Das Umgekehrte findet für *i* statt: hier liegt die reducirte charakteristische Tonhöhe um mehr als eine Octave niedriger, als die scheinbare. Ferner fällt durch Elimination des Einflusses der Ordnungszahl der Partialtöne beim *Ä*, *E*, *J* die Zweitheilung der charakteristischen Tonhöhe fort, indem sie sich einem Durchschnittswerthe mehr oder weniger nähert, (man vergl. Helmholtz l. c.). Auffallend ist es, dafs beim *Ü* und *Ö*, wo auch die wahre charakteristische Tonhöhe zwei Werthe aufweist, die Anordnung derselben gerade eine umgekehrte ist als dort: hier schliefsen die beiden charakteristischen Tonhöhen für

1) Nach der Angabe von Helmholtz l. c. S. 177, die ich gegenüber der Donders'schen, erheblich abweichenden, mit Hülfe der Kugel-Resonatoren für die meisten Vocale genau bestätigt fand. Speziell hier entspricht der von *D* angegebene Ton *f*, schon sehr näherungsweise dem altdeutschen *no*, also auch dem deutschen *o*, und gerade in Bezug auf diesen Vocal weicht die holländische Aussprache wenig von der norddeutschen ab.

Ü diejenigen für *Ö* ein, dort findet das Entgegensetzte statt.

Dafs die reducirten charakteristischen Tonhöhen näher bei einander liegen, als die scheinbaren, ist offenbar eine Folge davon, dafs bei den dumpfen Vocalen der Einflufs der Ordnungszahl die erstere vertieft, dagegen bei den helleren, wo die späteren Partialtöne relativ den gröfsten Antheil an der Gesammtintensität haben, erhöht, und es stimmt hiermit überein, dafs bei dem Vocale *A*, der in dieser wie in mancher anderen Beziehung eine gewisse mittlere Stellung einnimmt, die reducirte charakteristische Tonhöhe mit der scheinbaren annähernd zusammenfällt.

Ein wesentlicher Unterschied zeigt sich ferner in den Verhältnissen der Zahlen selbst untereinander. Die Stärke des Tones $c = 1$ gesetzt, ist das Maximum der Intensität für *U* und *Ü* etwa durch die Zahl 2 oder 3, für *E* und *J* einerseits, *Ö* und *Ä* andererseits durch eine der Zahlen 4 bis 6, dagegen für *O* durch 8, für *A* durch 12 und für das breite *Å* gar durch 18 bis 20 ausgedrückt. Es zeigt sich somit, dafs hier die Vocale *Å* und *A*, welche sonst eine gewisse Mittelstellung einzunehmen pflegen, die obere Gränze bezeichnen, während die sonst diametral gegenüberliegenden Vocale *U* und *J* hier nahezu unter dieselbe Kategorie fallen. Daraus ist zu schliefsen, dafs das Verhältnifs des Maximalwerthes der Intensität zu ihrem Werthe für einen beliebig, aber fest gewählten Ton das Charakteristikum, wenn nicht geradezu die Definition ist für die Erscheinung, die man gewöhnlich durch die Bezeichnungen eines „vollen Klanges“ (*Å*, *A*, auch noch *O* und *Ä*) und eines „leeren Klanges“ (besonders *E*, aber auch *Ü* und *J*) angiebt. Dem ersteren würde sonach ein grofser, dem letzteren ein kleiner Werth jenes Verhältnisses entsprechen. Hiermit hängt es zusammen, dafs die Vocale *U* und *J* als die beiden Gränzen des Vocalgebietes anzusehen sind, und zu der schon früher erwähnten, in diesem Sinne charakteristischen Eigenthümlichkeit des dumpfen

U-Klanges kommt hier noch die hinzu, dafs die Verschiedenheit der Intensität für verschiedene Tonhöhen, welche bei dem Consonanten-Geräusch jedenfalls verschwindet, schon bei *U* und *J* sich dieser Gränze einigermafsen nähert und so den Uebergang kennzeichnet, einerseits vom dumpfen *U* zu den aushaltenden Labialconsonanten (*v*, *f*, *m*)[1], mit periodischer Bewegung, andererseits vom geprefsten *J* zu den die analoge Rolle spielenden Guttural-Consonanten (*j*, *ch* in seinen beiden Nüancen). Es stimmt damit sehr gut überein, dafs die Zahlen in der für *J* geltenden Horizontalreihe der Tabelle IV noch geringere Differenzen aufweisen, wenn man bei den Versuchen, die zu ihrer Berechnung erforderlich sind, das *J* etwas gequetscht, d. h. dem *j* angenähert, ausspricht.

Auch die Ergebnisse der Tabelle IV lassen sich durch Versuche, wie sie im Anschlufs an die vorige Tabelle erwähnt wurden, auf mannigfaltige Art bestätigen. Auch hier mufs ich der Kürze halber auf ein Beispiel mich beschränken.

Wendet man wie oben das auf dem sanften äufseren Verschlufs der Ohren beruhende Mittel zur Verstärkung des Klanges an, nnd singt man dann *in einem Athemzuge* ein mittleres *U*, vom g_{-1} beginnend bis zum g_1, d. h. bis zur oberen Stimmgränze (die Specialitäten der Angaben beziehen sich auf eine Bariton-Stimmlage), so hört man, obgleich während der Dauer eines Athemzuges eine Verlangsamung der Expiration, also eine Verminderung des Drucks auf die Stimmbänder anzunehmen ist, trotzdem den Klang sehr entschieden anschwellen, von Ton zu Ton an Mächtigkeit zunehmen. Das ist ein Beweis dafür, dafs der Vocal *U* in der Gegend des g_1 am besten anspricht, gerade wie es die Theorie verlangt.

1) Wenn hier auch *m* zu den Labialbuchstaben gerechnet wird, so hat das seine Berechtigung darin, dafs bei ihm die Lippen eine ebenso wichtige negative Rolle (durch Verschlufs) spielen, als sonst eine positive.

Ich habe gerade dieses Beispiel hier angeführt, um einen Einwurf zu erledigen, der gegen die obige Erklärung gemacht werden kann, der aber auf einer unrichtigen Thatsache basirt. Es wird nämlich vielfach behauptet, die höchsten in der Stimmlage vorhandenen Töne könnten nur laut gesungen werden (u. A. Hermann, Grundriſs der Physiologie des Menschen, S. 265); das würde dann allerdings die Beweiskraft des obigen Versuches erheblich schwächen. Es ist aber durchaus nicht der Fall; im Gegentheil bedarf es groſser Anstrengung, diejenigen Töne laut zu singen, die man leise noch ohne Schwierigkeit hervorbringt. Die Veranlassung zu obiger Behauptung scheint mir der bei diesen Tönen stattfindende Uebergang vom Brustton zum Fisteltone gewesen zu seyn, der eben nicht ganz plötzlich geschieht. Diejenigen Töne, die sich leichter laut singen lassen, als gleich hohe schwache Töne, sind dann eben nicht mehr reine Brusttöne.

Was die Gesetze des Ansteigens und Absteigens der einzelnen Horizontalreihen beider hier besprochener Tabellen betrifft, so komme ich sogleich darauf zurück, muſs jedoch zu diesem Zwecke etwas weiter ausholen.

§ 5. *Mathematische Darstellung der empirischen Resultate.*

Die Vocale sind die Folge der Schwingungen der Stimmbänder und der dadurch erregten Schwingungen der Luft in der Mundhöhle. Das Princip dieser Erregung ist die Resonanz, und durch die Oeffnung des Mundes pflanzt sich die Bewegung fort bis zum Ohre des Hörenden. Die Bewegung der Luft ist dabei eine fortschreitende Wellenbewegung und zwar fällt die Schwingungsrichtung mit der Richtung der Fortpflanzung zusammen, d. h. die Wellen sind longitudinale. Das allgemeine Integral der für diesen Fall bestehenden Differentialgleichung hat bekanntlich die Form:

$$(1) \qquad \xi = \Sigma_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}} \sin(2\pi \mathfrak{a} n t + c_{\mathfrak{a}}),$$

wo ξ die Verrückung zur Zeit t bedeutet. Der Index $\mathfrak{a}$

bestimmt einen speciellen, in dem Klange (1) enthaltenen einfachen Ton, die Constante A_α dessen Amplitude, also seine Intensität; in ihrem Verhältnisse zu einander bestimmen daher die verschiedenen Werthe, welche A_α bei variirendem α annimmt, die Antheile der Partialtöne an der Gesammtintensität des Klanges. Ferner ist c_α die Phase der Oscillation, und n die Schwingungszahl des tiefsten, d. h. des sogenannten Grundtones. Die Schwingungszahl des α. Theiltones dann nach (1) $\nu_\alpha = \alpha . n$.

Um einen Ausdruck für die oben für die Vocalklänge entwickelten Resultate zu erhalten, ist nun folgender Weg einzuschlagen; dabei müssen wir aber die Bedeutung der Gröfsen A ein wenig ändern. Es sind dies, wie die Theorie verlangt, Gröfsen, welche von t unabhängig sind; wir können und wollen aber annehmen, dafs sie von n abhängen, also variiren, wenn der Singende die Tonhöhe ändert. Wir haben dann statt der Gleichung (1) zu schreiben:

$$\xi = \Sigma_\alpha f_\alpha (n) . \sin (2 \pi \alpha n t 4 c_\alpha), \tag{2}$$

und der Werth von $f(n)$ wird hierin für die verschiedenen α ein verschiedener seyn.

Das Schema der Versuche, welche anzustellen sind, um diese Funktionen zu bestimmen, ist angegeben in den Verticalreihen der Tabelle II; nur ist eine viel gröfsere Reihe von Werthbestimmungen erforderlich; für jeden Theilton ergiebt sich dann eine ganz bestimmte Intensitätscurve (entsprechend der Funktion f, wenn man darin α als constant betrachtet); dieselbe wird ein Maximum haben, entsprechend der charakteristischen Tonhöhe, und die verschiedenen Maxima werden nicht zusammenfallen. Will man dann ein Bild der Abhängigkeit der Intensität von der Tonhöhe in irgend einem bestimmten Momente[1]) erhalten, so hat man diese Kurven in demselben Coordinatenfelde zusammenzustellen, mufs dabei aber die Einheit der

1) z. B. für $t = o$; der Einfachheit wegen möge nämlich vorausgesetzt werden, dafs nur solche Fälle betrachtet werden, in denen die Phase c_α von α unabhängig ist.

Ordinatenlänge für die verschiedenen Kurven nicht einander gleich wählen, sondern proportional mit gewissen Intensitätszahlen, welche sich aus Versuchen ergeben, die von der absoluten Tonhöhe unabhängig sind, die also den isolirten Punkten entsprechen, aus denen sich bei constantem n die Funktion f zusammensetzt. Die Addition der Ordinaten leistet dann das Gewünschte. Allein erstens wird die Darstellung nicht so einfach, wenn man den Bewegungszustand in seiner Abhängigkeit von der Zeit kennen lernen will (denn dann lassen sich die Coefficienten der Periodicitätsfactoren nicht zusammenfassen), und zweitens sind die von dieser Methode erforderten, oben erwähnten beiden Versuchsreihen, die ich zwar angestellt, aber eben deshalb nicht wiedergegeben habe, äufserst schwierig und von fremden Einflüssen kaum zu befreien. Es ist daher ein glücklicher Zufall, dafs die bereits oben abgeleitete specielle Form der Funktion $f(\mathfrak{a}, n)$ diese Versuche und Betrachtungen unnöthig macht. Dabei ist jedoch bei der Deutung der dort (S. 25) aufgestellten Gleichung

$$(A) \quad f(\mathfrak{a}, n') = \psi(\mathfrak{a}) \cdot \varphi(n')$$ [1]

mit Vorsicht zu verfahren. Es wäre nämlich falsch, etwa in Anbetracht des Umstandes, dafs der Faktor $f(n)$ von $\mathfrak{a}$ unabhängig ist, denselben vor das Summenzeichen der Gleichung (2) zu setzen und diese somit zu schreiben:

$$[\xi = \varphi(n) \cdot \Sigma_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a}) \cdot \sin(2\pi \mathfrak{a} n t + c)]$$

(Man sieht das unter Anderem dadurch ein, dafs dann die Vertheilung der Intensität auf die Partialtöne von dem Factor $\varphi(n)$, also von der absoluten Tonhöhe unabhängig wäre, entgegen den Zahlen der Tabelle II.) — Es bedeutet nämlich in dem Ausdrucke $\varphi(n')$ das Argument n' die Schwingungszahl des Tones, auf den sich das Argument

1) Das obige p ist hier mit $\mathfrak{a}$, n mit n' bezeichnet. Aufserdem ist zu beachten, dafs die 3 Funktionen dieser Gleichung sich auf die Amplituden, diejenigen der Gl. auf S. 193 dagegen auf die Intensitäten beziehen. Diese sind also die Quadratwurzeln aus jenen.

des andern Factors bezieht; dagegen bedeutet unter dem Sinus n die Schwingungszahl des Grundtones; will man daher beide Zahlen durch n ausdrücken, so hat man statt (A) zu schreiben:

$$\text{(B)} \quad f(\mathfrak{a}, n) = \psi(\mathfrak{a}) \cdot \varphi(\mathfrak{a} n).$$

Der Specialwerth des Argumentes der φ-Funktion, also auch der Werth dieser selbst wird dann für jeden Partialton ein anderer seyn und man hat definitiv die folgende Bewegungsgleichung:

$$\text{(3)} \qquad \xi = \Sigma_{\mathfrak{a}}\, \varphi(\mathfrak{a} n) \cdot \psi(\mathfrak{a}) \cdot \sin(2\pi \mathfrak{a} n t + c_{\mathfrak{a}}).$$

Der erste Faktor läfst sich nun mit Hülfe der Tabelle IV unmittelbar charakterisiren. Dabei soll, da ($\mathfrak{a} n$) nur einen bestimmten Werth von n bezeichnet, der Kürze halber von einer Funktion φ (n) gesprochen werden.

Zunächst zeigt sich, dafs die Curven, welche diesen Factor für den einen oder den anderen Vocal bestimmen, im Allgemeinen ein einziges Maximum haben und von diesem aus zu beiden Seiten fallen, bis sie sich, wie man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, in der Unendlichkeit der horizontalen Axe von oben her unendlich nähern. Zur genauern Diskussion stellen wir erst das Coordinatensystem, und in Verbindung damit die unabhängige Variable fest. Wählt man unmittelbar die Schwingungszahl n zur unabhängigen Variabeln x, so hat man zu beachten, dafs nur für positive Werthe von x, und zwar auch hier nur von einer gewissen Stelle an (nämlich von $x = 16$ an, wenn man die Sekunde zur Zeiteinheit wählt) die Ordinate reelle Werthe hat. Gleichzeitig hat dann das Coordinatenfeld, vom Standpunkte der musikalischen Intervalle aus betrachtet, den Uebelstand, dafs man seinen Maafsstab von rechts nach links verkürzt sich vorstellen mufs; will man daher ein möglichst ähnliches Bild des Tongebietes erhalten, so hat man, in Erwägung des diesen Uebelstand hervorrufenden Umstandes, dafs nämlich die musikalischen Intervalle in arithmetischer Reihe fortschreiten, wenn die Schwingungszahlen in geometrischer zuneh-

men, statt der Schwingungszahl deren Logarithmus einzuführen. Es wird sich dann weiter empfehlen, das Maximum in die Ordinatenaxe fallen zu lassen; das einzige mangelhafte an dieser Wahl ist es, daſs auf diese Weise das Coordinatensystem für jeden Vocal ein anderes wird. Man hat dann offenbar

$$x = \lg\left(\frac{n}{N}\right)$$

zu setzen; denn dem Werthe $n = N$ (wo N die Schwingungszahl des Tones in der charakteristischen Tonhöhe bedeutet), entspricht der Werth $x = o$, wie erfordert, und die Ordinate hat jetzt für alle positiven und negativen Werthe von x, welche innerhalb der Gränzen des Gebietes der Hörbarkeit liegen, reelle Werthe. Will man schlieſslich noch die Octave zur Einheit des musikalischen Intervalles wählen, so hat man dafür zu sorgen, daſs dem Werthe $n = 2N$ der Werth $x = 1$ entspreche. Man erreicht dies und gleichzeitig allgemein, daſs für $n = 2^k . N$ $x = k$ werde, wenn man setzt:

$$x = \frac{\lg\left(\frac{n}{N}\right)}{\lg 2} = \frac{\lg n - \lg N}{\lg 2} \qquad (4)$$

Diese Gleichung wollen wir definitiv beibehalten.

Wenn nun die Intensität überhaupt eine algebraische Funktion dieses Logarithmus ist, so machen es die oben angeführten Eigenschaften in hohem Grade wahrscheinlich, daſs die ihr entsprechende Curve von der dritten Ordnung sey. Daſs sie mindestens von dieser Ordnung ist, folgt daraus, daſs es gerade Linien giebt, welche sie in drei Punkten schneiden. Wir wollen annehmen, sie sey nicht von höherer Ordnung; dafür spricht, daſs es keine gerade Linie zu geben scheint, welche sie in mehr als drei reellen Punkten schnitte, und daſs etwa vorhandene, für jeden Werth der Constanten, theilweise oder ganz imaginäre oder in der Unendlichkeit liegende Zweige für das Folgende ohne Werth sind. Da ferner die Intensität eine eindeutige Funktion der Schwingungszahl, nämlich $y = [\varphi(n)]^2$ ist,

darf in der zu bildenden Curvengleichung y höchstens in der ersten Potenz vorkommen. Es fallen daher aus der allgemeinen Gleichung dritten Grades zwischen zwei Variabeln 3 Glieder fort, und sie geht in die speciellere über:

$$ax^3 + bx^2 y + cx^2 + dxy + ex + fy + g = o,$$

woraus sich

$$y = -\frac{ax^3 + cx^2 + ex + g}{bx^2 + dx + f}$$

ergiebt. Nun soll für $x = \pm\infty$ $y = o$ werden; der Zähler der gebrochenen Funktion, welche y darstellt, mufs daher von niederer Ordnung als der Nenner seyn, d. h. es wird $a = c = o$ und

$$y = -\frac{ex + g}{bx^2 + dx + f}.$$

Es ist noch zu untersuchen, ob diese Curve, wie verlangt, die x = Axe zur Asymptote habe. Das ergiebt sich aber sehr einfach auf folgende Weise. Die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

wird hier:

$$\eta + \frac{ex + g}{bx^2 + dx + f} = (\xi - x) . \frac{-e(bx^2 + dx + f) + (2bx + d)(ex + g)}{(bx^2 + dx + f)^2}$$

Setzt man hierin $x = \infty$, wodurch die Tangente speciell in eine Asymptote übergeht, so wird links das zweite Glied, und die ganze rechte Seite unendlich klein, das einzige Glied η, dessen Gröfsenordnung unbestimmt bleibt, mufs daher auch unendlich klein seyn, d. h. man erhält als Gleichung der Asymptote $\eta = o$; sie fällt also in der That mit der Abscissenaxe zusammen.

Die bisherigen Schlüsse gelten für jede mit n durch eine logarithmische Beziehung verknüpfte unabhängige Variable. Adoptirt man definitiv die Gleichung (b), so entspricht dem Werthe $x = o$ der Werth $n = N$, d. h. der Maximalwerth von y. Es mufs daher

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = o$$

seyn. Diese Gleichung gestaltet sich nun hier folgendermaſsen:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{e(bx^2 + dx + f) - (2bx + d)(ex + g)}{(bx^2 + dx + f^2)}\right),$$

also

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \frac{dg - ef}{f^2} = o,$$

und schlieſslich

$$dg = ef, \text{ oder: } d : f = e : g.$$

Setzt man, dieser Proportion gemäſs:

$$d = \varkappa \,.\, e, \; f = \varkappa \,.\, g,$$

wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet, so wird

$$y = -\frac{ex + g}{bx^2 + \varkappa(ex + g)},$$

und endlich, wenn man Zähler und Nenner mit $\frac{1}{b}$ multiplicirt und den Constanten e und g Bedeutungen giebt, die den bisherigen gleich, aber entgegengesetzt sind, unter Einführung neuer Zeichen:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \varkappa(\alpha x + \beta)}. \tag{5}$$

Von den 3 noch übrig gebliebenen Constanten α, β, $\varkappa$ bestimmt $\varkappa$ das Maximum der Intensitätscurve; denn für $x = o$ wird

$$y_{max.} = \frac{1}{\varkappa},$$

dagegen bestimmen α und β den sonstigen Verlauf derselben.

Es wäre nun naheliegend, die Curve weiter so zu specialisiren, daſs sie symmetrisch in Bezug auf die y Axe wird. Diese Bedingung läſst sich allgemein nur erfüllen, wenn man

$$\alpha = o$$

und mithin

$$y = \frac{\beta}{x^2 + \varkappa\beta}$$

setzt. Aus einem Grunde, der nach Durchführung der Rechnung ersichtlich werden wird, soll jedoch die etwas allgemeinere Gleichung (5) beibehalten und der Darstellung

der Zahlen der Tafel IV zu Grunde gelegt werden. Dabei wird sich auch für α ein bestimmter (von Vocal zu Vocal wechselnder) Werth ergeben, und aus der Abweichung desselben vom Nullwerthe wird sich ein gewisser Schluſs ziehen lassen.

Die Berechnungsmethode selbst ist unmittelbar klar. Setzt man zunächst $x = o$, so erhält man x als den reciproken Werth der in der Tabelle IV fettgedruckten Zahlen; man wird jedoch im Folgenden finden, daſs gewöhnlich eine etwas höhere Zahl für das Maximum gewählt worden ist; demselben entspricht dann auch ein etwas anderer Werth von N; diese Werthe sind als Correctionswerthe wegen der in Tabelle IV fehlenden Zwischenstufen zu betrachten; sie sind das Resultat einer, eben ohne diese Correction angestellten Rechung, welche leicht ersichtlich und daher hier fortgelassen worden ist. Für die Bestimmung der Constanten α und β hat man bei jedem Vocale so viele Gleichungen, als die Tabelle IV Vertikalreihen; es sind *je* zwei dieser Gleichungen zu combiniren und aus der grossen Anzahl von Werthen dann jedesmal, mit den für diese Rechnung bekannten Vorsichtsmaſsregeln, der Mittelwerth herzustellen. Sowohl diese Werthe als die daraus gebildeten Gleichungen für y stimmen im Allgemeinen sehr gut für die Vocale *Ū*, *Ŭ*, *Ō*, für die anderen Vocale stimmen sie wenigstens für die Tonhöhen abwärts von der charakteristischen Tonhöhe sehr gut; und die geringen Abweichungen für die höheren Tonlagen verlieren noch von der Bedeutung, wie man sie ihnen anfangs vielleicht beilegen könnte, wenn man bedenkt, daſs diese Zahlen Tonhöhen entsprechen, die meist weit über die Gränze des männlichen Stimmorgans hinausliegen, und die daher berechnet sind aus Versuchen, in denen sie stets die Rolle von späten Obertönen spielten. Wenn daher die Curve, welche aus den Werthen der Intensität für beide Hälften des Tongebietes berechnet ist, denen für die erstere sich mehr anschlieſst als den anderen, so ist immerhin anzunehmen, daſs sie selbst eine gewisse Correction ausübt.

Uebrigens habe ich, zur Vervollständigung, für diese Vocale aufserdem je zwei Curven dritter Ordnung mit verschiedenen Constanten berechnet, von denen die erste für das Tongebiet unterhalb der charakteristischen Tonhöhe, die letztere für das Gebiet oberhalb derselben gilt; die erstere ist nur aus der ersten, die letzte nur aus der zweiten Zahlengruppe einer Horizontalreihe der Tafel IV berechnet; in der einen darf x von $-\infty$ bis o, in der anderen von o bis $+\infty$ variiren. In ihrem Gebiete liefert dann jede Curve sehr genaue Angaben. In der folgenden Tabelle sind *die* Werthe von N, $\varkappa$, α, β für die verschiedenen Vocale zusammengestellt, welche sich auf die durch das ganze Gebiet geltenden Curven beziehen. Aufserdem habe ich danach die Intensitätscurven construirt und in der beifolgenden Tafel I aufgezeichnet. Um die Deutlichkeit des Bildes, welches dieselbe von dem Vocalgebiete in Bezug auf die Intensität des Klanges in verschiedenen Tonhöhen entwirft, nicht zu beeinträchtigen, habe ich dort jedoch nur die Curven für die 6 wesentlichsten Vocalklänge verzeichnet.

Tabelle V,

enthaltend die Constanten der Intensitätscurven der verschiedenen Vocale.

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \varkappa(\alpha x + \beta)}.$$

Vocale	N	$\varkappa$	α	β
1. *U*, dumpf	400	0.50	— 0 78	2.21
2. *U*, hell	450	0.29	— 0.73	2.45
3. *O*.	500	0.13	— 0.50	3.85
4. *Å*.	600	0.05	+ 2.17	6.36
5. *A*.	800	0.08	+ 2.71	15.51
6. *E*.	760	0.17	+ 0.54	3.70
7. *I*.	1000	0.19	+ 1.21	7.90
8. *Ä*.	780	0.16	— 1.29	3.19

Bei den Vocalen $\ddot{U}$ und $\ddot{O}$ müfste man, um eine annähernd richtige Darstellung zu erlangen, zwei Curven 3. Ordnung in Betracht ziehen, welche um ein gewisses Stück der Abscissenaxe gegen einander verschoben sind, und welche in den Summen entsprechender Ordinaten die Intensität geben. Die letztere wird dadurch natürlich eine Funktion höheren Grades in x.

Als Anhang folgen hier noch die Constanten der beiden oben eingeführten Theilcurven für einige Vocale. Ihre Werthe für negative x sind mit α_1 und β_1, diejenigen für positive x resp. mit α_2 und β_2 bezeichnet. Der Werth von $\varkappa$ ist selbstverständlich beiden Theilen gemeinsam.

Tabelle Va.

$$y_{x<0} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 + \varkappa(\alpha_1 x + \beta_1)}, \quad y_{x>0} = \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{x^2 + \varkappa(\alpha_2 x + \beta_2)}$$

Vocale		α_1	β_1	α_2	β_2
1.	*O.*	− 0.33	4.67	+ 0.75	1.0
2.	*Å.*	− 1.1	4.2	+ 4.7	4.6
3.	*A.*	+ 1.8	8.3	− 3.9	30.8
4.	*E.*	− 2.25	4.3	+ 4.77	− 2.05
5.	*I.*	− 0.05	8.8	+ 6.0	1.2

Zunächst ergiebt sich aus Tabelle V, dafs die Schwingungszahl der charakteristischen Tonhöhe für die verschiedenen Vocale zwischen 400 (dumpfes *U*) und 1000 (*J*) variirt; das Gebiet, in welchem charakteristische Tonhöhen überhaupt liegen, erstreckt sich also vom g_1 bis zum c_3, also nur durch ungefähr ein und eine halbe Octave. Diese Gränzen sind, wie schon erwähnt, viel enger als diejenigen des Gebietes der scheinbaren charakteristischen Tonhöhen. Sie sind aber auch den gesanglichen Verhältnissen entsprechender, indem diese reducirten charakteristischen Tonhöhen aller Vocale in derjenigen Octave oder in ihrer

Nähe liegen, welche die Mittellage der menschlichen Stimme ausmacht.

Was die Werthe von x betrifft, so sind dieselben, als die reciproken Maxima, bereits oben diskutirt worden.

Die Werthe von α und β weisen für die ersten fünf Vocale eine stete Zunahme auf, und die Werthe für die drei letzten Klänge ordnen sich in gewisse Intervalle der ersteren ein. Dabei zeigt sich, dafs die Werthe von α zu beiden Seiten des Nullpunktes herumschwanken, ohne sich für irgend einen Vocal weit von ihm zu entfernen. Die Abweichungen von dem oben deducirten Nullwerthe, welcher α eigentlich zukommen müfste, sind also zwar gering, können aber, wie aus ihrer regelmäfsigen Anordnung hervorgeht, ohne Bedeutung, d. h. ausschliefslich Folgen von Beobachtungsfehlern, nicht seyn. Sie haben nämlich zur Folge, dafs die Gestalt der Intensitätscurve eine von der proponirten etwas abweichende wird. Für die Vocale U, O, $\ddot{A}$ wird nämlich für gewisse positive, für $\mathring{A}$, A, E, J für gewisse negative $x =$ Werthe die Intensität, indem sie durch Null hindurchgeht, negativ; sie bleibt es dann, ohne übrigens jemals einen beträchtlichen negativen Werth zu erreichen (das absolute Minimum beläuft sich durchschnittlich auf 0.1, wird aber nie gröfser als 0.3), und schmiegt sich dann von der unteren Seite her an die Abscissenaxe an, die sie auch jetzt noch zur Asymptote hat. Sobald aber die Intensität $y = [\varphi(n)]^2$ negativ wird, wird die Amplitude φ (n) selbst imaginär und somit die durch (3) dargestellte Bewegung unmöglich. Daraus ist zu schliefsen, dafs der Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe den Gränzwerth von x, also auch von n, und somit diejenige Tonhöhe angiebt, für welche der betreffende Vocalklang sich gerade noch singen läfst, während das für Tonhöhen, welche jenseits liegen, nicht mehr möglich ist. Dabei sind unter den jenseitigen Höhen für die erstgenannten Vocale die höheren, für die übrigen die tieferen Töne zu verstehen. Dieses Ergebnifs, von dem

Fig. 1 Taf. II ein Bild gewährt, entspricht durchaus den Vermuthungen, zu welchen die Erfahrung direct führt, indem sie zeigt, dafs man die dunmpfen Vocale auf sehr hohe, die grellen auf sehr tiefe Töne schwerer singen kann, als in den Mittellagen oder gar in den jedesmal günstigsten Lagen (den charakteristischen Tonhöhen), und es widerspricht andererseits der feststehenden Thatsache, dafs man trotzdem jeden Vocal durch das ganze Stimmregister hindurch singen *kann*, deshalb nicht, weil die oben angedeuteten Gränzpunkte für alle Vocale schon jenseits des gewöhnlichen Gebietes der menschlichen Stimme liegen und sich mehr oder weniger den Punkten nähern, welche die obere oder untere Gränze für die Empfindung des Schalles überhaupt angeben.

Jene Gränzpunkte ergeben sich nun aus der Gleichung:

$$o = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x\,(\alpha x + \beta)}, \text{ oder } o = \alpha x + \beta$$

d. h. sie sind bestimmt durch das Verhältnifs

(c) $$x = -\frac{\beta}{\alpha};$$

dadurch erhalten die Constanten α und β nun auch eine akustische Bedeutung. Daraus, dafs die Gleichung, aus der sich der dem Werthe $y = o$ entsprechende x-Werth ergiebt, linear ist, folgt weiter, dafs jeder Vocal nur *einen* solchen Gränzpunkt haben kann; auf der anderen Seite geht sein Gebiet bis an die Gränze des Stimmregisters. Bei der Fähigkeit des Mundes, einen stetigen Uebergang zwischen den Klängen der einzelnen Vocale herzustellen, ist mit Rücksicht auf den Gang der Werthe von α in Tabelle V zu vermuthen, dafs es einen oder einige Vocalklänge giebt, für welche $\alpha = o$ ist; einer derselben ist ein nicht ganz so scharf gesprochenes *O*, als dasjenige, welches obiger Tabelle zu Grunde liegt; er zeichnet sich dadurch aus, dafs er weder eine obere noch eine untere Gränze hat; oder, anders ausgedrückt, seine beiden Gränzpunkte sind zugleich die Gränzpunkte des Stimmregisters überhaupt. Gleichzeitig erhält für diesen Vocal die Intensitäts-

curve eine symmetrische Gestalt; dieser Vocal läſst sich somit auf zwei Töne, welche gleich weit von seiner charakteristischen Tonhöhe (etwa $N = 530$) abstehen, gleich gut singen.

Bevor ich in der Bildung der Gleichung (3), welche die Bewegung eines Lufttheilchens angiebt, wenn ein Vocal gesungen wird, fortfahre, wende ich mich, im Anschluſs an die Diskussion der Intensitätscurven, zu dem Einwande, welchen Herr v. Qvanten gegen das Princip der charakteristischen Tonhöhe in der Vocaltheorie erhoben hat. Indem ich dabei in Bezug auf den Inhalt desselben auf die Abhandlung verweise, beginne ich damit, zwei scheinbar nur in Worten liegende, aber doch äuſserst wichtige Eigenthümlichkeiten derselben hervorzuheben. Statt der charakteristischen Tonhöhe des Originals wird hier von einem charakteristischen Ton gesprochen, und die ausgezeichnete Stellung, welche der Grundton bei Helmholtz unter den Partialtönen einnimmt, hat sich hier zu einem Gegensatze zwischen Grundton und Obertönen entwickelt. Die Abweichung wäre eine glücklichere geworden, wenn sie in entgegengesetztem Sinne erfolgt wäre. Hätte Herr v. Qvanten die hier festgehaltenen Begriffe einer „Gegend der charakteristischen Tonhöhe“ und der „Partialtöne“ seiner Kritik zu Grunde gelegt, so wäre ihm die Versöhnung der streitenden Ansichten wahrscheinlich gelungen, selbst wenn er bei dem Begriffe der „scheinbaren charakteristischen Tonhöhe“ stehen geblieben wäre. Er hätte dann, auf Grund der allein richtigen Anschauungsweise, daſs die charakteristische Tonhöhe zwar ein ganz scharf markirter, aber nicht ein isolirter Punkt, sondern das Maximum einer gewissen Curve ist, gefunden, daſs derjenige Partialton, der gerade in der Gegend der charakteristischen Tonhöhe liegt, bei Aenderung der Tonhöhe noch so lange stark bleibt, bis der nächste Partialton in diese Gegend hineingerückt ist. Ebenso sind dann die, einerseits die Tonhöhe, andererseits den Klang bestimmenden, einander gegenüberstehenden Elemente nicht mehr Grundton und Obertöne, sondern Grundton und Partial-

töne mit Einschlufs des Grundtones. Die Gränztöne, welche dann Herr v. Qvanten für die einzelnen Vocale aufführt, um Widersprüche mit der Theorie, aus der sie berechnet sind, zu zeigen, rücken dann alle eine Octave hinauf; die Widersprüche fallen weg, und die Töne, auf die nach Helmholtz der Vocal *A* sich am besten singen läfst, nämlich a_2 bis d_3 liegen, in auffallender Uebereinstimmung mit der Theorie, gerade in der Gegend der dem *A* charakteristischen Tonhöhe. Noch mehr klärt sich Alles das, was sich auf den Begriff des guten Ansprechens bezieht, auf, wenn man sich auf den Standpunkt der reducirten charakteristischen Tonhöhe stellt, und ich habe, von ihr ausgehend, die Curven abgeleitet, welche dieses Problem in einer sehr einfachen Weise lösen. Auf die Einzelheiten der Einwürfe gehe ich hier nicht ein, da dieselben von unserem Standpunkte aus sich theils ohne weiteres erledigen lassen, theils dem hier behandelten Thema ferner liegen. Nur in Bezug auf die Theorie vom „Timbre" möchte ich Einiges hinzufügen. Ich halte auch hier ein anderes Verhältnifs der Begriffe für richtiger, als dasjenige, welches Klang und Timbre einander entgegensetzt. Es ist nämlich einleuchtend, dafs die Vocalklänge nicht eine einzige Reihe bilden; vielmehr ist von jedem Punkte aus eine Aenderung, d. h. ein Fortschreiten in sehr vielen Richtungen möglich; einige derselben werden dem Uebergange zu neuen Vocalnüancen entsprechen, aber es wird auch eine geben, bei welcher der Vocal erhalten bleibt. Dieses Verhalten ergiebt sich als eine nothwendige Folge der entwickelten Functional-Abhängigkeiten. Bezeichnet nämlich n das Volumen, p symbolisch die Form der Mundhöhle und V, ebenfalls symbolisch, einen Vocalklang, so ist, wie wir gesehen haben:

$$V = f\,(p, n)$$

und mithin:

$$dV = \frac{df}{dp}\,dp + \frac{df}{dn}\,dn.$$ [1])

1) Physikalisch ausgedrückt, bedeutet hier p die Art der Repartition; dieselbe ist aber ein stetig variirender Begriff, und daher die Differentiation einer Funktion desselben gestattet.

Die Bedingung für die Wahrung des Vocals ist daher:

$$\frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dn}dn = o,$$

und eine Lösung

$$dp = o, \; dn = o.$$

Dieser Fall, in welchem Form und Gröfse der Mundhöhle beibehalten wird, ist selbstverständlich und ohne Interesse. Aber die obige Gleichung hat aufserdem noch eine andere Lösung

$$\frac{df}{dp}dp = -\frac{df}{dn}dn,$$

oder:

$$\frac{df}{dp} : \frac{df}{dn} = dn : -dp,$$

und diese entspricht der Veränderung des Timbre unter Wahrung des Vocalklanges. Das Timbre steht somit zu dem Klange nicht im Verhältnifs des Gegensatzes, sondern in dem der Unterordnung.

Die bisherigen Betrachtungen haben dazu gedient, den ersten Factor der Gleichung (3) zu bestimmen; sie haben gleichzeitig gezeigt, dafs derselbe einen doppelten Einflufs der charakteristischen Tonhöhe bedingt; indem diese nämlich von Ton zu Ton die Art der Repartition ändert, hat sie einen Antheil an der Definition des specifischen Vocalklanges, und sie ändert ferner bei wechselnder Tonhöhe auch die Gesammtintensität des Klanges.

Nennt man einen Factor, der die Intensität des Gesammtklanges in einer willkürlichen Einheit ausdrückt, C und nimmt in denselben auch den bei der Rechnung auftretenden Faktor $\sqrt{\lg 2}$, so erhält man schliefslich:

$$\varphi(\mathfrak{a}n) = C\sqrt{\frac{\alpha \lg\left(\frac{\mathfrak{a}n}{N}\right) + \beta \lg 2}{\left[\lg\left(\frac{\mathfrak{a}n}{N}\right)\right]^2 + \varkappa\left[\alpha \lg\left(\frac{\mathfrak{a}n}{N}\right)\lg 2 + \beta(\lg 2)^2\right]}}$$

Etwas einfacher wird die Formel, wenn man $x = \lg\left(\frac{n}{N}\right)$

setzt; man geht dann aber des Vortheils, die Octave zur Einheit des Intervalls zu haben, verlustig. — Die Bestimmung des zweiten Factors von ξ in (3) hat keine Schwierigkeiten, wenn man die früher gemachte, auf die Phasen[1]) sich beziehende, Annahme beibehält. Die Fourier'sche Reihe schreitet dann nach den Sinus der Vielfachen von $2\pi nt$ fort, und die Coëfficienten ψ (a) sind geradezu die Quadratwurzeln aus den Zahlen der Tabelle III. Eine Darstellung derselben durch Curven ist hier bei der Unstetigkeit des Begriffes der Ordnungszahl nicht möglich. An ihre Stelle muſs hier eine graphische Darstellung durch gebrochene gerade Linien treten, welche in Fig. 2 Taf. II gegeben ist. Sie zeigt, daſs diese Linien nicht so steil, aber viel breiter sind, als die Tonhöhe-Curven. Ihr Einfluſs erreicht daher nie den Maximaleinfluſs der Tonhöhe, aber er ist in viel weiteren Gränzen ein erheblicher. —

Die Gleichung (3), welche die Bewegung eines Lufttheilchens darstellt, ist somit gebildet.

§ 76. *Resultate aus den Controlversuchen.*

Was die Resultate der Controlversuche betrifft, welche ich nach den beiden im § 2 beschriebenen Methoden angestellt habe, so werde ich mich hier möglichst kurz fassen, und gehe zunächst auf die Versuche mit dem König'schen Flammenapparate ein. Mit Hülfe des oben beschriebenen verschiebbaren Resonators läſst sich hier das ganze Beobachtungsmaterial leicht sammeln. Dasselbe besteht in einer Tafel aller der Flammenbilder, welche irgend einem der wesentlichen Vocalklänge und irgend einem Tone des Stimmgebietes, über das der Beobachter gebietet, in irgend welcher Combination entsprechen, und welche man bei der erheblichen Dauer des Lichteindruckes mit ziemlicher Genauigkeit den Spiegelbildern entnehmen kann. Auf die Folgen der störenden Einflüsse, insbesondere der Membran

1) Da die Phase nach den Untersuchungen von Helmholtz (Poggendorff's Ann. 108) ohne Einfluſs auf den „Klang" ist, ist diese Einschränkung eine unwesentliche.

komme ich hier nicht noch einmal zurück; dagegen stellt sich dann die zweite Schwierigkeit ein, die gezeichneten Flammenbilder richtig zu deuten. Man hat nämlich zu bedenken, daſs jeder einzelne Curventheil, jede Zacke, wie der Kürze halber gesagt werden soll, nicht *einem* bestimmten Partialtone entspricht, sondern einer Summe von solchen; man ist ferner vor der Hand zu der Annahme gezwungen, daſs die Phase aller Theiltöne dieselbe sey. Einen Anhaltspunkt kann man sich unter andern dadurch verschaffen, daſs man ein Flammenbild mit einem anderen (in der angedeuteten Tafel nicht enthaltenen) vergleicht, welches aus dem ersteren entsteht, wenn man Vocal und Singhöhe beibehält, aber den cylindrischen Resonator so weit zusammenschiebt, bis sein tiefster Ton nicht mehr dem gesungenen Tone, sondern dessen höherer Octave entspricht; aus den Aenderungen, welche in Folge dessen das Bild erleidet, lassen sich dann gewisse Schlüsse ziehen. Immerhin wäre der Weg bis zur Herstellung der Partialtöne complicirt und unsicher; nur im Allgemeinen lassen sich einige Resultate mit Sicherheit gewinnen. Dieselben stimmen vollkommen mit den Resultaten der subjectiven Methode. Zunächst zeigt sich, daſs für denselben Vocal das Flammenbild Aenderungen der Gestalt und Intensität erfährt, wenn man gleichzeitig Stimmhöhe und Resonator das ganze Register durchlaufen läſst. Die Aenderung der Intensität entspricht den Curven der Fig. 1, und gerade wie diese steil sind, und daher ihre Ordinaten nur für ein schmales Stück beträchtliche Werthe haben, so sieht man auch hier, daſs das Flammenbild für einen bestimmten Ton äuſserst scharf und charakteristisch ist und, wenn man etwa beim Singen von Quinte zu Quinte fortschreitet, fast plötzlich auftritt. Die absolute Tonhöhe hat daher in der That nur in dem Bereiche von 1 bis 2 Octaven einen erheblichen Einfluſs. Die Aenderungen der Gestalt andrerseits entsprechen der zweiten oben hervorgehobenen Wirkung der absoluten Tonhöhe, die Art der Repartition zu ändern. Von speciellen Ergebnissen führe ich nur noch

an, dafs kleine Aenderungen in der Klangnüance das Bild wesentlich ändern, dafs das Detail des Bildes, welches einer ganzen, zusammengesetzten Schwingung entspricht, beim *U* einfacher ist als beim *A*, und dafs es, wenn man jeden Vocal auf seine charakteristische Tonhöhe singt, (unter gleichzeitiger Verschiebung des Resonators), stetig mit allmählicher Vermehrung der Zacken aus dem ersteren in den letzteren Zustand übergeht. Das stimmt mit den Zahlen der Tabelle III sehr gut, und dafs beim *J* die Anzahl der Zacken auch nicht annähernd der Menge der dort zusammengestellten Partialtöne gleichkommt, erklärt sich theils daraus, dafs bei der in den Flammenbildern vollzogenen Summation die Conturen der späten, schnellschwingenden Partialtöne, besonders da sie schwach sind, in den Conturen der ersten und stärksten aufgehen, theils daraus, dafs aus demselben Grunde die ihnen entsprechenden Schwingungen durch die Membran und den Bewegungszustand des Gases vernichtet werden. Die oben erwähnte Tafel füge ich nicht bei, da sie an sich wenig Anhaltspunkte gewährt und überdiefs leicht nach dem König'schen Original herzustellen ist. Dagegen will ich noch ein Verfahren bezeichnen, das zwar etwas mühsam ist, aber in einigen Fällen eine erstaunliche Harmonie zwischen beiden Methoden erkennen läfst. Man setze in diejenige Gleichung, zu deren Herstellung der vorige Paragraph gedient hat, für die Constanten $\alpha \beta \varkappa$ N und die Coefficienten der Fourier'schen Reihe die einem bestimmten Vocale entsprechenden Werthe, wähle dann ein beliebiges, einem Tone entsprechendes n und berechne danach die Antheilziffern, welche den Partialtönen in dieser Tonhöhe zukommen. Jede dieser Ziffern lege man dann einer der zu zeichnenden Wellenlinien als Amplitude zu Grunde, deren Wellenlängen sich umgekehrt wie die Ordnungszahlen der betreffenden Partialtöne verhalten. Durch Addition erhält man dann in vielen Fällen eine Curve, welche eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung mit dem entsprechenden, aus der oben besprochenen Tafel zu ent-

nehmenden Flammenbilde zeigt. Abzusehen ist dabei natürlich von der überhängenden Form des letzteren und von der durch die Gestalt der Flamme bei ihm bewirkten Zuspitzung der Maxima und Minima. Einige solcher Curven lasse ich auf Tafel II folgen und bemerke nur noch, dafs aus den schon mehrfach hervorgehobenen Gründen es nicht zu verwundern ist, wenn die Uebereinstimmung in andern Fällen gar nicht oder nicht in dem Mafse stattfindet, wie in den hier gewählten Beispielen.

Noch kürzer kann ich mich in Bezug auf die Versuche mit den Seifenblasenmembranen fassen, da dieselben im Allgemeinen dieselben Bestätigungen liefern und für die Specialitäten noch weniger, wenn auch vielleicht etwas zuverlässigeres Material an die Hand geben. Die steile Form der vielfach besprochenen Tonhöhe-Curven macht sich hier dadurch kenntlich, dafs bei Veränderung der Tonhöhe in nicht zu kleinen Intervallen fast plötzlich ein starkes Erzittern der Membran eintritt; andrerseits erhält es sich, wenn man etwa von Ton zu Ton fortschreitet, immerhin durch einige Stufen, und bestätigt dadurch die wenn auch geringe Breite desjenigen Theiles jener Curve, wo die Ordinaten beträchtliche Werthe haben, d. h. der beiden Strecken vom Maximum zu den beiderseitigen Inflexionspunkten. Für die charakteristischen Tonhöhen selbst erhält man bei Benutzung der cylindrischen Resonatoren Werthe, die mit den Helmholtz'schen Angaben gut übereinstimmen; und bei Benutzung der Kugelresonatoren, wenn man den Ton so wählt, dafs höhere Obertöne verstärkt werden und immer dieselbe Ordnungszahl gewahrt bleibt, ergaben sich in den wenigen Versuchen, die ich hierüber anstellte, auch die Werthe für die reducirten charakteristischen Tonhöhen. Schliefslich war, in der jedesmaligen charakteristischen Tonhöhe, das Erzittern bei den Vocalen *U*, *A*, *O* bei weitem am heftigsten. Alle diese Resultate stimmen, wie man sieht, mit der auf Grund der Resultate der subjectiven Methode entwickelten Theorie völlig überein.

Schlufs.

Zum Schlusse stelle ich einige der wichtigsten Resultate der Untersuchung in kurzer Form zusammen:

1. Alle Klänge, insbesondere die Vocale der menschlichen Stimme und Sprache, sind zu definiren als die Folge des Zusammenwirkens zweier Momente, eines relativen und eines absoluten.

2. Das relative Moment ist die Art der Vertheilung der Gesammtintensität auf die einzelnen Partialtöne, wie sie durch ihre Ordnungszahl bestimmt sind. Das absolute ist die Abhängigkeit der Gesammtinsensität von der absoluten Tonhöhe der Partialtöne und die damit verbundene Modification der Vertheilung bei Aenderung des Grundtones.

3. Die Verschiedenheit der Vocale in der ersten Hinsicht ist eine Folge der Fähigkeit der Mundhöhle, ihre Form zu ändern. Die Unterschiede der den verschiedenen Vocalen charakteristischen absoluten Tonhöhen und des Einflusses derselben sind eine Folge der Fähigkeit der Mundhöhle, ihr Volumen und die Gröſse ihrer Oeffnung zu ändern.

4. Der erste Partialton ist stets der stärkste im Klange; er verdient daher den Namen „Grundton“.

5. Die Intensität der Partialtöne als solcher nimmt im Allgemeinen ab, wenn ihre Ordnungszahl zunimmt; Ausnahmen deuten auf die Nähe der Gränze des Consonantengebietes.

6. Die Intensität der Partialtöne nimmt desto langsamer ab, je heller, desto schneller, je dumpfer der Vocalklang ist.

7. Die charakteristische Tonhöhe liegt desto höher, je heller, desto tiefer, je dumpfer der Vocalklang ist.

8. Die Schwankungen der Intensität in Folge des Einflusses der charakteristischen Tonhöhe sind desto gröſser, je voller der Vocal ist. Sehr geringe Schwankungen deuten die Nähe der Gränze des Consonantengebietes an.

9. Sämmtliche Vocale lassen sich in dem gesammten Umfange der menschlichen Stimme singen; aber die dumpfen sprechen in sehr hohen, die hellen in sehr tiefen Lagen schlecht an.

10. Es gehört nur einige Aufmerksamkeit dazu, um in einem Vocalklange die verhältnifsmäfsig oft sehr starken Obertöne auch ohne künstliche Hilfsmittel einzeln wahrzunehmen. Sie klingen dann den reinen Stimmgabeltönen sehr ähnlich.

Es wird nicht schwer halten, von dem hier entwickelten Standpunkte noch manches andere unaufgeklärte Problem zu behandeln, wie die Theorie des Sprechens in verschiedenen Gemüthszuständen, die Theorie der Fistelstimme u. s. w.

Berlin, den 5. Juni 1876.

II. *Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes; von E. Lommel.*

(Schlufs von S. 139.)

V.

Die Erscheinungen, welche ein vor einen Spiegel gebrachtes Gitter hervorbringt, sind hiemit noch nicht erschöpft. Hält man nämlich ein Gitter vor einen Spiegel, und blickt durch dasselbe nach dem Spiegelbilde des bewölkten Himmels, so dafs das Auge auf grofse Entfernung accommodirt ist und daher die Gitterstriche selbst nicht sieht, so erscheint das Gesichtsfeld erfüllt von helleren und dunkleren Streifen, welche in regelmäfsiger Abwechselung mit zwei Farben gefärbt sind, indem die helleren Streifen die eine, die dunkleren Streifen die andere Farbe zeigen. Die Streifen sind, wenn das Gitter mit dem Spiegel parallel ist, zu den Gitterstrichen parallel; sie rücken enger zusammen und ändern ihre Färbung, wenn man die Ent-

fernung des Gitters von dem Spiegel vergröfsert. Durch ein Drahtgitter z. B., welches 6 Drähte auf 1^{mm} enthält, sieht man, wenn es 3^{mm} vom Spiegel absteht, dunkelgelbbraune Streifen mit schwarzer Mitte, getrennt von einander durch sehr helle bläulichweifse Streifen; in 7^{mm} Entfernung sind die dunkleren Streifen bräunlichgelb und beiderseits von schmalen schwarzen Rändern eingefafst, während die hellen Streifen ein ins Violette spielende Weifs zeigen; bei 12^{mm} Abstand wechseln blaugrüne Streifen mit röthlichweifsen ab; bei noch gröfseren Entfernungen werden die Farben immer unbestimmter und man sieht nur noch eine feine hellere und dunklere Streifung. Bei dem obigen Glasgitter erscheinen die Streifen grünlich und röthlich, in verschiedenen Nüancen je nach den verschiedenen Abständen; sie werden begreiflicher Weise auch gesehen, wenn man das Gitter allein, mit der geritzten Fläche nach vorn gewendet, im reflectirten Lichte betrachtet, so dafs die hintere ungeritzte Fläche die Stelle des Spiegels vertritt.

Auch diese Erscheinung läfst sich leicht mit dem Spectrometer beobachten und messend verfolgen. Nachdem Spiegel und Gitter in der früher beschriebenen Weise aufgestellt sind, entfernt man den Collimator und lenkt mittelst der planparallelen Glasplatte das vom Heliostaten reflectirte Licht des klaren oder bewölkten Himmels durch das Gitter auf den Spiegel. Man kann auch das Licht einer seitlich aufgestellten breiten Lampenflamme oder eines mit Sonnenlicht beleuchteten Papierblattes oder mattgeschliffenen Glases auf die reflectirende Glasplatte fallen lassen. In allen diesen Fällen sieht man das Gesichtsfeld von verticalen abwechselnd verschieden gefärbten Streifen durchzogen.

So verschieden diese Erscheinung von der im vorigen Abschnitt beschriebenen zu seyn scheint, so steht sie mit ihr doch im innigsten Zusammenhange. Wir haben es nämlich hier mit Strahlen zu thun, welche innerhalb gewisser Gränzen alle möglichen Einfallswinkel besitzen, so

dafs, bei der ersten Versuchsanordnung, jedem Punkte der unendlich fernen leuchtenden Fläche ein bestimmter Winkel φ entspricht. Die Strahlen der Richtung φ, als von demselben Punkte ausgehend und daher unter sich cohärent, werden mit einander interferiren, und würden, wenn allein vorhanden, die Erscheinung der gestreiften Beugungsspectren hervorbringen. Jeder Punkt der leuchtenden Fläche wirkt in ähnlicher Weise, und da die von verschiedenen Punkten kommenden Strahlen unter sich nicht cohärent sind, so werden sich im Gesichtsfeld die den unzähligen verschiedenen Winkeln φ entsprechenden Beugungserscheinungen mit einander mischen.

Um das Resultat dieser Mischung für einen Winkelabstand ψ von der Mitte des Gesichtsfelds (d. h. also für eine in diesem Abstand befindliche verticale Linie) zu erfahren, ziehen wir über den Grundrifs (Fig. 6, 7, 8) unserer Intensitätsfläche, auf welchen wir uns auch in der oben angegebenen Weise jederseits die Spectra aufgetragen denken, die unter 135° zur ξ-Axe geneigte Gerade

$$\eta + \xi = 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \psi'.$$

Während wir früher nur *einen* Punkt dieser Geraden, nämlich denjenigen, welcher dem einzigen Einfallswinkel φ entsprach, zu berücksichtigen hatten, haben wir nun sämmtliche auf jener Geraden vorhandenen Intensitäten zu summiren, innerhalb jener Gränzen von φ, welche bei dem Versuche vorkommen. Betrachten wir die Gerade vorerst nur so weit, als sie sich über das erste Spectrum jederseits erstreckt, so werden sich zu dem weifsen Licht, welches auf der η-Axe aufgetragen ist, noch die verschiedenen Spectralfarben mischen, jede mit derjenigen Intensität, welche sie vermöge der Beschaffenheit der Fläche M^2 längs der Linie $\eta + \xi$ besitzt. Daraus wird eine Mischfarbe hervorgehen, mit welcher die dem Winkelabstand ψ entsprechende Verticale des Gesichtsfeldes gefärbt erscheint.

Um die Färbungen aller Verticalen des Gesichtsfeldes kennen zu lernen, brauchen wir nur die Gerade

$$\eta + \xi = 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \psi'$$

parallel mit sich selbst über die $\xi\eta$-Ebene hingleiten zu lassen, und für jede ihrer Lagen die angedeutete Summation vorzunehmen. Wir sehen sofort, daſs dieselbe Färbung wiederkehrt, sobald sich $2d \operatorname{tg}\psi'$ um e ändert; und ohne jene Summation auszuführen, erkennen wir, daſs die Färbung innerhalb jedes zwischen

$$\eta + \xi = m\pi - \varkappa\pi \text{ und } \eta + \xi = m\pi + \varkappa\pi$$

enthaltenen Streifens, in welchem die Rosettenmittelpunkte liegen, eine andere seyn muſs, als innerhalb jedes von den Linien

$$\eta + \xi = m\pi + \varkappa\pi \text{ und } \eta + \xi = (m+1)\pi - \varkappa\pi$$

begränzten Streifens, in welchen keine Rosettenmittelpunkte fallen.

Der Beitrag, den das zweite, dritte und die folgenden Spectren zu der Erscheinung liefern, wird, weil ihre Lichtstärke geringer ist als die des ersten, in demselben Maſse ein geringerer seyn. Aber auch abgesehen hiervon werden sie an der Farbenmischung, wie sie durch das erste Spectrum bedingt ist, nichts wesentliches ändern; denn erstlich enthalten dieselben Streifen, in welchen die Rosettenmittelpunkte und Minima des ersten Spectrums liegen, auch diejenigen aller folgenden; und zweitens wissen wir, daſs an denselben Stellen, d. h. bei den nämlichen Wellenlängen, wo im ersten Spectrum Rosettenmittelpunkte auftraten, auch in den folgenden solche vorhanden sind; eine homogene Farbe also, welche vermöge der Wirkung des ersten Spectrums aus der Mischung wegfällt, wird durch die folgenden Spectra nicht oder nur ungenügend ersetzt.

Von hervorragendem Einfluſs auf die Streifenbildung und gleichsam die Grundlage derselben ist natürlich das (in unserer Projection längs der η-Axe aufgetragene) ungebeugte weiſse Licht, welchem sich die besprochenen

Farbentöne beimischen. Würde das Gitter keine Beugung ausüben, so wäre das Gesichtsfeld erfüllt mit ungefärbten abwechselnd helleren und dunkleren Streifen, deren Mitten sich resp. bei $2d \operatorname{tg} \psi' = me$ und bei $2d \operatorname{tg} \psi' = \frac{2m+1}{2} e$ befinden; wir hätten dann räumlich neben einander gelegt alle jene Intensitätswandlungen, welche wir im vorigen Abschnitt an dem linearen Spaltbild zeitlich nach einander eintreten sahen (vergl. S. 129). Dafs ein nicht beugendes Gitter Streifen dieser Art hervorbringen mufs, erkennt man ohne alle Rechnung durch die einfachste Ueberlegung.

An diesen farbigen Streifen, deren Ursprung und Zusammensetzung nun hinlänglich aufgeklärt ist, beobachtet man noch folgende Eigenthümlichkeiten. Wenn man die reflectirende Glasplatte um ihre verticale Axe dreht, während das Spectrometertischchen feststehen bleibt, so bleiben die Streifen unverändert stehen: denn da in dem einfallenden Licht innerhalb gewisser Gränzen alle möglichen Strahlenrichtungen vertreten sind, so wird dasselbe während dieser Drehung dem Gitter gegenüber seine Rolle nicht verändern. Dreht man aber das Tischchen um seine Axe, so wandern die Streifen durch das Gesichtsfeld, und zwar der Theorie gemäfs mit derselben Geschwindigkeit, wie die wandernden dunkeln Streifen, welche wir im vorigen Abschnitt kennen gelernt haben.

Der Winkelabstand der Streifen konnte mit dem Spectrometer sehr leicht gemessen werden; es fand sich z. B. dafs, als die Abstände des Gitters von dem Spiegel nach einander $2^{mm},0$; $2^{mm},6$; $8^{mm},1$ betrugen, im ersten Falle 8 Doppelstreifen (d. i. immer ein hellerer mit dem angränzenden dunkleren Streifen zusammen) $3°$ umfafsten; im zweiten Falle gingen 10 Doppelstreifen auf $2° 53' 20''$, im dritten 20 Doppelstreifen auf $1° 40' 20''$. Daraus ergeben sich für die Breite eines Doppelstreifens folgende Werthe: $22' 30''$, $17' 20''$, $5' 28''$; berechnet man daraus mittelst der Gleichung $2d \operatorname{tg} \psi = e$ die Entfernung d, so findet man die

Werthe $1^{mm},969$; $2^{mm},556$; $8^{mm},102$, welche mit den gemessenen Werthen hinlänglich übereinstimmen. —

Nachdem wir mit dem Wesen dieser farbigen Streifen vertraut geworden sind, wenden wir uns zu der Erscheinung des vorigen Abschnitts zurück, und untersuchen, was eintritt, wenn der daselbst unendlich schmal gedachte Spalt breiter gemacht wird. Ist φ_1 die halbe angulare Breite des Spaltbildes, und liegt seine Mitte in der Mitte des Gesichtsfeldes, so liegen die vorkommenden Einfallswinkel φ zwischen $-\varphi_1$ und $+\varphi_1$; ziehen wir daher die beiden Geraden

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{und} \quad \eta - \xi = -2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \varphi_1,$$

so haben wir die Linien $\eta + \xi$ nur so weit zu berücksichtigen, als sie zwischen diesen beiden Geraden liegen. Summiren wir die auf jedem dieser Stücke vorkommenden Intensitäten, so erhalten wir die Lichtstärke und Farbenmischung, welche in jedem Winkelabstand φ von der Bildmitte herrscht. Diejenigen Linien $\eta + \xi$, welche dem Spaltbilde selbst angehören, werden zwischen den beiden Linien

$$\eta + \xi = 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{und} \quad \eta + \xi = -2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \varphi_1$$

enthalten seyn. Dem Spaltbilde entspricht also in unserer Projection ein von diesem und dem obigen Linienpaar eingeschlossenes Quadrat. Sobald dieses Quadrat in das erste Spectrum hineingreift, d. h. sobald

$$2\pi \frac{d}{e} \operatorname{tg} \varphi_1 > \pi \frac{d}{e^2} \lambda_1$$

oder

$$e \operatorname{tg} \varphi_1 > \tfrac{1}{2} \lambda_1$$

wird, beginnen farbige Streifen der obigen Art innerhalb des Spaltbildes aufzutreten, welche um so zahlreicher und den oben besprochenen um so ähnlicher werden, je weiter der Spalt geöffnet wird. Zugleich werden die Spectra nicht nur unrein, sondern die vorher dunkeln Streifen zeigen sich farbig auf andersfarbigem Grunde. Aendert

man die Neigung der einfallenden Strahlen, durch Drehen des Spectrometertischchens, so wandern die bunten Streifen sowohl über die undeutlichen Spectra als über das Bild des Spaltes hinweg.

Wir haben bisher die Entfernung der Lichtquelle als unendlich grofs angenommen, weil dieser Fall einerseits durch das Spectrometer leicht realisirt und messend verfolgt werden kann, und andererseits seine analytische Behandlung eine verhältnifsmäfsig leichte ist. Man begreift aber, dafs auch bei geringerer Entfernung der Lichtquelle dem Wesen nach ganz ähnliche Erscheinungen eintreten müssen wie in dem bisher betrachteten Gränzfalle. Lenkt man z. B. nach Wegnahme des Collimators und des Fernrohrs das Licht einer seitlich aufgestellten Kerzenflamme mittelst der reflectirenden Glasplatte durch das Gitter auf den Spiegel, so sieht man durch die Glasplatte blickend das Bild der Kerzenflamme beiderseits begleitet von undeutlichen spectral gefärbten Flammenbildern, sämmtliche Bilder durchzogen von verticalen farbigen Streifen, welche bei einer Drehung des Tischchens über die ganze Erscheinung wegwandern. Selbstverständlich ist zu diesem Versuche das Spectrometer gar nicht nothwendig. Man sieht diese Erscheinung sogar schon, wenn man den Spiegel mit dem Gitter davor, oder auch das Gitter allein, mit der geritzten Fläche dem Beobachter zugewendet, einfach in der Hand hält und nun das an dem Spiegel oder an der hinteren Fläche des Gitters reflectirte Bild einer Kerzenflamme betrachtet; nur sind in diesem Falle wegen der beträchtlichen Schiefe der einfallenden Strahlen die spectral gefärbten Bilder zu beiden Seiten des Flammenbildes sehr unsymmetrisch. —

Auch die das ganze Gesichtsfeld gleichmäfsig erfüllende bunte Streifung zeigt sich, wie oben bereits erwähnt wurde, nicht blofs, wenn man das Licht des Himmels, sondern auch, wenn man das Licht einer nahegerückten breiten Lampenflamme oder das diffuse Licht eines beleuchteten Papierblatts auf die inmitten des Spectrometertisch-

chens aufgestellte reflectirende Glasplatte fallen läfst. Wenn man mit engem Spalte die im vorigen Abschnitt beschriebenen dunklen Streifen der Beugungsspectren beobachtet, genügt sogar die geringe Menge des von der Collimatorlinse und der planparallelen Platte diffundirten Lichtes, um jene farbige Streifung wie einen leichten Schleier über die ganze Erscheinung auszubreiten, welcher sich nicht blofs über die Spectra, sondern auch über das Spaltbild selber legt. Das Spaltbild zeigt daher, wenn man das Spectrometertischchen dreht, nicht nur die oben S. 100 erwähnten Intensitätsänderungen, sondern auch, indem die vom diffusen Licht herrührenden farbigen Streifen über dasselbe wegwandern, eine zwischen zwei Nüancen, z. B. röthlich und grünlich, wechselnde leise Färbung. Dafs diese Färbung in der That von dem an der Collimatorlinse und Glasplatte diffundirten Lichte herrührt, wird durch folgende Versuche bestätigt. Die Färbung ist kaum wahrnehmbar, wenn Linse und Glasplatte möglichst sorgfältig gereinigt sind; sie tritt dagegen intensiver hervor, wenn die Collimatorlinse absichtlich getrübt wird; gleichzeitig wird die farbige Streifung in dem dunkeln Zwischenraum zwischen Spaltbild und erstem Spectrum deutlicher, und indem sich dieselbe auch über die Spectren selbst ausdehnt, werden die Farben derselben etwas geändert. Bedeckt man endlich die Collimatorlinse mit einer mattgeschliffenen Glasplatte, so verschwinden natürlich Spaltbild und Spectra ganz, um den farbigen Streifen Platz zu machen, und zwar erscheint jetzt am Fadenkreuz gerade jene Farbe, welche das Spaltbild vorher zeigte.

Um dieses durch diffuses Licht alterirte Aussehen der Spectra und des Spaltbildes in der Projection darzustellen, müfste man auf die $\xi\eta$-Ebene aufser den Spectren selbst noch ganz leise die farbigen Streifen parallel der Geraden $\eta + \xi = o$ gemalt denken; indem nun die Linie

$$\eta - \xi = 2\pi \frac{di}{e} \operatorname{tg} \varphi'$$

über die $\xi\eta$-Ebene weggleitet, giebt sie aufser den Be-

wegungen der dunklen Streifen auch noch die Farbenwechsel des Spaltbildes und die Farbenänderungen innerhalb der Spectra an. —

Beide Erscheinungen, sowohl die Spectra mit den dunkeln Streifen, als die bunte Streifung des gleichmäſsig erleuchteten Gesichtsfeldes, lassen sich sehr schön auch objectiv darstellen. Nachdem Gitter, Spiegel und reflectirende Glasplatte in der richtigen Stellung z. B. auf einem Holzklötzchen angebracht sind, läſst man im ersten Falle das durch einen Spalt gegangene Sonnenlicht auf die Glasplatte fallen; das vom Spiegel reflectirte und durch Gitter und Glasplatte durchgegangene Strahlenbündel trifft auf eine achromatische Linse, welche auf einem Schirme ein scharfes Bild des Spaltes entwirft, zu dessen beiden Seiten die gestreiften Spectra erscheinen. Im zweiten Falle läſst man die Sonnenstrahlen nicht durch einen Spalt gehen, sondern durch eine Linse von kurzer Brennweite, so daſs ein divergirender Strahlenkegel auf Gitter und Spiegel gelangt; auf dem Schirme bilden sich dann die farbigen Streifen ab. Dreht man das Holzklötzchen um eine verticale Axe, so beobachtet man in beiden Fällen die Wanderung der Streifen. —

Sehen wir uns nun zum Schlusse noch in der Literatur um nach Versuchen mit einem vor einem Spiegel aufgestellten Gitter, so finden wir, daſs schon der Herzog von Chaulnes[1]) ein Gitter von Silberdrähten, welche $\frac{3}{4}$ bis 1 Linie von einander entfernt waren, vor seinen metallenen Hohlspiegel brachte. Anstatt der Ringe, welche er bei den früheren Versuchen wahrgenommen hatte, sah er jetzt nur einen Streifen weiſsen Lichtes, durchschnitten von mehreren kurzen lebhaft gefärbten Streifen, welche in derselben Ordnung auf einander folgten wie die Ringe. Dies ist in der That die Erscheinung, wie sie nach unserer Theorie eintreten müſste, wenn die Gitterstäbe nicht alle gleichweit von einander entfernt sind. Biot[2]) wiederholte

1) Mem. de l'anc. Acad. des sc. 1755 p. 143.

2) Traité de Physique, T. IV p. 227. 1816.

diesen Versuch mit einem Gitter aus geschwärzten Metallstäbchen, dessen Dimensionen er nicht angiebt, mit dem nämlichen Erfolg. Die „gezackten" Interferenzstreifen, welche Brewster[1]) innerhalb der Gitterspectra wahrnahm, als er eine Glasplatte, deren untere Fläche geritzt war, über eine ebenfalls geritzte Stahlplatte brachte und das an der Stahlplatte reflectirte zweimal durch das Gitter gegangene Licht ins Auge gelangen liefs, gehören ebenfalls hierher. Ferner hat Herr Crova[2]), indem er ein durch einen schmalen Spalt gegangenes Lichtbündel durch zwei *gleiche* und *parallele* Glasgitter sandte, innerhalb der Spectra dunkle Streifen erhalten, welche mit den oben beschriebenen ohne Zweifel identisch sind; bei unseren Versuchen spielt nämlich das Spiegelbild offenbar die Rolle eines zweiten gleichen und parallelen Gitters. Die Theorie, welche Herr Crova von der Erscheinung giebt, ist jedoch sehr unvollständig. Endlich hat Herr Feussner[3]) mit einem Spiegel, dessen Vorderfläche nach einer Richtung in der Art der Glasgitter geritzt war, allem Anscheine nach diejenige Erscheinung beobachtet, welche oben S. 231 für den Fall, dafs man den Spiegel mit dem davor befindlichen Gitter in der Hand hält, beschrieben wurde.

VI.

Indem wir jetzt zu den durch getrübte Spiegel erzeugten farbigen Ringen und Streifen (Newton's „Farben dicker Platten" und Whewell's oder Quetelet's Streifen) wieder zurückkehren, sey es gestattet, die bereits im II. Abschnitt angegebene und im Folgenden durchaus zur An-

1) D. Brewster, On the bands formed by the superposition of paragenic spectra produced by the grooved surfaces of glass and steels. Edinb. Trans. XXIV p. 221—232. Phil. Mag. (4) XXXI p. 22—26, 98—104. 1864.

2) Crova, Sur les phénomènes d'interférences produits par les réseaux parallèles. Compt. rendus T. LXXII p. 855. 1871. T. LXXIV p. 932. 1872.

3) Poggend. Ann. Bd. CXLIX S. 564. 1873.

wendung kommende Beobachtungsmethode kurz zu recapituliren. Auf dem Tischchen inmitten des Theilkreises eines Spectrometers wird dem Beobachtungsfernrohr gegenüber ein kleiner ebener Spiegel senkrecht zur Axe des Fernrohrs aufgestellt; während diese Axe mit derjenigen des Collimators einen rechten oder stumpfen Winkel einschliefst, wird das aus letzterem austretende parallele Strahlenbündel von einer in der Mitte des Tischchens aufgepflanzten durchsichtigen planparallelen Glasplatte senkrecht auf den kleinen Spiegel reflectirt, um von diesem zurückgeworfen durch die Glasplatte in das Fernrohr zu gelangen. Durch eine Linse von kurzer Brennweite wird das vom Heliostaten kommende Licht in der Mitte des weit geöffneten Collimatorspaltes concentrirt. Ist die nach vorn gewendete Glasfläche des silberbelegten Spiegels auf irgend eine Weise getrübt oder bestäubt, oder befindet sich vor einem Metallspiegel eine getrübte durchsichtige Glasplatte, so sieht man, in das Fernrohr blickend, den leuchtenden Punkt von prächtig gefärbten Ringen umgeben; und indem man das Tischchen des Spectrometers sammt allen Stücken, welche es trägt, ein wenig um die Axe des Instrumentes dreht, so dafs die Lichtstrahlen allmählig immer schiefer auf den kleinen Spiegel treffen, so sieht man den Mittelpunkt des Ringsystems sich immer weiter von dem am Fadenkreuz bleibenden Lichtpunkte entfernen, und dieser erscheint jetzt inmitten eines Bündels „Whewell'scher Streifen“.

Indem diese Anordnung die sonst gewöhnlich objectiv angestellten Versuche subjectiv zu wiederholen und auf's Mannigfaltigste abzuändern erlaubt, gestattet sie zugleich eine leichte und genaue Messung der Durchmesser der Ringe und der Breite der Streifen. Die angestellten Messungen (s. oben Abschnitt II) befanden sich stets in vollkommener Uebereinstimmung mit der zuerst von Herschel[1]) gegebenen Formel. Diese Formel ergiebt

1) Sir John Herschel, On the Theory of Light, London 1828.

sich in gleicher Weise, gleichviel, ob man annimmt, die Erscheinung werde durch diffuses oder durch gebeugtes Licht erzeugt, unter der Voraussetzung jedoch, daſs die getrübte Fläche mit der spiegelnden parallel sey, oder daſs sämmtliche Theilchen der Trübung von der spiegelnden Fläche den gleichen Abstand besitzen. Alsdann sagt uns die Formel und die Messung bestätigt es, daſs die Durchmesser der Ringe der Quadratwurzel aus diesem Abstande umgekehrt proportional sind. Um jener Voraussetzung Rechnung zu tragen, wurde bei den oben erwähnten Messungen auf den Parallelismus der getrübten und der spiegelnden Fläche sorgfältig Bedacht genommen, sey es, daſs der auf der Hinterseite belegte Spiegel planparallel ausgewählt, oder daſs vor einem Spiegel mit metallischer Oberfläche eine getrübte Glasplatte parallel mit der Spiegelfläche aufgestellt wurde.

Man kann sich aber leicht überzeugen, daſs dieser Parallelismus durchaus nicht nothwendig ist, sondern daſs das Ringsystem auch dann noch auftritt, *wenn die getrübte Fläche mit der spiegelnden einen beliebigen Winkel bildet.*

Stellt man nämlich vor einen kleinen Silberspiegel mit nach vorn gekehrter Metallfläche eine planparallele Glasplatte, deren dem Spiegel zugewendete Seite mit einem feinen Staube bedeckt ist, und steht anfänglich die bestäubte Fläche derjenigen des Spiegels parallel, so wird man ein System von Ringen sehen, deren Durchmesser nach dem oben erwähnten Gesetze durch den Abstand der beiden Flächen bedingt sind.

Die bestäubte Platte wird von einem Strahlencylinder getroffen, dessen Durchmesser gleich demjenigen der Collimatorlinse ist; der auf der Staubfläche beleuchtete Kreis von demselben Durchmesser umfaſst sämmtliche „wirksame" Staubtheilchen.

Dreht man jetzt die Platte um eine vertikale durch die Mitte des beleuchteten Theils der bestäubten Fläche gehende Axe, so bleibt das Ringsystem fortwährend sichtbar, und zwar Anfangs ohne merkliche Veränderung; erst

wenn der Winkel zwischen der bestäubten Platte und dem Spiegel schon ziemlich beträchtlich geworden ist, bemerkt man eine Abnahme der Lichtstärke und ein Undeutlichwerden der Ringe höherer Ordnung. Wie grofs aber auch dieser Winkel werden mag, so behalten die Ringe die *nämlichen Durchmesser*, welche sie bei der parallelen Anfangsstellung besafsen.

Bei der Drehung der bestäubten Fläche um die genannte Axe gewinnen nun die einzelnen Staubtheilchen sehr verschiedene Entfernungen von der Spiegelfläche, ihre *mittlere Entfernung* aber bleibt unverändert, nämlich gleich der Entfernung der Drehungsaxe vom Spiegel, oder gleich der Entfernung zwischen Staubfläche und Spiegel, als jene noch mit diesem parallel war.

Wir ziehen hieraus den Schlufs, *dafs die Durchmesser der Ringe unabhängig sind von dem zwischen der getrübten und der spiegelnden Fläche enthaltenen Winkel, und nur bedingt werden durch die mittlere Entfernung der wirksamen Staubtheilchen von der Spiegelfläche.*

Von der Unveränderlichkeit der Ringdurchmesser kann man sich, wenn der blofse Augenschein nicht genügen sollte, etwa auf folgende Art besonders überzeugen. Bei einem Versuche war die bestäubte Fläche, als sie noch mit dem Spiegel parallel stand, 20^{mm} von diesem entfernt. Die Oeffnung des Heliostaten war mit einem rothen Glase bedeckt. Der Lichtpunkt, als Mittelpunkt des Ringsystems, befindet sich zuerst am Fadenkreuz. Nun wird das Fernrohr etwas zur Seite gedreht, so dafs der Kreuzpunkt der Fäden jetzt am Umfange irgend eines dunklen Ringes, z. B. des fünften, steht. Dreht man nun die bestäubte Glasplatte, indem man Sorge trägt, dafs die durch die Mitte der beleuchteten Staubfläche gehende Vertikale den Abstand 20^{mm} vom Spiegel beibehält, so bleibt der fünfte Ring fortwährend am Fadenkreuz.

Man könnte etwa vermuthen, dafs die in der Nähe der Drehungsaxe gelegenen Staubtheilchen, weil sie bei der kreisförmigen oder elliptischen Gestalt der beleuchteten

Fläche in gröfserer Anzahl vorhanden sind als die dem Spiegel näheren und die von ihm entfernteren Theilchen, über letztere gewissermafsen ein Uebergewicht erlangen, dafs also die gesehene Erscheinung in der That nur von solchen Theilchen herrühre, welche jene mittlere Entfernung wirklich oder doch nahezu besitzen. Bedeckt man aber, während die bestäubte Platte z. B. einen Winkel von 45° mit dem Spiegel bildet, die Collimatorlinse mit einem Schirm aus schwarzem Carton, in welchen ein horizontaler Spalt geschnitten ist, dessen Länge ungefähr dem Durchmesser der Collimatorlinse gleichkommt, und dessen Breite (oder Höhe) 3 bis 4^{mm} beträgt, so hat jetzt der beleuchtete Theil der Staubplatte die Gestalt eines in horizontaler Richtung langgezogenen Rechtecks. Die mittleren Theilchen sind jetzt nicht mehr in gröfserer Zahl vorhanden als die mehr oder weniger weit vom Spiegel entfernten, und doch bleibt die Erscheinung, abgesehen von der geringeren Lichtstärke, die nämliche wie vorhin.

Dafs die näheren und die weiter entfernten Staubtheilchen nicht minder wirksam sind als die mittleren, läfst sich leicht nachweisen. Wird nämlich der eben erwähnte horizontale Spalt derart theilweise bedeckt, dafs einmal nur die dem Spiegel nächsten, dann nur die von ihm entferntesten Theilchen Licht empfangen, so zeigt sich in jenem Falle ein weiteres, in diesem Falle ein engeres Ringsystem, als wenn der ganze Spalt oder nur sein mittlerer Theil offen gelassen wird. War z. B., wie oben angegeben, bei unbedecktem Spalt das Fadenkreuz auf den fünften Ring eingestellt, während die Staubplatte einen Winkel von etwa 45° mit dem Spiegel bildete, so erschien dasselbe, als nur die näheren Theilchen beleuchtet waren, zwischen dem zweiten und dritten Ring, dagegen zwischen dem sechsten und siebenten Ring, als nur die entfernteren Theilchen Licht empfingen.

Bedeckt man den mittleren Theil des horizontalen Spaltes, so dafs an beiden Enden gleiche Stücke offen bleiben, so zeigen sich Ringe mit den nämlichen Durchmessern,

als wenn der ganze Spalt oder nur sein mittlerer Theil offen gelassen wird. Während also die Durchmesser der Ringsysteme, welche von den näheren Theilchen allein oder von den entfernteren Theilchen allein hervorgebracht werden, von einander sehr verschieden sind, geben diese beiden Gruppen durch ihr Zusammenwirken *ein* Ringsystem von den nämlichen Dimensionen, wie dasjenige, welches von den mittleren Theilchen allein erzeugt würde.

Führt man, während die bestäubte Platte mit dem Spiegel einen Winkel von etwa 45° einschliefst, ein in einem Carton angebrachtes Loch von 3 bis 4^{mm} Durchmesser vor der Collimatorlinse längs ihrem horizontalen Durchmesser vorüber, so sieht man die Ringe sich allmälig erweitern oder verengern, je nachdem die Beleuchtung von den entfernteren zu den näheren Staubtheilchen, oder umgekehrt, übergeht. Dieser Versuch liefert also *Ringe, deren Dimensionen sich* durch bloſse Verschiebung des Cartons *stetig ändern.*

Da nach den bisher angeführten Versuchen die bestäubte Fläche einen beliebigen Winkel mit dem Spiegel bilden darf, so ist, wenn es sich bloſs um Hervorbringung des Ringphänomens handelt, eine besondere Glasplatte als Trägerin der Bestäubung nicht einmal nöthig; um Ringe zu erzeugen, genügt es, die dem Spiegel zugewendete Fläche der Glasplatte, welche in der Mitte des Spectrometertischchens aufgestellt ist, und in den bisherigen Versuchen bloſs das Licht des Collimators gegen den Spiegel zu reflectiren bestimmt war, mit einem Staubüberzug zu versehen. —

Die angeführten Thatsachen scheinen mir mit entscheidendem Gewichte dafür zu sprechen, daſs das Ringsystem *nicht* durch *diffuses*, sondern durch *gebeugtes* Licht hervorgebracht werde.

Nach der Diffusionstheorie müſste nämlich jedes Staubtheilchen seinem Abstande vom Spiegel gemäſs ein elementares Ringsystem erzeugen; diese unzähligen Ringsysteme von den verschiedensten Durchmessern würden sich, da die von verschiedenen Theilchen diffundirten Strahlen als

unter sich incohärent anzusehen sind, in der Bildebene mischen und daselbst eine mehr oder weniger gleichmäſsige Erleuchtung hervorbringen. Die Diffusionstheorie vermag also von dem Ringsystem, welches bei schiefer Stellung der bestäubten Platte wahrgenommen wird, keine Rechenschaft zu geben.

Nach der Beugungstheorie dagegen stellt die bestäubte Fläche einen beugenden Schirm vor, und die Strahlen, welche an den verschiedenen Staubtheilchen gebeugt wurden, sind als von demselben leuchtenden Punkte kommend, unter sich cohärent. Man kann sich daher sämmtliche Strahlen, welche nach der Spiegelung auf dem Rückwege durch die Staubschicht nach irgend einer Richtung gebeugt werden, zu *einem* resultirenden Strahle vereinigt denken. Wenn das beleuchtete Stück der bestäubten Fläche einen Mittelpunkt oder doch mindestens ein paar conjugirter Durchmesser besitzt (wenn z. B. sein Umriſs eine kreisförmige, elliptische, rechteckige etc. Gestalt hat) und die Bestäubung eine gleichmäſsige ist, so läſst sich analog einem bekannten Satze aus der Theorie der Beugung durch kleine Oeffnungen der Nachweis führen, daſs der resultirende Strahl die nämliche Phase hat, wie der durch den *Mittelpunkt* der beleuchteten Fläche gebeugte Elementarstrahl.

Diejenigen Strahlen, welche auf dem Hinwege vor der Spiegelung gebeugt werden, können angesehen werden, als ob sie an einem zweiten Schirme, der das Spiegelbild des ersten ist, Beugung erlitten. Sie lassen sich ebenso zu einem resultirenden Strahle vereinigen, dessen Phase in ähnlicher Weise durch den Mittelpunkt des zweiten beugenden Schirmes bestimmt wird, d. i. durch das Spiegelbild desjenigen Punktes, der für die Phase der ersten Resultante maſsgebend war.

Die beiden resultirenden Strahlen, deren Phasen demnach durch die Lage eines einzigen Punktes bedingt sind, interferiren nun mit einander ganz in derselben Weise, wie zwei Elementarstrahlen, welche an diesem Punkte vor

und nach der Reflexion gebeugt wurden. Ihre Interferenz giebt daher zu einem System von Ringen Anlaſs, deren Durchmesser nach dem angeführten Gesetze von der Entfernung des *Mittelpunktes* des beleuchteten Theils der Staubfläche vom Spiegel, oder, was dasselbe ist, von der *mittleren Entfernung* der wirksamen Staubtheilchen abhängen.

Auch wenn die oben über die Gestalt des beleuchteten Theils der gleichmäſsig bestäubten Fläche gemachte Voraussetzung nicht ganz strenge, sondern nur nahezu erfüllt ist, wird dieser Satz noch mit groſser Annäherung gelten. Dagegen macht sich eine sehr ungleichmäſsige Vertheilung der Bestäubung innerhalb des beleuchteten Raumes bei schiefer Stellung der Platte durch Verzerrungen der Ringe bemerkbar.

Da die Beugung vor und nach der Spiegelung an dem nämlichen Schirme vor sich geht, so sind bei paralleler Stellung von Staubfläche und Spiegel die Amplituden der beiden Resultanten einander gleich oder doch nahezu gleich. Bei zunehmender Neigung der Platte bleiben diese Amplituden zwar für kleine Beugungswinkel noch immer nahezu gleich, bei gröſseren Beugungswinkeln aber werden sie immer mehr einander ungleich. Dadurch erklärt es sich, daſs bei wachsendem Neigungswinkel die Ringe höherer Ordnung undeutlich werden und allmälig von auſsen herein verschwinden. —

Das Ringsystem zeigt sich nicht bloſs, wenn, wie bei den bisher besprochenen Versuchen, zwischen der getrübten und der spiegelnden Fläche sich Luft befindet, sondern auch, wenn der Zwischenraum der zu einander geneigten Flächen mit einer flüssigen oder festen lichtbrechenden Substanz ausgefüllt ist. Alsdann combinirt sich die Wirkung der Dispersion mit derjenigen der Interferenz, und ändert Gestalt und Farbe der Ringe. Dieser Fall wurde z. B. realisirt durch ein Flintglasprisma mit einem brechenden Winkel von $22\frac{1}{2}°$, dessen Hinterfläche die Rolle des Spiegels übernahm, während die Vorderfläche bestäubt war. Stellt man das Prisma so, daſs die an der Vorder-

fläche gebrochenen Strahlen irgend einer Farbe senkrecht auf die Hinterfläche treffen (sie durchlaufen alsdann bei ihrem Hin- und Rückweg das Prisma in derselben Weise, wie ein Prisma von doppelt so grofsem brechenden Winkel im Falle der kleinsten Ablenkung durchlaufen wird), so sieht man ein horizontales lineares Spectrum, umgeben von einem ovalen unsymmetrischen Ringsystem, dessen Mitte in jener Farbe liegt, welche senkrecht auf die spiegelnde Hinterfläche trifft. Das Ringsystem entsteht augenscheinlich durch Vermischung der den einzelnen Farben angehörigen Ringsysteme. Dreht man jetzt das Tischchen des Spectrometers derart, dafs die Farben des Spectrums vom Roth bis zum Violett nach der Reihe senkrecht zur Hinterfläche zu stehen kommen, so sieht man den Mittelpunkt des Ringsystems dem Spectrum entlang wandern, während Gestalt und Farbe der Ringe sich ändern. —

Damit das Ringsystem zu Stande komme, ist es nicht einmal nöthig, dafs die bestäubte Fläche eben sey. Ein bestäubtes Uhrglas vor den Spiegel gebracht erzeugt die Ringe ebenfalls. Hierher gehört auch der Versuch von Sir William Herschel[1]), welcher Farbenringe auftreten sah, als er vor einem metallenen Hohlspiegel Puder in die Luft streute. Bei unserer Versuchsanordnung genügt es, über dem Zwischenraum zwischen dem Silberspiegel und der inmitten des Spectrometertischchens aufgestellten reflectirenden Glasplatte eine mit Puder, Lycopodiumsporen oder irgend einem andern feinen Staub gesättigte Baumwollflocke auszuschütteln, um jedesmal, wenn eine Staubwolke vor dem Spiegel niederfällt, das Ringsystem aufblitzen zu sehen. Auch hier dürften die Durchmesser der Ringe durch die mittlere Entfernung der Theilchen der Staubwolke vom Spiegel bedingt seyn.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs alle erwähnten Versuche auch objectiv angestellt werden können vermöge

1) Phil. Trans. 1807 p. 231.

der früher (s. Abschnitt II) angegebenen Methode. Bei dem Versuche mit dem Prisma empfiehlt es sich, zur Vermehrung der Lichtstärke auf dessen Hinterfläche einen kleinen Silberspiegel zu kleben.

Die angeführten Thatsachen können, wie oben bereits gezeigt wurde, zu den Gründen, welche früher (III) zu Gunsten der Beugungstheorie geltend gemacht wurden, als neues Beweismittel hinzugefügt werden. Unter jenen Gründen befindet sich auch der Stokes'sche Versuch mit polarisirtem Licht; Stokes zeigte nämlich, daſs, wenn polarisirtes Licht einfällt, das Licht des Ringsystems ebenfalls polarisirt ist, während es, wenn die Ringe durch diffuses Licht entstünden, depolarisirt seyn müſste. In einer Arbeit, welche mir erst nach vollendetem Drucke der Abschnitte I—V bekannt geworden ist, tritt Herr Exner[1]) ebenfalls für die Beugungstheorie ein, stellt jedoch die Beweiskraft des Stokes'schen Versuchs in Abrede, weil nach seiner Ansicht das am Umfange der Staubtheilchen unter nahezu streifender Incidenz *reflectirte* Licht, welches keine Depolarisation erfährt, allein in Betracht kommen soll. Wenn man aber überhaupt diffuses Licht als Ursache der Erscheinung annehmen will, so ist kein Grund zu der Annahme vorhanden — und Herr Exner giebt einen solchen auch nicht an, — daſs ausschlieſslich das durch *Reflexion* und nicht auch das beim *Durchgang* durch die Theilchen der Trübung diffundirte Licht wirksam sey. Bei den meisten Versuchen sind nämlich die Theilchen der Trübung durchsichtig oder doch durchscheinend, und die von ihnen durchgelassene Lichtmenge dürfte die am Rande streifend reflectirte in den meisten Fällen übertreffen. Ja es giebt sogar Fälle, in welchen nur das beim *Durchgang* diffundirte Licht in Betracht kommt, wie z. B. wenn die Trübung durch Behauchung hervorgebracht wurde. In diesem Falle kann offenbar eine Reflexion unter nahezu streifender Incidenz gar nicht statt-

1) Exner, über die Quetelet'schen Interferenzstreifen. Wiener Sitzungsberichte, März 1875.

finden, weil die feinen an der Glasfläche adhärirenden Wassertröpfchen mit derselben einen Randwinkel von etwa 25° bilden. In diesem und in ähnlichen Fällen behält daher das Stokes'sche Experiment seine volle Beweiskraft; in den übrigen Fällen beweist es wenigstens, dafs das beim *Durchgang* durch die Theilchen diffundirte Licht zu dem Ringphänomen nichts beiträgt.

VII.

Bei allen bisher bekannten Versuchen über die durch getrübte Flächen hervorgebrachten Farbenringe befand sich die *getrübte* Fläche vor einer *reinen* Spiegelfläche. Nun soll gezeigt werden, dafs Ringe derselben Art auch entstehen, wenn eine *reine* Glasplatte vor einen *getrübten* oder *bestäubten* Metallspiegel gebracht wird. Das durch's Fernrohr blickende Auge empfängt alsdann folgende drei Lichtantheile: 1. Licht, welches, bevor es zu dem Metallspiegel gelangt, an der Glasplatte reflectirt wird; 2. Licht, welches nach einmaliger Reflexion am Metallspiegel durch die Glasplatte zurückkehrt; 3. Licht, welches, nachdem es vom Metallspiegel zurückgeworfen wurde, an der Glasplatte gegen den Spiegel reflectirt wird und sodann nach wiederholter Reflexion an letzterem durch die Glasplatte zurückkehrt. Steht die Glasplatte zum Spiegel parallel und treffen die einfallenden Strahlen senkrecht auf den Spiegel, so erscheint am Fadenkreuz ein einziger Lichtpunkt, in welchem diese drei Lichtmengen zusammengefafst sind. Dreht man nun die Glasplatte ein wenig um eine vertikale Axe, so spaltet sich dieser Lichtpunkt entsprechend jenen drei Lichtantheilen in drei Lichtpunkte von ungleicher Intensität, von denen der eine am Fadenkreuz bleibt, während die beiden andern in gleichem Abstand diesseits und jenseits vom Fadenkreuz erscheinen. Der am Fadenkreuz bleibende hellste Lichtpunkt entspricht dem zweiten Lichtantheil, von den beiden anderen gehört der hellere der ersten, der weniger helle der dritten Lichtpartie an. *Dieser*

letztere Lichtpunkt erscheint von einem Ringsystem begleitet, welches dieselben Dimensionen hat wie dasjenige, welches sich zeigen würde, wenn die Glasplatte bestäubt und der Spiegel blank wäre.

Wenn die Glasplatte mit dem Spiegel parallel steht, ist dieses Ringsystem kaum wahrnehmbar; da nämlich alsdann der Lichtpunkt, zu dem es gehört, zusammenfällt mit demjenigen, welcher durch das am Spiegel einmal reflectirte Licht erzeugt wird, so verschwinden die Ringe in dem Glanze der Aureole gebeugten Lichts, welche diesen Punkt umgiebt. Erst wenn man die Glasplatte in der angegebenen Weise ein wenig dreht, tritt das Ringsystem deutlich hervor. Der zugehörige Lichtpunkt erscheint jedoch jetzt nicht in der Mitte der Ringe, weil die vom Spiegel einmal reflectirten Strahlen schief auf die Glasplatte treffen. Durch eine kleine Drehung des Spectrometertischchens kann man es aber leicht dahin bringen, daſs diese Strahlen senkrecht zur Glasplatte zu stehen kommen und in Folge dessen der Lichtpunkt das Centrum des Ringsystems einnimmt.

Dieses Ringsystem entsteht durch Interferenz zweier zum dritten Lichtantheil gehörigen Strahlenbündel, von denen das eine vor, das andere nach seiner Reflexion an der Glasplatte durch die Staubschicht des Spiegels gebeugt wurde. Eine leichte hierauf gegründete Rechnung zeigt, daſs der Gangunterschied der beiden Strahlenbündel der nämliche ist, wie für das Ringsystem, welches eine bestäubte Fläche hervorbringt, welche sich in demselben Abstande vor einem blanken Spiegel befindet. (Vergl. Abschnitt II.)

Damit haben wir jedoch nur die Wirkung der dem Spiegel zugewendeten Fläche der Glasplatte berücksichtigt; ihre zweite Fläche giebt aber in derselben Weise zu einem etwas lichtschwächeren Paare von Strahlenbündeln Anlaſs, welches gegen das erstere um eine der doppelten Dicke der Glasplatte entsprechende Weglänge verzögert ist, und für sich allein ein engeres Ringsystem erzeugen

würde. Bei dem sehr grofsen Gangunterschied, welcher zwischen den beiden Strahlenpaaren besteht, wird das Resultat ihrer Interferenz von einer einfachen Vermischung der beiden Ringsysteme praktisch nicht abweichen. Wenn, wie es in den Versuchen der Fall war, die Dicke der Glasplatte klein ist im Verhältnifs zu ihrer Entfernung vom Spiegel (die circa 2^{mm} dicke Platte war 15 bis 20^{mm} vom Spiegel entfernt), so sind die Durchmesser der Ringe niederer Ordnung in beiden Ringsystemen nur wenig von einander verschieden; erst bei den Ringen höherer Ordnung tritt eine merkliche Verschiedenheit der Ringdurchmesser ein. Die Folge davon ist, dafs nur die vier bis fünf ersten Ringe deutlich sichtbar sind, jedoch mit geringerer Schärfe als die Ringe, welche eine bestäubte Fläche vor einem blanken Spiegel hervorbringt.

Um diese störende Wirkung der zweiten Fläche möglichst zu beseitigen, wurde dieselbe mit einer dünnen Rufsschicht überzogen, welche ihr Reflexionsvermögen bedeutend schwächte, ohne jedoch die Durchsichtigkeit völlig aufzuheben. Die Ringe traten jetzt, wenn auch schon wegen der verminderten Lichtstärke nicht zahlreicher, schärfer gezeichnet hervor. Wurde die berufste Fläche dem Spiegel zugewendet, so verschwand das Ringsystem völlig.

Aus diesen Versuchen geht namentlich auch hervor, dafs nicht nur im gegenwärtigen Fall, sondern überhaupt bei dieser Klasse von Erscheinungen die zwischen den beiden Flächen mehrfach reflectirten Strahlen ebenfalls berücksichtigt werden müssen, und dafs daher die früher gegebene einfache Theorie, indem sie sich nur auf die einmal reflectirten Strahlen beschränkt, unvollständig ist. Eine Rechnung ähnlich derjenigen, welche aus der Theorie der Farben dünner Plättchen bekannt ist, zeigt, dafs die Lage der dunkeln Ringe durch die Mitwirkung der mehrfach reflectirten Strahlen keine Aenderung erfährt. Die ausführlichere Erörterung dieses Umstandes sowie anderer

theoretischer Fragen möge jedoch einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

VIII.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dafs Ringe entstehen, wenn vor einem bestäubten Metallspiegel eine reine durchsichtige Glasplatte aufgestellt ist, und zwar durch Interferenz zweier Strahlensysteme, welche zweimal am Spiegel und einmal an der Glasplatte reflectirt wurden und von denen das eine vor, das andere nach seiner Reflexion an der Glasplatte durch die den Spiegel bedeckende Staubschicht gebeugt worden ist.

Bringen wir jetzt wiederum, wie bereits in II. und VI. geschehen ist, eine auf der einen Seite (etwa mit Lycopodiumsporen) bestäubte durchsichtige Glasplatte vor einen blanken Metallspiegel, und zwar so, dass die bestäubte Fläche dem Spiegel zugewendet ist, so sehen wir vor Allem das in den genannten Abschnitten bereits hinlänglich besprochene Ringsystem, welches den einmal am Spiegel reflectirten Strahlen seine Entstehung verdankt. Aufserdem haben wir es aber auch hier mit den im vorigen Abschnitt namhaft gemachten drei Lichtantheilen zu thun, von denen derjenige Antheil, welcher von der Glasplatte wieder gegen den Spiegel reflectirt wird und nach nochmaliger Reflexion an letzterem ins Beobachtungsfernrohr gelangt, ebenfalls zu einem Ringsystem Anlafs giebt.

Steht die bestäubte Platte zum Spiegel parallel, so wird das neue Ringsystem von dem obigen, mit dem es gleiche Durchmesser hat, gedeckt, und kann daher nicht gesehen werden. Um es gesondert zu beobachten, dreht man die bestäubte Platte ein wenig um eine verticale Axe, so dafs der Lichtpunkt, welcher den zweimal am Spiegel reflectirten Strahlen entspricht, seitlich von demjenigen erscheint, welcher von dem einmal reflectirten Lichte herrührt. Nun folgt man mit dem Beobachtungsfernrohr, bis das Faden-

kreuz mit jenem Lichtpunkt zusammenfällt, und kann es jetzt durch eine geringe Drehung des Spectrometertischchens leicht dahin bringen, daſs die Ringe, welche diesem Lichtpunkt zugehören, zu ihm concentrisch sind. Durch Beobachtung des gespiegelten Fadenkreuzes überzeugt man sich, daſs in diesem Falle der Spiegel zur Fernrohraxe senkrecht steht. Hat man der Staubplatte eine so geringe Drehung ertheilt, daſs noch beide Lichtpunkte im Gesichtsfeld sind, so sieht man jetzt gleichzeitig zwei von einander unabhängige Ringsysteme, nämlich das längstbekannte vom einmal reflectirten Licht herrührende, welches aber bei der jetzigen Stellung zu seinem Lichtpunkte nicht mehr concentrisch ist, und das weit lichtschwächere neue, welches den zweiten Lichtpunkt concentrisch umgiebt. Indem man die Drehung der bestäubten Platte fortsetzt, und mit dem Fernrohr und dem Spectrometertischchen nachrückt, kann man dieses Ringsystem verfolgen, bis die Platte mit dem Spiegel einen beträchtlichen Winkel bildet.

Wir bezeichnen von nun an das längst bekannte Ringsystem als primäres, das soeben besprochene als secundäres Ringsystem erster Art, und das im vorigen Abschnitt (VII.) beschriebene als secundäres Ringsystem zweiter Art.

Die Theorie der secundären Ringsysteme unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen des primären. Bei dem Ringsystem erster Art sind die von der Glasplatte gegen den Spiegel reflectirten Strahlen als einfallende zu betrachten; indem sie theils beim Hin-, theils beim Rückweg durch die Staubschicht gebeugt werden, erzeugen sie ein Ringsystem, dessen Mittelpunkt auf der Normale des Spiegels liegt, und dessen Durchmesser in bekannter Weise durch den mittleren Abstand der Staubtheilchen vom Spiegel bedingt sind.

Bei dem secundären Ringsystem zweiter Art übernehmen die vom staubbedeckten Spiegel einmal reflectirten

Strahlen die Rolle der einfallenden Strahlen, während die Glasplatte als spiegelnde Fläche wirkt. Es würde nun zunächst ein Ringsystem entstehen, das seinen Mittelpunkt auf der Normale der Glasplatte hat, und welches für ein hinter dem Spiegel befindliches Auge, wenn dieser durchsichtig wäre, sichtbar seyn müfste. Die Strahlen, welche zur Bildung dieser Ringe zusammenwirken, werden aber von dem Spiegel nach vorn ins Fernrohr reflectirt; man sieht daher durch letzteres ein Ringsystem, dessen Mittelpunkt auf derjenigen Richtung liegt, welche die Normale der Glasplatte annehmen würde, wenn sie gleich einem Lichtstrahl vom Spiegel reflectirt würde. Die Ringe werden daher zu ihrem Lichtpunkt concentrisch, wenn das vom Spiegel zweimal reflectirte Licht die genannte Richtung einschlägt, d. h. wenn die von der Glasplatte gegen den Spiegel gehenden Strahlen zur Glasplatte senkrecht stehen. Die Durchmesser der Ringe entsprechen auch hier der mittleren Entfernung der den Spiegel bedeckenden Staubtheilchen von der Glasplatte.

Versieht man sowohl den Spiegel als die Glasplatte mit einer Staubschicht, so erhält man aufser dem primären noch die beiden secundären Ringsysteme, von welchen jenes an den einmal, die beiden letzteren an den zweimal reflectirten Lichtpunkt gebunden sind. Das primäre und das erste secundäre Ringsystem haben ihren gemeinsamen Mittelpunkt auf der Normale des Spiegels, das zweite secundäre Ringsystem dagegen auf der reflectirten Normale der Glasplatte. Bildet die Platte mit dem Spiegel den Winkel α, so sind die Lichtpunkte um die Winkeldistanz 2α, die Mittelpunkte um α von einander entfernt. Dreht man das Spectrometertischchen sammt allen von ihm getragenen Platten, so bleiben die beiden Lichtpunkte fest an ihrer Stelle stehen, während die beiden Mittelpunkte, ihren Abstand α stets bewahrend, durch das Gesichtsfeld wandern. Indem man den ersten Mittelpunkt mit dem ersten und zweiten Lichtpunkt, sodann den zweiten Mit-

telpunkt mit dem zweiten Lichtpunkt zusammenfallen läfst, kann man nach der Reihe jedes der drei Ringsysteme mit seinem Lichtpunkt concentrisch machen, jedoch nie zwei derselben gleichzeitig; nur wenn α gleich Null ist, werden alle drei Systeme concentrisch zu dem jetzt einzigen Lichtpunkt und decken sich vollständig. Obgleich das primäre und das erste secundäre Ringsystem denselben Mittelpunkt besitzen, so können dieselben doch ihrem Aussehen nach sehr von einander verschieden seyn. Bringt man z. B. den ersten Mittelpunkt in den zweiten Lichtpunkt, so umgiebt das erste secundäre Ringsystem denselben concentrisch, während das primäre System ein Bündel Whewell'scher Streifen bildet, von welchen der durch den ersten Lichtpunkt gehende farblose Streifen den Radius 2α hat und seine concave Seite dem zweiten Lichtpunkt zuwendet. Befindet sich dagegen der erste Mittelpunkt in der Mitte zwischen den beiden Lichtpunkten, so werden die beiden ersten Ringsysteme, abgesehen von der Lichtstärke, einander vollkommen gleich und decken sich, indem für beide der farblose Kreis den Radius α hat, während gleichzeitig das dritte System den zweiten Lichtpunkt concentrisch umschliefst. Es ist übrigens nicht nothwendig, die Wandlungen unserer Gruppe von drei Ringsystemen noch weiter ins Einzelne zu verfolgen, da das bisher Gesagte hinreicht, dieselben vollständig zu übersehen.

Ein Umstand, welcher oben bei der Darstellung des secundären Ringsystems erster Art bereits erwähnt wurde, verdient noch besonders hervorgehoben zu werden. Damit dasselbe sich bilden könne, ist nämlich nöthig, dafs die bestäubte Fläche der Glasplatte dem Spiegel zugewendet sey: wird die unbestäubte Fläche gegen den Spiegel gekehrt, so zeigt sich wohl das primäre, nicht aber das secundäre Ringsystem. Aus der Beugungstheorie erklärt sich diese Thatsache auf die einfachste Weise; im letzteren Falle gehen nämlich die von der Glasplatte gegen den Spiegel reflectirten Strahlen gar nicht durch die Staubschicht, welche sich hinter der reflectirenden Fläche be-

findet, und erleiden daher auf dem Hinwege zum Spiegel keine Beugung; hiemit ist aber die Grundbedingung zur Bildung der Ringe weggefallen. Schon früher (VI.) wurde ein Versuch beschrieben, auf welchen das eben Gesagte gleichfalls Anwendung findet; das primäre Ringsystem kann nämlich erzeugt werden, indem man die in der Mitte des Spectrometertischchens aufgestellte Glasplatte, welche sonst nur das Licht des Collimators dem Spiegel zuzuführen hat, auf ihrer dem Spiegel zugewendeten Seite bestäubt, während eine Bestäubung der abgewendeten Seite wirkungslos bleibt. Aus denselben Gründen entsteht auch das secundäre Ringsystem zweiter Art nicht, wenn man den Spiegel durch eine auf ihrer Rückseite bestäubte durchsichtige Glasplatte ersetzt.

Die Diffusionstheorie vermag von diesen Thatsachen eine gleich ungezwungene Erklärung nicht zu geben; dieselben sprechen also ebenfalls zu Gunsten der Beugungstheorie. —

Vom theoretischen Standpunkte aus unterliegt es keinem Zweifel, daſs es auch Ringsysteme noch höherer Ordnung (tertiäre, quaternäre u. s. w.) geben muſs; wegen ihrer sehr geringen Lichtstärke können dieselben jedoch nicht wahrgenommen werden.

IX.

Die in den beiden vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Versuche führen unmittelbar zu einer Darstellung derartiger Ringsysteme in der Richtung der einfallenden Strahlen selbst, also bei gerader Durchsicht (à vision directe). Wir bringen nämlich jetzt das Fernrohr in die Richtung des Collimators, so daſs der Lichtpunkt direct am Fadenkreuz gesehen wird, und stellen auf das Tischchen senkrecht auf den Weg der einfallenden Strahlen zwei durchsichtige planparallele Glasplatten, von welchen die dem Collimator nähere als erste, die dem Fernrohr nähere als zweite Platte bezeichnet werden soll. Die ein-

ander zugewendeten Flächen der Glasplatten nennen wir die inneren Flächen.

Bestäubt man nun die Innenseite der zweiten Platte, so sind die Bedingungen zur Entstehung des secundären Ringsystems erster Art gegeben; dasselbe entsteht nämlich durch die Strahlen, welche von der zweiten Platte gegen die erste und von dieser wieder ins Fernrohr reflectirt werden. Stehen die Platten zu einander parallel, so fällt der von beiden Strahlen herrührende Lichtpunkt mit dem direct gesehenen Lichtpunkt zusammen, und die Deutlichkeit der Ringe wird beeinträchtigt durch die grofse Helligkeit des gebeugten Lichtes, welches letzteren umgiebt. Das Ringsystem tritt aber sehr schön hervor, wenn man die zweite Platte ein wenig um eine verticale Axe dreht, so dafs der secundäre Lichtpunkt zur Seite des direct gesehenen zu liegen kommt; indem man alsdann das Fernrohr und das Tischchen in der oben bereits beschriebenen Weise nachdreht, kann man die Ringe leicht concentrisch zu ihrem Lichtpunkt machen und zwar tritt dieses ein, wenn die von der zweiten gegen die erste Platte reflectirten Strahlen auf letzterer senkrecht stehen. Dreht man die Platte weiter, so dafs der secundäre Lichtpunkt sich immer weiter von dem primären entfernt, und rückt mit Fernrohr und Tischchen entsprechend nach, so kann man das Ringsystem beliebig weit verfolgen.

Wird die erste Platte auf ihrer Innenseite bestäubt, so beobachtet man ebenso das secundäre Ringsystem zweiter Art, welches zu seinem Lichtpunkt concentrisch wird, wenn die einfallenden Strahlen zur zweiten Platte senkrecht stehen.

Werden die Innenseiten beider Platten bestäubt, so erhält man beide Ringsysteme, jedoch nie gleichzeitig zu ihrem Lichtpunkte concentrisch, aufser wenn die Platten parallel sind.

Ein primäres Ringsystem erscheint im gegenwärtigen Falle nicht. Dagegen treten noch zwei lichtschwächere secundäre Ringsysteme auf, welche durch Zusammenwir-

ken der spiegelnden Aufsenseite einer jeden Platte mit der ihr zugehörigen Staubschicht entstehen, und deren Durchmesser in bekannter Weise von der Dicke der Platte und ihrem Brechungsverhältnifs bestimmt werden, während die Durchmesser der zuerst erwähnten Ringsysteme von der gegenseitigen Entfernung der Platten abhängen. Sind die Platten dünn im Verhältnifs zu ihrer Entfernung, so werden die Durchmesser jener Ringe so beträchtlich, und die Ringe selbst so undeutlich, dafs eine Störung der beiden oben betrachteten Ringsysteme, mit welchen wir uns hier allein beschäftigen wollen, nicht eintreten kann.

Wenn nur eine oder auch beide Aufsenflächen der Platten bestäubt sind, so erscheinen aus den bereits entwickelten Gründen gar keine Ringe.

Obwohl diese Versuche nur eine Wiederholung in anderer Form der im vorigen Abschnitt beschriebenen sind, so dürfen sie doch ein besonderes Interesse in Anspruch nehmen, weil sie nach meiner Ansicht eine unerwartete Aufklärung geben über ein von Babinet beschriebenes Experiment, dessen Richtigkeit angezweifelt worden, und welches fast der Vergessenheit anheimgefallen ist.

Babinet[1]) brachte nämlich eine durchsichtige Platte auf den Weg der convergirenden Strahlen, die zu dem Bildpunkte gingen, welchen eine Linse von einem jenseits befindlichen Lichtpunkt auf einem Schirme entwarf. Waren die beiden Flächen der Platte mit verdünnter Milch oder noch besser mit Dextrinfirnifs getrübt, so erschien auf dem Schirm ein System farbiger Ringe, welche bei senkrechter Incidenz zum Bildpunkt concentrisch waren; wurde aber die Platte geneigt, so entstand ein farbloser Kreis, dessen Umfang beständig durch den Bildpunkt ging. Dieselbe Erscheinung zeigte sich, wenn die Platte oder vielmehr ihre beiden Flächen durch zwei gefirnifste Glimmer-

1) Babinet, Sur les couleurs de doubles surfaces à distance; Comptes rend. VII, p. 694. 1838. Poggend. Ann. XLVI, p. 472.

Billet, Traité d'optique physique, I, p. 155. „Anneaux de M. Babinet.“

blättchen ersetzt wurde. Babinet erklärte die Erscheinung aus der Interferenz von Strahlen, welche bloſs an der ersten, mit solchen, welche bloſs an der zweiten Fläche zerstreut worden sind.

Man sieht, daſs diese Erklärung mit dem Stokes'schen Princip im Widerspruch steht. Auch tritt Stokes[1]) ausdrücklich gegen die Möglichkeit auf, daſs auf solche Weise Ringe entstehen könnten, jedoch ohne speciell auf Babinet's Abhandlung Bezug zu nehmen, welche ihm damals nicht bekannt gewesen zu seyn scheint. In Verdet's[2]) trefflichen „Leçons d'optique physique" wird sogar in Abrede gestellt, daſs Babinet Ringe dieser Art wahrgenommen habe. „Wenn einige Physiker", heiſst es daselbst, „und unter anderen Babinet, unter solchen Umständen Farbenringe wahrgenommen haben, so liegt der Grund darin, daſs sie die beiden Flächen der Platte, um ihnen ein beträchtliches Diffusionsvermögen zu verleihen, mit einem Staub aus regelmäſsigen und gleichen Körnchen, wie z. B. Lycopodiumpulver, bedeckt hatten, und daſs alsdann Beugungserscheinungen entstanden, welche von den gegenwärtig betrachteten Erscheinungen völlig verschieden sind."

Diese Kritik geht offenbar zu weit; es kann nicht angenommen werden, daſs ein Physiker vom Range Babinet's gewöhnliche Beugungsringe mit der hier in Rede stehenden Erscheinung verwechselt haben sollte, um so weniger, als er in seiner Abhandlung die bei Neigung der Platte eintretenden für unsere Ringe so charakteristischen Wandlungen ausdrücklich beschreibt. Gleichwohl müssen die von Stokes und Verdet erhobenen Einwände, insofern sie sich gegen die von Babinet angenommene Erklärungsweise richten, als zutreffend anerkannt werden.

Interferenz gebeugten Lichts tritt zwar jedesmal ein, wenn von einem leuchtenden Punkt kommende Strahlen

1) Poggend. Ann., Ergänzungsband III, S. 582.

2) Verdet, Leçons d'optique physique, publiées par Levistal, I. p. 239.

durch zwei beugende Schirme gehen; damit jedoch die Erscheinung nicht chaotisch werde, sondern sich regelmäfsig ausgestaltete, ist nothwendig, dafs die beiden beugenden Schirme einander gleich seyen; in diesem Erfordernifs besteht eben vom Standpunkt unserer Theorie aus betrachtet das Stokes'sche Princip. Man kann diese Gleichheit wenigstens annähernd erreichen, indem man z. B. zwei gleiche Spalten hinter einander aufstellt, oder mit einer Nadel in zwei aufeinandergelegte Stanniolblätter Löcher sticht, oder zwei gleiche Gitter anwendet u. s. w. Am leichtesten und vollkommensten aber wird diese Gleichheit erzielt, wenn man als zweiten Schirm das Spiegelbild des ersten benutzt, d. h. wenn man, wie in unsern Versuchen geschehen ist, einen beliebigen beugenden Schirm oder eine getrübte oder bestäubte Fläche vor eine spiegelnde Fläche bringt. Dagegen halte ich es für unmöglich, zwei Trübungen oder Bestäubungen so vollkommen gleich herzustellen, wie es zur Entstehung von Ringen nach Babinet's Vorstellung erforderlich wäre.

Es ist mir in der That, trotz vielfacher objectiv und subjectiv angestellter Versuche, niemals gelungen, mittelst zweier bestäubter oder getrübter Flächen Ringe zu erhalten, welche der Babinet'schen Erklärungsweise entsprochen hätten. Wohl aber können diejenigen Ringe auftreten, welche ich oben beschrieben und als „secundäre" bezeichnet habe.

Man darf daher mit Recht vermuthen, dafs Babinet diese letzteren Ringe gesehen und sich bei seiner allerdings zunächst liegenden Theorie beruhigt habe, da dieselbe wenigstens qualitativ mit der Erscheinung übereinstimmte.

Hier erhebt sich jedoch eine neue Schwierigkeit; die beiden Flächen einer Glasplatte sind nämlich als Aufsenflächen in dem oben erläuterten Sinne zu betrachten, und wir haben gezeigt, dafs, wenn die Aufsenflächen allein bestäubt sind, gar keine Ringe sich bilden. Mit einer *bestäubten* Glasplatte erhält man in der That die Ringe nicht.

Nun ist aber wohl zu beachten, daſs Babinet seine Platten mit *verdünnter Milch* oder, mit noch besserem Erfolg, mit Dextrinfirniſs getrübt hat. Die eingetrocknete Milch bildet auf der Glasplatte ein Häutchen mit glatter spiegelnder Oberfläche, in welches die beugenden Theilchen eingebettet sind. Ein aus der Glasplatte kommender und an der Oberfläche des Häutchens wieder in die Glasplatte hinein reflectirter Strahl geht daher in der That an diesen Theilchen vorbei und erleidet die zur Entstehung der Ringe nothwendige Beugung. Aehnliches gilt von einer Firniſsschicht.

Um die Richtigkeit dieser Ueberlegung darzuthun, behandelte ich eine Glasplatte in Ermangelung von Dextrinfirniſs, welchen ich mir nicht verschaffen konnte, mit dem feinen Lack, womit die Photographen ihre Negativplatten zu überziehen pflegen. Um die Lackschicht herzustellen, wurde der flüssige Lack über die schiefgehaltene Platte gegossen. Die rasch trocknende Lackschicht zeigt unter dem Mikroskop betrachtet eine eigenthümlich regelmäſsige Structur. Man sieht nämlich parallel der Richtung, in welcher der Lack geflossen war, eine feine Streifung; zwischen je zwei dieser Streifen und senkrecht zu ihnen gewahrt man noch eine Menge viel feinerer und engerer Streifen; jene Streifen stellen gleichsam die Strömungslinien, diese die Wellen des flieſsenden Lacks im erstarrten Zustande dar. Vermöge dieser Structur bringt die Lackschicht eine Beugungserscheinung hervor ähnlich derjenigen zweier gekreuzter ungleicher Gitter. Die gitterartige Beschaffenheit der beugenden Schicht hat aber zur nothwendigen Folge, daſs die von ihr erzeugten Ringe den von einer unregelmäſsigen Trübung hervorgebrachten nicht ganz ähnlich, sondern durch unvollkommen ausgebildete Erscheinungen jener Art, welche wir im IV. Abschnitt kennen gelernt haben, alterirt sind.

Wird nun eine auf diese Weise einerseits lackirte Platte, wie in den oben beschriebenen Versuchen, einer reinen Glasplatte gegenübergestellt, so erzeugt sie in der That

solche Ringe auch dann, wenn ihre lackirte Fläche nach aufsen gekehrt ist. Nur wenn die beiden Platten genau parallel waren, so dafs der secundäre Lichtpunkt mit dem primären zusammenfiel, konnte das Ringsystem nicht wahrgenommen werden, weil es durch das sehr helle Beugungsbild, welches den letzteren umgiebt, verdeckt wird. Ebenso und aus demselben Grunde vermochte ich auch keine Ringe wahrzunehmen bei Anwendung einer einzigen einerseits oder auf beiden Seiten lackirten planparallelen Glasplatte. Die Bedingungen zur Bildung der Ringe sind jedoch auch hier gegeben, und die Möglichkeit kann nicht geleugnet werden, dafs sie auch in diesem Falle unter Umständen gesehen werden können.

Durch diese Versuche und in Anbetracht des Umstandes, dafs wir niemals Ringe wahrnehmen konnten, welche der Babinet'schen Theorie entsprochen hätten, wird es mindestens wahrscheinlich, dafs auch die von Babinet gesehenen Ringe keine anderen waren, als diejenigen, welche oben als „secundäre" bezeichnet worden sind.

Die Babinet'sche Theorie nämlich, welche aus den oben bereits angeführten Gründen beanstandet werden mufs, führt zwar in Bezug auf den allgemeinen Habitus der Ringe zu demselben Resultat, wie die unsrige, hinsichtlich der Durchmesser aber weicht sie wesentlich von ihr ab. Nach Babinet's Theorie würde der Gangunterschied je zweier interferirenden Strahlen ausgedrückt seyn durch die Formel

$$\delta = 2\mu d\,(\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi' - \sin^2 \tfrac{1}{2}r),$$

wo dieselben Bezeichnungen gebraucht sind wie in Abschnitt II. (d Entfernung der beiden Flächen, μ Brechungsverhältnifs der ihren Zwischenraum ausfüllenden Substanz, r und φ' die Winkel, welche die directen und die gebeugten Strahlen innerhalb dieses Zwischenraums mit der Linie d bilden); nach unserer Theorie dagegen ergiebt sich als Gangunterschied

$$\delta = 4\mu d\,(\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi' - \sin^2 \tfrac{1}{2}r).$$

Die Durchmesser der von uns beobachteten Ringe entsprechen nun durchaus der letzteren Formel, während sie

nach Babinet, der übrigens, wie es scheint, keine Messungen angestellt hat, im Verhältnifs von $\sqrt{2}:1$ gröfser seyn müfsten.

Ein anderer wesentlicher Unterschied zwischen unserer Theorie und derjenigen Babinet's beruht darin, dafs jene nur eine, diese aber zwei getrübte Flächen erfordert.

Anmerkung. Herr K. Exner[1]) hat dasjenige Ringsystem, welches Babinet gesehen zu haben glaubte, mittelst zweier Glasplatten, auf welchen eine und dieselbe Bestäubung *in ganz gleicher Weise photographirt* war, wirklich dargestellt, in Uebereinstimmung mit dem Stokes'schen Princip, wie dasselbe oben formulirt oder vielmehr richtig gestellt worden ist.

X.

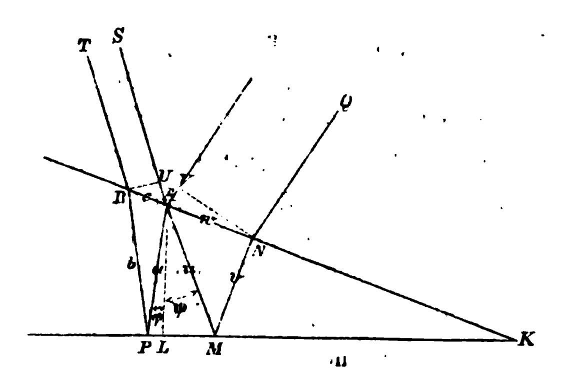
In den vorhergehenden Abschnitten (VI—IX) haben wir uns mit Ringsystemen beschäftigt, welche sich zeigen, wenn die getrübte und die spiegelnde Fläche irgend einen Winkel miteinander bilden. Befindet sich Luft zwischen den beiden Flächen, so ist mit Rücksicht auf das in VI aufgestellte Prinzip, *dafs nur ein einziger Punkt der getrübten Fläche für die Gangunterschiede maafsgebend ist,* leicht einzusehen, dafs die im II. Abschnitt gegebene einfache Theorie auch in diesem Falle unverändert ihre Geltung behält, und dafs namentlich die Ringe auch bei geneigten Flächen genau kreisförmig seyn müssen.

Ist jedoch der Zwischenraum der beiden zu einander geneigten Flächen mit einer lichtbrechenden Substanz ausgefüllt, wie bei dem im VI. Abschnitt beschriebenen Versuch mit einem Prisma, so erscheinen die Ringe nicht mehr kreisförmig, sondern *oval.* Um auch diesen Fall zu umfassen, bedarf die Theorie einer Erweiterung, welche im Folgenden gegeben werden soll.

In der beigegebenen Figur stelle *BKP* den Hauptschnitt eines Prismas vor, dessen brechender Winkel α und dessen Brechungs-Verhältnifs μ sey. Ein einfallender Strahl *SA*

1) Wiener Sitzungsberichte Bd. LXXII. II. Abth. 1875.

werde an dem Staubtheilchen A der Vorderfläche nach AM gebeugt, an der Hinterfläche nach MN zurückgeworfen, und trete, nachdem er in dem Punkte N der Vorderfläche eine Brechung erlitten, nach NQ aus. Ein zweiter mit SA parallel einfallender Strahl TB treffe, nachdem er an der Vorderfläche in B gebrochen, und an der Hinterfläche in P reflectirt worden, auf dasselbe Staubtheilchen A. Unter den gebeugten Strahlen, zu welchen er Anlaſs giebt, wird sich einer, AR, befinden, welcher mit dem Strahl NQ parallel ist und daher mit ihm in der Brennebene des Objectivs interferirt. Es handelt sich also darum, den Gangunterschied δ der beiden Strahlen AR und NQ zu ermitteln.



Obgleich die Figur in der Ebene des Hauptschnitts ausgeführt ist, so beziehen sich doch die folgenden Betrachtungen durchaus auf den Verlauf der Strahlen *im Raume*, und die Zeichnung ist demnach nur als *Projection* des Strahlencomplexes auf die Ebene eines Hauptschnittes aufzufassen. So nehmen wir z. B. an, daſs der Strahl AM in einer beliebigen durch die zur Hinterfläche Normalen AL gehenden Ebene liege, und in dieser Ebene mit AL den Winkel ψ bilde. Diese Ebene, welche das Dreieck AMN enthält, dessen Seiten der Reihe nach mit u, v, w bezeichnet werden sollen, stellt einen *schiefen Schnitt* des Prismas vor, dessen in der Kante K zusammenlaufende

Schenkel einen Winkel γ ($< \alpha$) mit einander bilden. Der gebrochene Strahl NQ tritt aus der Ebene dieses schiefen Schnittes heraus, und darum ist auch die Ebene $QNAR$, welche durch die beiden interferirenden Strahlen gelegt ist, von der Ebene des Dreiecks AMN verschieden. Ebenso nehmen wir an, dafs das Dreieck APB, dessen Seiten der Reihe nach a, b, c heifsen mögen, in einem zweiten durch AL gelegten schiefen Schnitt, dessen Schenkel sich in der Kante K unter dem Winkel β begegnen, enthalten sey; der Winkel, welchen der Strahl PA mit AL bildet, werde mit φ bezeichnet. Natürlich ist alsdann auch die Ebene $SABT$, welche durch die beiden einfallenden Strahlen geht, von der Ebene des Dreiecks APB verschieden zu denken.

Fällt man nun von den Punkten A und N aus resp. die Geraden BU und NV senkrecht auf die Strahlen SA und AR, so ist der gesuchte Gangunterschied

$$\delta = \mu . BP + \mu . PA + AV - (UA + \mu . AM + \mu . MN),$$

oder, wenn man die spitzen Winkel, welche die Strahlenrichtungen SA und NQ resp. mit den Linien AB und AN (im Raume gedacht) bilden, mit ϑ und χ bezeichnet:

$$\delta = \mu b + \mu a + w \cos\chi - (c \cos\vartheta + \mu u + \mu v),$$

oder in etwas anderer Anordnung

$$\delta = \mu(a + b) - c \cos\vartheta - \mu(u + v) + w \cos\chi.$$

Bezeichnet man die von A auf die Hinterfläche des Prismas gefällte Senkrechte AL mit d, so ist

$$a = \frac{d}{\cos\varphi} \text{ und } u = \frac{d}{\cos\psi};$$

und da in dem Dreiecke APB die den Seiten a, b, c der Reihe nach gegenüberliegenden Winkel

$$90^\circ - \beta - \varphi,\ 90^\circ + \beta - \varphi,\ 2\varphi$$

sind, und ebenso in dem Dreiecke AMN den Seiten u, v, w resp. die Winkel

$$90^\circ + \gamma - \psi,\ 90^\circ - \gamma - \psi,\ 2\psi$$

gegenüberliegen, so hat man

$$b = a\,.\,\frac{\cos(\beta-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} = \frac{d}{\cos\varphi}\,.\,\frac{\cos(\beta-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)},$$

$$c = a\,.\,\frac{\sin 2\varphi}{\cos(\beta+\varphi)} = \frac{2d\sin\varphi}{\cos(\beta+\varphi)},$$

$$v = u\,.\,\frac{\cos(\gamma+\psi)}{\cos(\gamma-\psi)} = \frac{d}{\cos\psi}\,.\,\frac{\cos(\gamma+\psi)}{\cos(\gamma-\psi)},$$

$$w = u\,.\,\frac{\sin 2\psi}{\cos(\gamma-\psi)} = \frac{2d\sin\psi}{\cos(\gamma-\psi)}.$$

Führt man diese Werthe oben ein, so ergiebt sich nach geeigneter Reduction

$$\delta = \frac{2d}{\cos(\beta+\varphi)}(\mu\cos\beta - \sin\varphi\cos\vartheta) - \frac{2d}{\cos(\gamma\,1-\psi)}(\mu\cos\gamma - \sin\psi\cos\chi).$$

Die Winkel ϑ und χ bestimmen sich leicht, wenn man das Brechungsgesetz in einer Form anwendet, auf welche zuerst Matzka[1]) aufmerksam gemacht hat. Es ist nämlich das Verhältniſs der Cosinus der beiden spitzen Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Strahl mit irgend einer in der Trennungsebene gezogenen Geraden bilden, stets gleich dem Brechungs-Verhältniſs. Daraus folgt in unserem Falle

$$\cos\vartheta = \mu\cos(90^0 - \beta - \varphi) = \mu\sin(\beta+\varphi)$$

und

$$\cos\chi = \mu\cos(90^0 + \gamma - \psi) = \mu\sin(\psi - \gamma).$$

Nach Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich

$$\mu\cos\beta - \sin\varphi\cos\vartheta = \mu(\cos\beta - \sin\varphi\sin(\beta+\varphi)) = \mu\cos\varphi\cos(\beta+\varphi)$$

und ebenso

$$\mu\cos\gamma - \sin\psi\cos\chi = \mu(\cos\gamma - \sin\psi\sin(\psi-\gamma)) = \mu\cos\psi\cos(\gamma-\psi).$$

1) Matzka, Interessante Abänderung des Ausspruchs des Gesetzes der gewöhnlichen Lichtbrechung. Grunert's Archiv XXXIV, S. 316.

Man erhält daher schliefslich

$$\delta = 2\mu d(\cos\varphi - \cos\psi)$$

oder auch

$$\text{I.} \qquad \delta = 4\mu d(\sin^2\tfrac{1}{2}\psi - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Die durch ein Prisma hervorgebrachten Ringe befolgen demnach genau das nämliche Gesetz wie die einer planparallelen Platte, d. h. *die Strahlen gleichen Gangunterschiedes sind innerhalb des Prismas zur Normalen der spiegelnden Hinterfläche ringsum gleich geneigt.* Man könnte dieses Ergebnifs auch dadurch ausdrücken, dafs man sagt, die Ringe seyen innerhalb des Prismas noch genaue Kreise mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt auf der Normale der Hinterfläche und gewinnen ihre ovale Gestalt erst durch die Brechung beim Austritt aus der Vorderfläche.

Um diese Gestalt genauer zu erforschen, ist es daher nothwendig, die Strahlen auch auf ihrem Wege aufserhalb des Prismas zu verfolgen.

Bezeichnen wir wie vorher mit ψ den Winkel, den ein beliebiger Strahl innerhalb des Prismas mit der Normalen der Hinterfläche einschliefst, und mit ξ den Winkel, welchen die durch ihn und die Normale gelegte Ebene mit dem Hauptschnitt des Prismas bildet, so bestimmt sich der von diesem Strahl mit der Normale der Vorderfläche gebildete Winkel σ (d. i. sein Einfallswinkel an dieser Fläche) durch die Gleichung

$$1) \quad \cos\sigma = \cos\alpha\cos\psi + \sin\alpha\sin\psi\cos\xi,$$

wenn α den brechenden Winkel des Prismas bezeichnet. In der durch den Strahl und diese Normale gelegten Brechungsebene, welche mit dem Hauptschnitt den Winkel η einschliefst, bildet der austretende Strahl mit den Normalen den durch das Brechungsgesetz

$$2) \quad \sin\tau = \mu\sin\sigma$$

bestimmten Winkel τ. Wie nun der im Innern des Prismas verlaufende Strahl durch den Winkel ψ auf die Normale der Hinterfläche bezogen war, so beziehen wir jetzt den austretenden Strahl auf diejenige Richtung, welche diese

Normale annehmen würde, wenn sie gleich einem Lichtstrahl an der Vorderfläche gebrochen würde. Diese Richtung fällt in den Hauptschnitt und bildet mit dem Lothe der Vorderfläche einen Winkel α', welcher durch die Gleichung

$$\sin\alpha' = \mu \sin\alpha$$

gegeben wird. Wird nun der Winkel, welchen der austretende Strahl mit dieser Richtung, d. i. mit der gebrochenen Normalen der Hinterfläche, einschliefst, durch ϱ, und durch ω derjenige Winkel bezeichnet, unter welchem die durch den Strahl und die gebrochene Normale gelegte Ebene zum Hauptschnitt geneigt ist, so besteht zwischen dem Winkel τ und den zuletzt eingeführten Winkeln die Gleichung

$$3)\ \cos\tau = \cos\alpha' \cos\varrho + \sin\alpha' \sin\varrho \cos\omega.$$

Aufserdem ergeben sich aus den beiden sphärischen Dreiecken, welche zu den Gleichungen (1.) und (3.) geführt haben, und welche ersichtlich den Winkel η gemeinschaftlich besitzen, noch die beiden Beziehungen

$$\sin\psi \sin\xi = \sin\sigma \sin\eta,$$
$$\sin\varrho \sin\omega = \sin\tau \sin\eta,$$

welche nach Elimination von η und unter Berücksichtigung von (2.) die Gleichung

$$4)\ \sin\varrho \sin\omega = \mu \sin\psi \sin\xi$$

liefern.

Eliminirt man nun aus den vier Gleichungen (1.—4.) die drei Gröfsen ξ, σ und τ, so erhält man eine Gleichung zwischen den sphärischen Polarcoordinaten ϱ und ω, welche die Gleichung derjenigen Curve ist, in welche sich der Kreis vom Radius ψ durch die Brechung verwandelt. Diese Gleichung lautet:

$$\text{II.}\quad 4\mu^2 \sin^2\alpha\,(N^2 \sin^2\varrho - \mu^2 \cos^2\alpha \sin^2\psi)$$
$$- \sin 2\alpha' \sin 2\varrho \cos\omega \left((N^2 - \sin^2\alpha')\sin^2\varrho - \mu^2 \cos 2\alpha \sin^2\psi\right)$$
$$+ \left((N^2 - \sin^2\alpha')\sin^2\varrho + \mu^2 \sin^2\psi\right)^2$$
$$- 4\mu^2 \cos^2\alpha\,(\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha' \cos^2\omega) \sin^2\psi \sin^2\varrho$$
$$- \sin^2 2\alpha' \sin^4\varrho \cos^2\omega = 0;$$

darin ist

$$N^2 = \cos^2\alpha \sin^2\omega + \cos^2\alpha' \cos^2\omega,$$

und α' wird durch die Gleichung

$$\sin\alpha' = \mu \sin\alpha$$

bestimmt.

Obwohl diese Gleichung keineswegs einfach ist, so läſst sich doch aus ihr für den vorliegenden Fall, in welchem die Winkel ϱ und ψ sehr klein sind, die Gestalt des Curvensystems mit Leichtigkeit erkennen. In der obigen Gleichung ist nämlich die erste Zeile nach $\sin\psi$ und $\sin\varrho$ von der zweiten Dimension, die zweite Zeile mindestens von der dritten, die übrigen Glieder von der vierten Dimension. Berücksichtigen wir behufs einer ersten Annäherung zunächst nur die Glieder zweiter Dimension, so erhalten wir die Gleichung

$$N^2 \sin^2\varrho - \mu^2 \cos^2\alpha \sin^2\psi = 0$$

oder

III. $$\sin^2\varrho = \frac{\mu^2 \cos^2\alpha \sin^2\psi}{\cos^2\alpha \sin^2\omega + \cos^2\alpha' \cos^2\omega}.$$

Dieselbe stellt, wenn ϱ statt $\sin\varrho$ gesetzt und als *Radius vector* betrachtet wird, ein System concentrischer ähnlicher Ellipsen vor, deren groſse Halbaxen in den Hauptschnitt des Prismas fallen und durch

$$\mu \sin\psi \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$$

ausgedrückt werden, während die kleinen Halbaxen ($= \mu \sin\psi$) senkrecht zum Hauptschnitt stehen.

Eine zweite Annäherung erhalten wir, indem wir in Gleichung (II) ϱ an die Stelle von $\sin\varrho$ und in dieser Gleichung $F_{(\varrho)} = 0$ $\varrho = \varrho' + \varepsilon$ setzen, unter ϱ' den *Radius vector* einer jener Ellipsen verstanden, und nun den kleinen Zuwachs ε derart bestimmen, daſs der Gleichung $F_{(\varrho)} = 0$ unter Berücksichtigung der Glieder dritter Dimension Genüge geschieht. Man erhält auf diese Weise

$$\varepsilon = -\frac{F(\varrho')}{\left[\frac{dF}{d\varrho}\right]_{\varrho'}},$$

oder

IV. $\varepsilon = -\frac{1}{4N^4} \cdot \sin 2\alpha' \sin^2\psi \cos\omega \, (\mu^2 \cos^2\alpha - N^2)$.

Denkt man sich nun das Ellipsensystem (III) entworfen, so erhält man daraus mit hinreichender Genauigkeit das gesuchte ovale Ringsystem, indem man die Radien Vectoren der Ellipsen um die Gröfse ε corrigirt. Da $\mu^2 \cos^2\alpha - N^2$ stets positiv ist, so ist ε negativ von $\omega = -\frac{1}{2}\pi$ bis $\omega = +\frac{1}{2}\pi$, positiv von $\omega = \frac{1}{2}\pi$ bis $\omega = \frac{3}{2}\pi$, und verschwindet für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ und $\omega = \frac{3}{2}\pi$. Jede ovale Curve geht daher durch die Endpunkte der kleinen Axe der zugehörigen Ellipse, und verläuft auf der Seite der geringeren Brechbarkeit innerhalb der Ellipse, nach der Seite der gröfseren Brechbarkeit tritt sie aus derselben heraus. Das ovale Ringsystem schlingt sich um den auf der gebrochenen Normale der Hinterfläche des Prismas gelegenen Mittelpunkt des Ellipsensystems, welcher, obgleich jetzt nicht mehr Mittelpunkt der Ringe selbst, für die gegenwärtige Erscheinung dieselbe Bedeutung beibehält wie früher der Mittelpunkt der Kreisringe, während die ovalen Curven in jeder Hinsicht die Rolle dieser Kreise übernehmen.

Es braucht kaum noch erwähnt zu werden, dafs die kreisförmigen Ringe als specielle Fälle in der vorliegenden allgemeineren Theorie enthalten sind. Wird z. B. der Winkel $a = 0$, d. h. hat man statt eines Prismas eine planparallele Platte, so zieht sich die Gleichung (II) auf

$$\sin^2\varrho - \mu^2 \sin^2\psi = 0$$

zurück. Für $\mu = 1$, d. h. wenn sich zwischen den unter beliebigem Winkel zu einander geneigten Flächen Luft befindet, ergiebt sich

$$\sin\varrho = \sin\psi$$

schon unmittelbar aus den Gleichungen (1.—4.).

V. *Ueber die Spannung flüssiger Lamellen;* *von Dr. Carl Sondhaufs.*

Die Gestaltung flüssiger Massen hängt entweder ausschliefslich oder wenigstens hauptsächlich von der gegenseitigen Anziehung der in der Oberfläche selbst und in deren unmittelbarer Nähe befindlichen Theilchen ab, so zwar die Oberfläche als eine ausgespannte Membrane angesehen werden kann, welche das Bestreben hat, sich möglichst zusammen zu ziehen, also immer das den Umständen entsprechende Minimum bildet. Nach dieser von Thomas Young aufgestellten Hypothese von der überall gleichmäfsigen Oberflächenspannung ist leicht begreiflich, dafs jede von äufseren Kräften unabhängige, also auch der Wirkung der Schwere entzogene Masse, deren Theile verschiebbar sind und deren Oberfläche ein Minimum wird, sich zu einer Kugel gestalten mufs, welche bei einem gegebenen Volumen unter allen Körpern die kleinste Oberfläche hat. Auch die frei schwebende Seifenblase gestaltet sich in ruhiger Luft zu einer Kugel, weil die in sich geschlossene flüssige Haut oder Lamelle durch einen von ihrer Spannung herrührenden überall gleichmäfsig auf die eingeschlossene Luft ausgeübten Druck die Expansionskraft derselben unter der Bedingung das Gleichgewicht hält, dafs sie selbst sich möglichst zusammenziehe. Aeufsere Kräfte, insbesondere die Schwere und die Adhäsion verändern die Oberfläche der Flüssigkeit und führen die bekannten Capillaritäts-Erscheinungen herbei, mit deren Studium sich die Mathematiker und Physiker seit dem Beginn der neueren Naturforschung bis in die neueste Zeit mit immer erneutem Interesse beschäftigt haben. Die Mathematiker, namentlich Laplace, Poisson und Gaufs haben die Theorie der Capillaritäts-Erscheinungen aus allgemeinen Prinzipien abgeleitet und sind, wenn auch auf verschie-

denen Wegen und unter modificirten Anschauungen, doch zu denselben Bedingungen des Gleichgewichts flüssiger Oberflächen gelangt, daſs dieselben mit angränzenden festen Flächen constante Winkel bilden und daſs der Druck p in einem ihrer Punkte durch die Gleichung

$$p = K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

bestimmt wird, wo R und R' die Krümmungsradien der Oberfläche in dem betreffenden Punkte sind, K und H zwei von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängige Constanten sind und das obere oder untere Vorzeichen des letzten Gliedes Geltung hat, je nachdem die Oberfläche convex oder concav ist. Die Zahl der Physiker, welche sich um die Erforschung der Capillaritäts-Erscheinungen verdient gemacht haben, ist sehr groſs. Das Wichtigste von der hierher gehörigen umfangreichen Literatur hat Quincke[1]) in den Einleitungen zu mehreren seiner ausgezeichneten Arbeiten mitgetheilt. Die Aufgabe der Physiker war, die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachzuweisen, die Capillaritäts-Constanten für die verschiedenen Flüssigkeiten zu bestimmen und die Mannichfaltigkeit im Auftreten der Erscheinung und ihren Zusammenhang mit anderen Kräften zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurde die Höhe gemessen, zu welcher die untersuchte Flüssigkeit sich in einer von ihr benetzten engen Röhre über ihr äuſseres Niveau erhebt, oder mit der Waage die Kraft bestimmt, welche erforderlich ist, um von der Oberfläche der Flüssigkeit eine von ihr benetzte Scheibe abzureiſsen. In neuerer Zeit benutzte Quincke bei seinen Arbeiten über die Capillaritäts-Erscheinungen die Methode der Tropfenmessung.

Ein anderes zur Bestimmung der Capillaritäts-Constanten noch nicht verwerthetes Hülfsmittel bieten die flüssi-

1) Poggendorff. Annalen der Physik und Chemie Bd. 105 p. 1. Auch C. Wolff in Pogg. Ann. Bd. 101 p. 550 und M. L. Frankenheim. Die Lehre von der Cohäsion. Breslau 1835.

gen Lamellen dar. Bei meinen Versuchen über die Darstellung und über das sonstige Verhalten der flüssigen Lamellen, wovon ich einen Theil in einer dem Programme der Realschule in Neisse vom Jahre 1873 beigegebenen Abhandlung beschrieben habe, bemühte ich mich auch, die Spannung der aus Seifenwasser, Saponinlösung und andern zur Lamellenbildung besonders geeigneten Flüssigkeiten gebildeten Häute zu bestimmen, und wendete dazu anfänglich ein sich wie von selbst darbietendes Verfahren an. Zwischen zwei senkrecht über einander gehaltenen kreisförmigen Drahtringen, wie sie Plateau zu seinen Versuchen über die Lamellen angewendet hat, von welchen der untere auf drei Füfsen steht, der obere mit seinem gabelförmigen Stiele an einem Stative befestigt ist, läfst sich bekanntlich aus der Plateau'schen Glycerin-Flüssigkeit eine Lamelle darstellen, welche, wenn die beiden Ringe gleich und parallel sind und keinen grofsen Abstand haben, von einer Cylinderfläche wenig verschieden ist. In Folge der Spannung der Lamelle haben die beiden Ringe das Bestreben, sich einander zu nähern. Man hat daher nur nöthig, den obern Ring mit seinem zu einem Haken umgebogenen Stiele an die eine Schale einer hydrostatischen Waage zu hängen und durch auf die andere Schale gelegte Gewichte das Gleichgewicht herzustellen, um das Gewicht, zu ermitteln, welches die Zugkraft der Lamelle aufhebt. Es mufs natürlich das eigene Gewicht des oberen Ringes berücksichtigt werden, und der untere Ring schwer genug seyn, damit er nicht von der Lamelle in die Höhe gehoben werde.

Auf diese Weise kann man die Spannung der cylinderischen Lamelle mit einer empfindlichen Waage sehr genau bestimmen, denn die Waage bleibt leicht beweglich und die Lamelle dehnt sich bei kleinen Schwankungen aus, wenn sich der obere Ring mit seiner Waagschale hebt, und zieht sich bei der entgegengesetzten Bewegung wieder zusammen. Grofse Schwankungen mufs man verhüten, weil dadurch die Lamelle zerstört wird. Ein kleines Ueber-

gewicht auf der einen oder der andern Seite bewirkt, dafs die beiden Ringe sich berühren oder dafs der obere Ring so weit gehoben und von dem unteren entfernt wird, dafs die Lamelle sich in der Mitte immer mehr zusammenzieht und zerreifst. Bei einiger Uebung und Geduld gelangt man dazu, das Gleichgewicht herzustellen und das die Spannung der Lamelle ausdrückende Gewicht zu bestimmen. Dividirt man dieses Gewicht durch die Peripherie des Ringes, so findet man die auf einer der Maafseinheit gleichen Strecke in der Lamelle vorhandene Spannung, welche doppelt so grofs ist als die Spannung in einer der beiden freien Oberflächen derselben. Ist α diese auf die Längeneinheit, etwa ein Millimeter, bezogene Oberflächenspannung, R der Radius der Ringe, P das Gewicht, welches der Lamelle das Gleichgewicht hält, so ist

$$\frac{P}{2 R \pi} = 2 \alpha \text{ und } \alpha = \frac{P}{4 R \pi}.$$

Diese Gröfse α ist die Hälfte von der in der Fundamentalgleichung der Capillarität enthaltenen Constanten H und ist dieselbe Kraft, welche in der capillaren Oberfläche der in einem Haarröhrchen gehobenen Flüssigkeit wirkt und dem Gewichte der gehobenen flüssigen Säule das Gleichgewicht hält.

Ist r der Radius des Haarröhrchens, h die Höhe der in demselben gehobenen flüssigen Säule und σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ergiebt sich die Gleichung:

$$2 r \pi \alpha = r^2 \pi h \sigma \text{ und } h r = \frac{2 \alpha}{\sigma};$$

$h r$ ist die Höhe, bis zu welcher die Flüssigkeit sich in einem von ihr benetzten Röhrchen von einem Millimeter inneren Radius über die äufsere horizontale Oberfläche erhebt. Durch die Verbindung der letzten Gleichung mit den vorhergehenden gelangt man dazu, die Höhe der in einem engen Röhrchen mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius 1 oder von einem beliebigen Radius gehobenen flüssigen Säule durch die mit der Waage bestimmte Span-

nung einer aus derselben Flüssigkeit hergestellten Lamelle auszudrücken. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$hr = \frac{P}{2 R \pi \sigma} \text{ und } h = \frac{P}{2 r R \pi \sigma}.$$

Man kann also die Bestimmung der Capillaritäts-Constanten aus der Lamellen-Spannung durch die Beobachtung der Höhe controliren, bis zu welcher dieselbe Flüssigkeit in einem Haarröhrchen emporsteigt.

Wegen der Dauerhaftigkeit der aus der Plateau'schen Glycerin-Flüssigkeit dargestellten Lamellen ist es nicht schwer, mit denselben das beschriebene Verfahren auszuführen und die Capillaritäts-Constante mit Genauigkeit zu bestimmen, denn die zwischen den beiden Ringen ausgespannte Lamelle hält lange genug aus, um die Wägung mit Bequemlichkeit auszuführen. Hat man einige Uebung in den erforderlichen Handgriffen erworben, so kann man dasselbe Verfahren auch noch auf einige andere zur Lamellenbildung besonders geeignete Flüssigkeiten anwenden. Ich habe z. B. auf diese Weise die Capillaritäts-Constante von Seifenwasser, Saponinlösung und von dem Decoct der Hopfenblüthen ohne grofsen Zeitaufwand bestimmt. Die Anzahl der Flüssigkeiten, aus welchen sich zwischen den Ringen eine Lamelle von der erforderlichen Dauerhaftigkeit darstellen läfst, ist aber doch verhältnifsmäfsig nur sehr klein, und es würde mein Verfahren weiter keine Bedeutung haben, wenn nicht ein glücklicher Umstand gestattete, dasselbe zu verallgemeinern. Hierzu führt eine Beobachtung, welche ich schon in meiner oben erwähnten Abhandlung über die flüssigen Lamellen mitgetheilt habe. Wenn man nämlich einen mit einem gabelförmigen Griff versehenen Ring in eine in einer flachen Schale befindliche Flüssigkeit eintaucht und denselben, nachdem er benetzt worden ist, wieder langsam und gleichmäfsig in die Höhe hebt, so erhebt sich an der Peripherie des Ringes adhärirend eine dünne flüssige Haut, welche zwischen dem horizontal gehaltenen Ringe und der Oberfläche der Flüs-

sigkeit ausgespannt bleibt und durch ihre Spannung den Ring nach unten zieht. Da hier der untere Ring durch die Oberfläche der Flüssigkeit ersetzt ist, und die Lamelle sich wie von selbst bildet, so ist das Verfahren aufserordentlich vereinfacht und auf eine sehr grofse Zahl von Flüssigkeiten, ich möchte fast behaupten, auf alle Flüssigkeiten[1]) anwendbar. Man hängt den Ring mit dem an seinem Stiele angebrachten an die eine Wagschale, gleicht sein Gewicht aus, schiebt das flache Gefäfs mit der zu untersuchenden Flüssigkeit unter den Ring, taucht denselben ein und legt auf die andere Wagschale allmälig so viel Gewichte, dafs der Ring in die Höhe gehoben und von der Spannung der entstandenen Lamelle im Gleichgewichte gehalten wird. Da alle Flüssigkeiten, auf welche ich bis jetzt meine Versuche ausgedehnt habe, namentlich auch Wasser, Alkohol, Schwefeläther und sogar Quecksilber mit von ihnen benetzten Ringen Lamellen bilden, so scheint auf den ersten Blick hier die Möglichkeit gegeben zu seyn, die Capillaritäts-Constanten von allen Flüssigkeiten auf die bequemste Weise zu bestimmen. Es tritt jedoch eine Gränze für die Anwendbarkeit der Methode defshalb ein, weil die mit dem Ringe gehobene Lamelle bei manchen Flüssigkeiten nur von sehr kurzer Dauer ist, und daher die Zeit fehlt, um eine genaue Gewichtsbestimmung für die Lamellen-Spannung auszuführen. Substituirt man dafür das Gewicht, welches erforderlich ist, um den an der Oberfläche der Flüssigkeit haftenden und mit derselben einen Meniskus bildenden Ring abzureifsen, so erhält man für die Capillaritäts-Constante nur genäherte Werthe, welche immer zu grofs sind. Das zum Abreifsen

1) Marangoni in seiner Abhandlnng: „Ueber die Ausbreitung der Tropfen einer Flüssigkeit auf der Oberfläche einer andern" bemerkt Pogg. Ann. Bd. 143 p. 346 zur Erklärung einer andern Erscheinung, dafs „weder der Alkohol noch der Aether die Fähigkeit haben, Lamellen zu bilden." Dieser Ausspruch ist dahin zu modificiren, dafs die aus diesen Flüssigkeiten gebildeten Lamellen nur klein und von kurzer Dauer sind. Vergl. meine Angaben in der Abhandlung: „Ueber flüssige Lamellen" unter No. 23 und 24.

des Ringes erforderliche Uebergewicht ist nämlich immer gröfser als dasjenige, welches der Spannung der entwickelten dünnen Lamelle das Gleichgewicht hält, wie man bei der Beobachtung von Flüssigkeiten, welche eine Lamelle von hinreichender Dauerhaftigkeit bilden, findet und auch ersieht, wenn man bei Flüssigkeiten, deren Capillaritäts-Constanten nach andern Methoden genau bestimmt sind, die nach dem in Rede stehenden Verfahren gefundenen Werthe mit den genauen vergleicht. Läfst sich die Capillaritäts-Constante einer Flüssigkeit überhaupt nicht auf andere Weise bestimmen, oder nur auf Umwegen und mit grofsen Umständen ermitteln, so kann man sich wohl bei einem Verfahren beruhigen, welches ziemlich genäherte Werthe leicht und auf dem kürzesten Wege liefert.

Auch wenn die zwischen dem an der einen Waagschale hängenden Ringe und der Oberfläche der Flüssigkeit ausgespannte Lamelle so dauerhaft ist, dafs man die Waage durch aufgelegte Gewichte in's Gleichgewicht bringen kann, so ist die Bestimmung der Lamellen-Spannung doch noch mit einem Fehler behaftet, weil die Lamelle sich zusammenzieht und die Kreislinie, in welcher sie mit der Oberfläche der Flüssigkeit zusammenhängt, um so kleiner wird, je höher der Ring gehoben wird. Die Umdrehungsfläche der Lamelle ist also nicht mehr einem geraden Cylinder, sondern einem Kegelstumpfe ähnlich und das Gewicht, welches die Waage im Gleichgewicht hält, mifst nicht mehr die in der Richtung einer Seitenlinie des Kegelstumpfes wirkende Spannung der Lamelle, sondern nur die senkrechte Componente derselben. Die Spannung der Lamelle und die sich aus derselben ergebende Capillaritäts-Constante der Flüssigkeit ist daher etwas gröfser, als nach den obigen Gleichungen aus dem Gewicht P gefunden wird. Man mufs daher, damit der Fehler klein bleibe, den Ring nur so weit aus der Flüssigkeit herausheben, dafs die dünne Lamelle sich vollständig entwickelt. Der untere Kreis, in welchem die Lamelle mit der Flüssigkeit zusammenhängt, ist dann nur wenig kleiner als der Ring

und der senkrecht nach oben wirkende Zug der Waage kann dann von der Gesammt-Spannung der fast cylindrischen niedrigen Lamelle nur wenig verschieden seyn. Der Fehler wird erheblich, wenn man bei der Beobachtung kleinere Ringe anwendet, und würde, wenn die Anwendung von gröſseren Ringen nicht möglich ist, eine Correction nothwendig seyn, zu deren Ermittlung man den Neigungswinkel der Lamelle gegen die Oberfläche der Flüssigkeit bestimmen müſste. Da mir die zu solchen Messungen erforderlichen Einrichtungen nicht zu Hand sind, so habe ich von einer solchen Correctur abgesehen und die allerdings oft unbequeme Anwendung von gröſseren Ringen vorgezogen.

Ich habe das beschriebene Verfahren auf eine ziemlich bedeutende Anzahl von Flüssigkeiten angewendet und dabei Resultate erhalten, welche mit den nach andern Methoden ausgeführten Bestimmungen der Capillaritäts-Constante so gut übereinstimmen, als man nur erwarten kann. Die von mir bei meinen Beobachtungen angewendete Waage ist für gröſsere Belastungen eingerichtet und mit ziemlich schweren, an soliden Messingbügeln hängenden Schalen versehen und daher nicht leicht beweglich, aber doch soweit empfindlich, daſs ich mit ihr bei der vorhandenen geringen Belastung noch bis auf ein halbes Centigramm genau wägen kann. Sie ist an einer innerhalb der auf einem soliden Gewichtskasten stehenden Säule befindlichen und durch ein Getriebe leicht auf und zu bewegenden Zahnstange so aufgehangen, daſs störende Schwankungen leicht vermieden werden können. Die bei den Versuchen angewendeten Drahtringe sind dieselben, welche ich schon bei meinen früheren Versuchen über die flüssigen Lamellen benutzt habe. Sie sind mit einem Bügel versehen, der an zwei diametralen Stellen des Ringes festsitzt und an welchen in der Mitte ein senkrechter Draht gelöthet ist. Das Ende dieses als Griff dienenden Drahtes wurde zu einem Haken umgebogen und damit der Drahtring an den Haken der einen Waagschale gehängt. Auf die Construction dieser

Apparate mufs einige Sorgfalt verwendet werden, damit der kreisförmige Ring sich in eine horizontale Ebene einstelle und sein Mittelpunkt sich senkrecht unter dem Aufhängepunkte befinde; denn wenn der Ring nicht richtig hängt, so bildet sich unter demselben die aus der Flüssigkeit herausgehobene Lamelle nicht gleichmäfsig und zerreifst eher und bei geringerer Belastung der Waage. Die gröfsern meiner Drahtringe sind aus Eisendraht, die kleinern aus Platindraht gefertigt und zwar sind die letztern nicht gelöthet, sondern geschweifst, so dafs sie auch zur Untersuchung von Säuren benutzt und durch Ausglühen leicht gereinigt werden konnten. Zur Bestimmung der Capillaritäts-Constante des Quecksilbers habe ich einige kleine Drahtringe benutzt, welche ich aus sehr feinem versilberten Kupferdrahte construirt habe.

1. *Spannung der Lamelle aus Seifenwasser.* Ich habe anfänglich eine Seifenflüssigkeit angewendet, welche ich zu andern Versuchen über die Bildung und das Verhalten der Seifenblasen benutzt und in der Weise bereitete, dafs ich Marseiller Seife im Verhältnisse 1 : 40 in destillirtem Wasser ohne Anwendung von Wärme auflöste und die Lösung bei einer Temperatur von ungefähr 3 bis 4° C. filtrirte. Dadurch wurde ein Theil der ölsauren Natronsalze ausgeschieden und blieb auf dem Filtrum zurück. Ich suchte dadurch die Flüssigkeit homogener und dauerhafter zu machen, und es schien in der That, als wenn diese Lösung auch ohne Zusatz von Glycerin geeigneter wäre zur Erzeugung von grofsen und dauerhaften Blasen und sich auch weniger rasch in ihren Eigenschaften veränderte.

Die Lamellen-Spannung dieser Flüssigkeit läfst sich nach der zuerst beschriebenen Methode mit Hülfe von zwei Ringen bequem messen. Auf einen auf drei Füfsen stehenden Ring wurde eine Blase gesetzt, der obere an der Waagschale hängende Ring, der vorher befeuchtet worden war, wurde herabgelassen, bis er die Blase von oben umfassend berührte; hierauf wurde der von den Ringen be-

grenzte obere und untere Theil der Blase durch Berühren zerstört und die Spannung der aus dem mittlern Theile zwischen den Ringen sich bildenden cylindrischen Lamelle durch die Gewichte, welche das Gleichgewicht der Waage herbeiführten, gemessen. Man kann die cylindrische Lamelle zwischen den beiden Ringen auch auf folgende einfache Weise herstellen: Man erzeugt in jedem der beiden Ringe eine ebene Lamelle, senkt dann den an der Waagschale hängenden Ring herab, bis er den unter ihm stehenden Ring berührt. In Folge dieser Berührung haften die beiden Lamellen an einander und bilden, wenn man den obern Ring wieder langsam hebt, zwei in einem gemeinschaftlichen Kreise zusammenhängende, abgestumpfte Kegelmäntel, welche sich, wenn man jenen gemeinschaftlichen Kreis durch eine leichte Berührung zerstört, mit großer Geschwindigkeit zu einer zwischen den Ringen ausgespannten Lamelle umgestalten. Die Lamelle hält lange genug aus, um durch auf die Wagschalen gelegte Gewichte die Spannung in's Gleichgewicht zu setzen, und man kann überdies durch vorsichtigtes Heben und Senken der ganzen Waage der Lamelle die gewünschte Höhe geben.

Ich halte es für nützlich, für zwei auf diese Weise angestellte Versuche die Dimensionen des Apparats und die Resultate der Beobachtung speciell mitzutheilen. Bei dem einen Versuche hatten beide Ringe einen Durchmesser von 6,8 Centimeter, der obere an der einen Waagschale hängende Ring wog 7,83 Gramm uud mufste auf die andere Schale ein Gewicht von 9,03 Gramm gelegt werden, um der Lamellen-Spannung das Gleichgewicht zu halten. Die Entfernung der beiden Ringe von einander, also die Höhe der Lamelle, betrug 6 bis 8 Millimeter und wurde das Gleichgewicht nicht gestört, wenn die Waage vorsichtig einige Millimeter gehoben oder gesenkt wurde. Die Spannung der ganzen Lamelle wurde durch das Gegengewicht nicht gestört, wenn die Waage vorsichtig einige Millimeter gehoben oder gesenkt wurde. Die Spannung der ganzen Lamelle wurde durch das Gegengewicht von 1,20 Gram-

men im Gleichgewicht gehalten. Dividirt man dieses Spannungsgewicht durch die Peripherie des Ringes, so ergiebt sich die Spannung für die Strecke eines Centimeter zu 0,0562 Gramm und für ein Millimeter zu 5,62 Milligramm. Die Hälfte hiervon oder die Spannung auf ein Millimeter in der einen Oberfläche ergiebt die Capillaritäts-Constante dieser Seifenlösung:

$$\alpha_1 = 2{,}81 \text{ Milligramm.}$$

Bei dem andern mit derselben Flüssigkeit unmittelbar darauf angestellten Versuche hatten die Ringe einen Durchmesser von 10 Centimetern, der obere Ring wog 9,98 Gramm und war das Auflegen von 11,78 Grammen erforderlich, um das Gleichgewicht herzustellen. Die Spannung der Lamelle war demnach gleich 1,80 Gr., wovon auf ein Centimeter 0,0573 Gr. und auf ein Millimeter 5,73 Milligramm kamen. Die Capillaritäts-Constante der Flüssigkeit ergiebt sich daher

$$\alpha_2 = 2{,}86 \text{ Milligramm.}$$

An demselben Tage, nämlich am 8. December 1872, habe ich die Oberflächen-Spannung derselben Flüssigkeit auch nach der beschriebenen anderen einfacheren Methode bestimmt, nach welcher die an der Waagschale hängenden Ringe in die in einer flachen Schüssel befindliche Flüssigkeit eingetaucht werden und die Spannung der mit den Ringen in die Höhe gehobenen Lamelle durch Gewichte gemessen wird. Es wurden vier eiserne Ringe bei diesen Beobachtungen angewendet, von welchen zwei die bei den soeben mitgetheilten Versuchen benutzten Ringe von 6,8 und 10 Centimeter Durchmesser waren, die beiden anderen einen noch größeren Durchmesser von 15 resp. 20 Centimetern hatten. Die Uebergewichte, welche der Spannung der vier Lamellen das Gleichgewicht hielten, waren von dem Versuche mit dem kleinsten Ringe angefangen, resp. 1,14 Gr., 1,63 Gr., 2,63 Gr. und 3,55 Gr., woraus sich, wenn man diese Gewichte durch die Peripherie der be-

treffenden Ringe dividirt, die Spannung für ein Millimeter der bezüglichen Lamellen ergiebt:

5,34 Mgr., 5,18 Mgr., 5,58 Mgr. und 5,65 Mgr.

und folgende Werthe für die Capillaritäts-Constante der Flüssigkeit gefunden werden:

$\alpha_1 = 2{,}67$ Mgr., $\alpha_2 = 2{,}59$ Mgr., $\alpha_3 = 2{,}79$ Mgr. und $\alpha_4 = 2{,}82$ Mgr.

Die beiden ersten mit Hülfe der kleineren Ringe erhaltenen Werthe der Capillaritäts-Constante sind, wie es zu erwarten war, wegen der Zusammenziehung der Lamelle erheblich kleiner als die vorhin bei Anwendung der Doppelringe gefundenen, während die mit den grofsen Ringen ausgeführte Bestimmung damit fast übereinstimmt. Ich mufs übrigens bemerken, dafs diese Versuche fast die ersten waren, welche ich zur Bestimmung der Lamellen-Spannung ausführte, und dafs ich damals die an der Waage hängenden Ringe höher aus der Flüssigkeit gehoben habe, als zweckmäfsig ist.

J. Plateau[1]) giebt die Spannung einer Lamelle aus einer Lösung von Marseiller Seife in Wasser im Verhältnisse 1 : 40 auf die Länge eines Millimeters bezogen zu 5,64 Mgr. an, und in der von Marangoni[2]) mitgetheilten Tabelle über die Capillaritäts-Constante einiger Flüssigkeiten sind die Werthe derselben für Seifenwasser nach seinen eigenen Versuchen und nach Mensbrugghe und Lüdtge resp. gleich 2,8, 2,83 und 2,8 angegeben, womit die Resultate meiner Messung der Lamellen-Spannung übereinstimmen.

Marangoni macht an dieser Stelle auch folgende interessante Bemerkung: „Es ist ein zu erwähnender Umstand, dafs diese Seifenflüssigkeit im Capillarrohr dieselbe Höhe, also auch dieselbe Oberflächen-Spannung zeigt, gleichviel, ob in derselben eine grofse oder auch eine nur

1) Poggendorff's Ann. Bd. 141, pag. 55.
2) Poggendorff's Ann. Bd. 143, pag. 342.

sehr kleine Menge Seife enthalten ist.“ Meine Beobachtungen bestätigen die Bemerkung Marangoni's fast in ihrem ganzen Umfange. Ich habe nämlich, um den Einfluſs des Seifengehalts der Lösung auf die Oberflächen-Spannung nach meiner Methode zu ermitteln, eine Anzahl von Flüssigkeiten bereitet, in welchen eine bestimmte Gewichtsmenge von Marseiller Seife aufgelöst war. Das Verhältniſs der Seife zum Wasser war bei diesen Lösungen: 1 : 50, 1 : 100, 1 : 200, 1 : 300, 1 : 400, 1 : 500, 1 : 600, 1 : 1000 und 1 : 3000 und wurde die Lamellen-Spannung derselben nach dem einfachen Verfahren mit Ringen von verschiedener Gröſse bestimmt. Das Ergebniſs dieser bei einer Temperatur von ungefähr 18° bis 20° C. angestellten Beobachtungen war, daſs die Oberflächen-Spannung sämmtlicher Flüssigkeiten fast gleich war, denn die für die auf ein Millimeter kommende Lamellen-Spannung gefundenen Werthe hielten sich bis auf drei innerhalb der Gränzen von 5,10 und 5,76 Milligramm. Die Capillaritäts-Constante der verschiedensten Lösungen von Marseiller Seife liegt also zwischen 2,55 und 2,88 Milligrammen. Die drei Beobachtungen, welche die auſserhalb der bezeichneten Gränzen liegenden Resultate geliefert haben, sind zu verschiedener Zeit, nämlich am 8. und 27. December 1872 und am 24. December 1875 mit Lösungen im Verhältniſs 1 : 40, 1 : 300 und 1 : 100 und unter Anwendung von kleineren Ringen von 3,8 und 4,6 Centimeter Durchmesser ausgeführt worden und haben die Lamellen-Spannung von resp. 4,77, 4,65 und 4,98 Milligrammen ergeben. Die Abweichung von dem Resultate der übrigen Beobachtungen ist zwar nicht sehr groſs, ich vermuthe aber doch, daſs dieselbe durch irgend einen störenden Umstand, z. B. eine Unregelmäſsigkeit beim Aufhängen des Ringes an der Waagschale oder durch eine Modification der die Lamelle bildenden Flüssigkeit herrührt.

Die Lösungen der Seife sind nämlich nach meiner Ansicht nicht als homogene Flüssigkeiten anzusehen, sondern bestehen aus verschiedenen öl- und fettsauren Natron-

Salzen, welche in der flüssigen Gesammt-Masse ununterscheidbar durcheinander gemischt sind, in der Lamelle aber sich sondern und nach ihrem specifischen Gewichte ordnen. Da die verschiedenen Bestandtheile der Flüssigkeit auch eine etwas verschiedene Cohäsion haben, so läſst sich das nicht immer gleiche Verhalten der aus derselben Flüssigkeit dargestellten Lamellen in Beziehung auf ihre Dauerhaftigkeit und Spannkraft durch die Annahme erklären, daſs bei der Erzeugung der Lamelle nach der Laune des Zufalls mehr oder weniger geeignete Bestandtheile in dieselbe übergegangen sind. Das Seifenwasser ändert sich auch bekanntlich und verliert nach einiger Zeit seine Fähighigkeit, gröſsere Blasen und Lamellen zu bilden; namentlich ist die Ausscheidung desjenigen Stoffes, welcher die bekannten schwarzen Flecke bildet, die Ursache des früheren Zerspringens der in freier Luft dargestellten Blasen und Lamellen.

Nach meiner Ansicht ist die Einwirkung des Sauerstoffs der Luft die hauptsächlichste Ursache der Veränderung des Seifenwassers. Folgender Versuch scheint diese Ansicht zu bestätigen. Man kann bekanntlich in einer verstopften Flasche, welche etwa zum dritten oder vierten Theile mit Seifenwasser gefüllt ist, durch einen geschickten Umschwung Lamellen darstellen, welche die aufrecht gestellte Flasche in dem lufterfüllten Raume quer durchsetzen und vor äuſseren Störungen geschützt, viel länger ausdauern als in freier Luft befindliche Lamellen. Eine zu diesem Versuche geeignete Medicin-Flasche füllte ich am 1. November 1871 mit einer Lösung von Marseiller Seifen im Verhältniſs 1 : 40, setzte dann die umgekehrte Flasche mit ihrem Halse in eine mit derselben Flüssigkeit gefüllte flache Schale und lieſs durch ein passend gebogenes Glasrohr aus einem Gasometer soviel Wasserstoff in die Flasche eintreten, daſs in ihr nur die zur Erzeugung der Lamelle nöthige Quantität Flüssigkeit zurück blieb. Hierauf wurde die Flasche unter der Flüssigkeit mit einem gut schlieſsenden Korke verstopft und durch Leinmehl-

kleister, womit der Kork überzogen wurde, ein vollständig hermetischer Verschlufs bewirkt. Diese Flasche ist seit jener Zeit in der umgekehrten Stellung aufbewahrt worden und wird von Zeit zu Zeit in Beziehung auf die Lamellenbildung untersucht. Um noch einen Gegenversuch zu machen, füllte ich zehn Tage später eine zweite Flasche mit derselben Seifenlösung und behandelte sie bis auf die Füllung mit Gas, wozu ich Sauerstoff verwendete, ebenso wie die erste. Anfänglich verhielt sich die Flüssigkeit in beiden Flaschen in Beziehung auf Schaum- und Lamellenbildung vollständig gleich; dann aber zeigte die Flasche, welche Sauerstoff enthält, allmälig immer mehr ein verschiedenes Verhalten, indem Schaum und Lamellen in ihr immer weniger gut zu erzeugen waren, während die Flüssigkeit in der Wasserstoff enthaltenden Flasche jetzt zur Erzeugung von Schaum und Lamellen noch ebenso geeignet ist, wie vor vier Jahren. Die zu derselben Zeit bereiteten verschiedenen Seifenlösungen und Glycerin-Flüssigkeiten sind sämmtlich längst verdorben.

Wegen der verschiedenen Zusammensetzung und der Veränderlichkeit der Seifenlösungen ist eine gröfsere Uebereinstimmung der Resultate, als meine bisherigen Beobachtungen gezeigt haben, kaum zu erwarten. Es dürfen auch nur die Beobachtungen verglichen und zusammengefafst werden, welche aus derselben Seife frisch bereitet worden sind. Ich beschränke mich daher auf die Mittheilung der Beobachtungen, welche ich über die Lamellen-Spannung von drei Lösungen von alter, ausgetrockneter Marseiller Seife in destillirtem Wasser in der Zeit vom 24. bis 27. December v. J. angestellt habe, und bemerke, dafs ich gerade diese Beobachtungen mittheile, weil ich die Capillaritäts-Constante derselben Flüssigkeiten auch gleichzeitig dadurch bestimmt habe, dafs ich die Höhe maafs, welche sie in einem capillaren Röhrchen über dem äufseren Niveau erreichten. Bei der Bereitung der drei Lösungen beabsichtigte ich die Verhältnisse der Seife zum Wasser 1:100, 1 : 1000 und 1 : 3000 zu erhalten, doch mögen die Lösun-

gen wohl etwas schwächer gerathen seyn, weil ich die erste Lösung, aus welcher ich die beiden anderen durch Zusatz des erforderlichen Wassers bereitete, filtriren mufste. Die schwächste Lösung bildete unter einem aus ihr emporgehobenen Ringe noch das zur genauen Bestimmung der Spannung nothwendige dünne Häutchen, erzeugte aber beim Schütteln nur wenig Schaum. Die Versuche wurden mit drei Ringen aus Platindraht von 3,15 Cm., 4,6 Cm. und 6,1 Cm. Durchmesser bei einer Zimmer-Temperatur von 20 bis 22° C. angestellt.

Bei der Untersuchung der ersten Lösung, deren Seifengehalt 1 : 100 war, ergab sich die den drei Ringen entsprechende Lamellen-Spannung gleich 0,53 Gr., 0,72 Gr. und 1,05 Gr., woraus die Spannung für die Strecke eines Millimeter berechnet wurde resp. 5,35 Mgr., 4,98 Mgr. und 5,48 Mgr. Das Mittel dieser drei Beobachtungen ist 5,27 Mgr. und die Capillaritäts-Constante ist gleich 2,63 Mgr.

Die zweite Lösung (1 : 1000) zeigte mit denselben Ringen eine Lamellen-Spannung von resp. 0,52 Gr., 0,75 Gr. und 1,02 Gr., woraus sich ihre Millimeter-Spannung zu resp. 5,25 Mgr., 5,19 Mgr. und 5,32 Mgr. ergab. Das Mittel ist 5,25 Mgr. und die Capillaritäts-Constante 2,62 Mgr.

Bei der dritten Lösung (1 : 3000) waren die entsprechenden Werthe 0,55 Gr., 0,77 Gr. und 1,06 Gr. für die Spannung der ganzen Lamelle und 5,56 Mgr., 5,33 Mgr. und 5,53 Mgr. für jedes Millimeter. Das Mittel davon ist 5,47 Mgr. und 2,73 Mgr. die Capillaritäts-Constante.

Die beiden ersten Lösungen haben also eine fast gleiche Oberflächen-Spannung und auch bei der dritten schwächsten Lösung ist dieselbe nur unbedeutend gröfser.

Ich glaube übrigens bemerken zu müssen, dafs eine so grofse Uebereinstimmung in der Oberflächen-Spannung der Seifenlösungen sich bei meinen Versuchen nicht immer ergeben hat. Bei einer am 26. und 27. December 1872 mit gleicher Sorgfalt angestellten Untersuchung von zwei

nach den Verhältnissen 1 : 100 und 1 : 1000 bereiteten Lösungen von Marseiller Seife ergaben sich z. B. die resp. Werthe von 5,15 Mgr. und 5,58 Mgr. für die Millimeter-Spannung, wonach die Capillaritäts-Constanten der beiden Lösungen 2,57 Mgr. und 2,79 Mgr. waren.

Obgleich die oben S. 267 angeführten Bestimmungen der Lamellen-Spannung und der Capillaritäts-Constante des Seifenwassers, welche wir Plateau, Marangoni, Mensbrugghe und Lüdtge verdanken, mit den von mir erhaltenen Resultaten hinreichend übereinstimmen, so wünschte ich doch für einige der untersuchten Flüssigkeiten selbst die Capillaritäts-Constante durch die Messung ihrer Capillarhöhe in engen Röhrchen zu bestimmen. Ich wählte dazu die drei oben besprochenen Lösungen von Marseiller Seife im Verhältnifs 1:100, 1:1000 und 1:3000.

Es fanden sich glücklicher Weise unter dem Röhrenvorrathe, welcher noch von meinen vor vielen Jahren über den Einflufs der Wärme auf die Capillarität der Flüssigkeiten angestellten Versuchen herrührt, einige geeignete Röhren, welche beim Calibriren mittelst eingesogener Quecksilbertropfen sich als fast cylindrisch erwiesen und einen kreisförmigen Querschnitt hatten. Nachdem die Weite dieser Röhren aus dem Gewichte und der Länge der sie füllenden Quecksilbertropfen bestimmt worden war, wurde ein Strom Wasser und Alkohol und zuletzt ein Strom von der zu untersuchenden Flüssigkeit durch dieselben getrieben, um sie zu reinigen. Die auf diese Weise vorbereiteten Röhren wurden mittelst einer Klemmschraube an den verschiebbaren Arm eines geeigneten Stativ's befestigt und so weit herab gestellt, dafs sie in die zu untersuchende Flüssigkeit, die sich in einem offenen mit senkrechten und ebenen Wänden versehenen Gefäfse befand, eintauchten. Es zeigte sich, dafs die Seifenlösung in den engen Röhrchen rasch in die Höhe stieg und sich in denselben, nachdem die innere Wand benetzt war, ziemlich leicht auf und ab bewegte.

Zum Messen der Höhe der Flüssigkeit in dem Haar-

röhrchen über dem äufseren Niveau benutzte ich einen verticalen Maafsstab, welcher mir schon bei meinen akustischen Versuchen gedient hat. Derselbe ist in Pariser Linien getheilt und mit einem durch ein Getriebe auf und ab zu bewegenden Nonius versehen, mit welchem man die Einstellung bis auf Zehntel-Linien genau ablesen kann. Ich befestigte an dem Nonius ein kleines, nur etwa 5 Centimeter langes Diopter-Lineal, dessen Objectiv-Diopter mit einem horizontalen Faden versehen war, und visirte durch die beiden Diopter abwechselnd nach dem Niveau der Flüssigkeit in dem weiten Gefäfse und nach dem kleinen Meniscus der in dem Haarröhrchen emporgestiegenen flüssigen Säule. Die Differenz der abgelesenen Höhen des Nonius über dem Anfangspunkte des Maafsstabes ergab die Höhe der in dem Röhrchen gehobenen flüssigen Säule in Pariser Linien, welche auf Millimeter reducirt wurden.

Auf eine Auseinandersetzung über die bei solchen Versuchen sich darbietenden Schwierigkeiten und die dabei nothwendigen Vorsichtsmaafsregeln glaube ich hier nicht eingehen zu sollen, und gehe ich daher sofort zu der Mittheilung der Ergebnisse mit der Bemerkung über, dafs ich die bei früheren Versuchen über die Capillarität erlangte Uebung und Erfahrung benutzt habe, um eine der Einrichtung des Apparats entsprechende Genauigkeit zu erzielen. Da die unmittelbar mit dem Maafsstabe ausgeführten Messungen nur bis auf ein Zehntel einer Pariser Linie genau sind, so ist die erste Decimalstelle der in Millimeter ausgedrückten Höhen nur annähernd richtig und die zweiten Decimalstellen sind nur als Rechnungsresultate anzusehen.

Die Capillarhöhe der ersten Lösung von Marseiller Seife (1:100) wurde mit zwei Glasröhren bestimmt, deren kreisförmige Querschnitte Radien von resp. $0{,}2342^{mm}$ und $0{,}4177^{mm}$ hatten. Die Höhe, welche die Flüssigkeit in dem ersten Röhrchen über dem äufseren Niveau erreichte, war $23{,}2^{mm}$; in dem zweiten Röhrchen war dieselbe $12{,}6^{mm}$. Multiplicirt man diese Höhen mit den Radien, so ergiebt

sich für die erste Röhre $hr = 5{,}43^{mm}$, für die zweite $h_1 r_1 = 5{,}34^{mm}$ als die Höhe, welche die Flüssigkeit in einer Röhre von einem Millimeter-Radius über dem äufseren Niveau emporsteigt. Das Mittel aus beiden Beobachtungen ist 5,38. Da das specifische Gewicht der Seifenlösung nur sehr wenig von dem des Wassers verschieden ist, so müfste dieser Werth 5,38 mit dem oben für die Lamellen-Spannung derselben Flüssigkeit 5,27 übereinstimmen, wie die oben S. 271 ermittelte Gleichung $hr = \frac{2\alpha}{\sigma}$ zeigt, wenn $\sigma = 1$ gesetzt wird. $\frac{hr}{2} = 2{,}69$ ist mit dem oben gefundenen Werthe der Capillaritäts-Constante $\alpha = 2{,}63$ zu vergleichen. Die Abweichung ist allerdings nicht grofs, veranlafst mich jedoch zu der Bemerkung, dafs der aus der Lamellen-Spannung berechnete Werth doch wohl der weniger genaue seyn dürfte, weil die Zusammenziehung der Lamelle doch wohl nicht ganz vermieden worden ist. Auch folgender Umstand mufs in Betracht gezogen werden. Der Durchmesser der aus Platindraht von nicht ganz einem Millimeter Dicke gefertigten Drahtringe ist so bestimmt worden, dafs zwischen dem Durchmesser des inneren und äufseren Umfanges die arithmetische Mitte genommen wurde. Die an dem Ringe hängende Lamelle befindet sich wegen der Zusammenziehung nicht senkrecht unter der Mitte des Drahtes, sondern zieht sich nach dem inneren Rande desselben. Der Divisor $2r\pi$ bei der Berechnung der Lamellen-Spannung für ein Millimeter ist daher ohne Zweifel etwas zu grofs gewesen. Dieser Divisor hat aber auf das Resultat einen sehr erheblichen Einflufs. Nimmt man statt der angegebenen Gröfse des Durchmessers der Ringe von $3{,}15^{cm}$, $4{,}6^{cm}$ und $6{,}1^{cm}$ Werthe an, die um ein Millimeter kleiner sind, und führt damit die Rechnung aus, so ergeben sich für die Millimeter-Spannung der Lamellen die Werthe 5,09 Mgr., 5,57 Mgr. und 5,53 Mgr., deren Mittel 5,40 Mgr. ist.

Die Messung der Höhe, welche die beiden anderen Lösungen von Marseiller Seife in den Haarröhrchen über

dem äuſseren Niveau erreichten, hat noch abweichendere Resultate ergeben.

Die zweite Lösung (1 : 1000) hatte in dem engeren Röhrchen ($r = 0{,}2342^{mm}$) die Höhe $h = 24{,}1^{mm}$, in dem anderen ($r_1 = 0{,}4177^{mm}$) die Höhe $h_1 = 13{,}5^{mm}$. Hieraus ergiebt sich für beide Beobachtungen die Capillarhöhe der Flüssigkeit in einem Röhrchen von einem inneren Radius gleich einem Millimeter $hr = 5{,}64^{mm}$.

Die schwächste Lösung (1 : 3000) erreichte in dem engeren Röhrchen die Höhe $h = 29{,}9^{mm}$, in dem anderen $h_1 = 14{,}9^{mm}$, woraus sich die Capillarhöhen in einem Röhrchen von einem Millimeter Radius $hr = 7{,}00^{mm}$ und $h_1 r_1 + 6{,}22^{mm}$ ergeben. Aus diesen Beobachtungen würde sich die Capillaritäts-Constante dieser äuſserst schwachen Lösung von Marseiller Seife etwa zu 3,3 Mgr. ergeben, während sie aus der Beobachtung der Lamellen-Spannung oben gleich 2,73 Mgr. gefunden worden ist. Die Beobachtung der Capillarhöhe weist also noch entschiedener als die directe Messung der Lamellen-Spannung darauf hin, daſs schwächere Seifenlösungen eine etwas gröſsere Capillaritäts-Constante haben; nach beiden Methoden ist aber entschieden nachgewiesen, daſs ein äuſserst geringer Gehalt an Seife die Oberflächen-Spannung des Wassers in überraschender Weise vermindert.

Von Interesse dürfte noch die Beantwortung der Frage seyn, welchen Einfluſs die Wärme auf die Lamellen-Spannung des Seifenwassers habe. Ich habe deſshalb die erste der oben betrachteten Lösungen von Marseiller Seife (1 : 100), deren Lamellen-Spannung bei einer Temperatur von 22° C. ermittelt worden war, in einem ungeheizten Zimmer (Temp. = 4,2° C.) stehen lassen, bis sie die Temperatur desselben angenommen hatte. Der Versuch wurde mit den beiden gröſseren Platinringen von $4{,}6^{cm}$ und $6{,}1^{cm}$ Durchmesser in dem kalten Zimmer ausgeführt und dabei die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit mit einem guten Thermometer zu 4,4° C. bestimmt. Die Lamellen-Bildung geht bei dieser Temperatur sehr gut vor sich, und

läfst sich daher das der Lamellen-Spannung entsprechende Gewicht genau bestimmen. Dieses Gewicht wurde bei Anwendung der beiden Ringe bezüglich gleich 0,84 Gr. und 1,12 Gr. gefunden, woraus sich die auf ein Millimeter bezogene Lamellen-Spannung für den kleineren Ring gleich 5,81 Mgr. und für den gröfseren gleich 5,84 Mgr. ergab. Die Capillaritäts-Constante dieser Seifenlösung ist demnach bei einer Temperatur von 4,4° C. gleich 2,92 Mgr., während sie oben bei 22° C. gleich 2,63 gefunden worden ist.

Obgleich die Temperatur, bei welcher die zu vergleichenden Beobachtungen angestellt worden sind, nur um nicht ganz 18° C. verschieden ist, so dürfte durch dieselben doch nachgewiesen seyn, dafs auch beim Seifenwasser die Wärme der Cohäsion entgegen wirkt. Auf einen vollständigeren Nachweis dieses Satzes durch weitere Versuche bei verschiedener Temperatur, sowie auf eine weitere Betrachtung der Lamellen aus Seifenlösungen, deren Untersuchung hiermit noch nicht erschöpft ist, mufs ich für jetzt verzichten, um für Mittheilungen über einige andere Flüssigkeiten Raum und Zeit übrig zu behalten.

2. *Die Lamellen-Spannung der Saponin-Lösungen* läfst sich nach dem an den Seifen-Lamellen studirten und eingeübten Verfahren bequem und genau bestimmen. Die Waage ist bei den Versuchen mit einer Saponin-Lösung weniger leicht beweglich als bei den Versuchen mit Seifenwasser, weil die zwischen dem an der Waagschale hängenden Ringe und der Oberfläche der Flüssigkeit ausgespannte Saponin-Lamelle sich bei kleinen Gewichts-Differenzen nur langsam ausdehnt und zusammenzieht. Die Ausführung des Experiments ist defshalb bei dieser Flüssigkeit sogar leichter als bei der Seifenlösung. Ich habe die untersuchten Lösungen nach bestimmten Gewichtsverhältnissen bereitet, indem ich die dazu erforderlichen Quantitäten Saponin genau abwog und in bestimmten Gewichtsmengen von destillirtem Wasser auflöste. Die schwächern Lösungen bereitete ich, indem ich zu abgewogenen kleineren Quantitäten einer Lösung, deren Saponin-Gehalt

genau bekannt war, das erforderliche Wasser hinzusetzte. Die stärkeren Lösungen behalten die Fähigkeit, Lamellen zu bilden, lange ungeschwächt, die schwachen Lösungen verändern sich dagegen schneller und müssen daher immer frisch angewendet werden. Die Lamellen-Spannung ebenso wie die Capillaritäts-Constante ist bei den Saponin-Lösungen viel gröſser als bei dem Seifenwasser und nimmt continuirlich zu, wenn die Lösung durch Zusatz von Wasser verdünnt wird. Die auf die Strecke eines Millimeters bezogene Spannung der Saponin-Lamelle ergab sich bei dem Lösungsverhältnisse 1 : 100 im Durchschnitt gleich 8,64 Mgr., bei dem Verhältnisse 1 : 200 gleich 9,59 Mgr., bei dem Verhältnisse 1 : 1000 gleich 11,76 Mgr., bei dem Verhältnisse 1 : 10000 gleich 13,66 Mgr. und bei dem Verhältnisse 1 : 20000 gleich 14,22 Mgr. Ich habe diese Resultate durch eine gröſsere Anzahl von mit Ringen von verschiedener Gröſse ausgeführten Reobachtungen festgestellt und auch mehrere Flüssigkeiten von anderem Saponin-Gehalte untersucht, halte aber eine ausführlichere Mittheilung darüber nicht für zweckmäſsig. Dagegen scheint die Beziehung der angegebenen Werthe zu der Höhe, welche die Lösungen in Haarröhrchen über dem äuſseren Niveau erreichen müssen, von einigem Interesse zu seyn, denn da das specifische Gewicht der verdünnteren Saponin-Lösungen von dem des Wassers nicht merklich verschieden ist, so geben die angeführten Zahlen die Capillarhöhe in Millimetern ausgedrückt an, welche die betreffenden Flüssigkeiten in einem zwei Millimeter weiten Haarröhrchen erreichen.

Ich habe deſshalb die Capillarhöhe von den drei schwächsten Saponin-Lösungen (1 : 1000, 1 : 10000 und 1 : 20000) in engen Röhrchen auf die oben beschriebene Weise gemessen und wurde bei diesen Beobachtungen durch den Umstand besonders überrascht, daſs diese Flüssigkeit trotz ihrer bekannten Starrheit oder Zähigkeit der Oberfläche sich in den Capillarröhren ziemlich leichtflüssig zeigte und einer ziemlich zuverlässigen Messung keine besonderen Hindernisse entgegensetzte. Die gemessenen Capillarhöhen

wurden auf ein Capillarröhrchen von 1^{mm} innerem Radius reducirt und lieferten für die drei bezeichneten Lösungen die resp. Werthe von $12{,}41^{mm}$, $14{,}32^{mm}$ und $14{,}45^{mm}$, welche mit den aus der Lamellen-Spannung abgeleiteten Werthen so gut übereinstimmen, als man nur erwarten kann. Die Capillaritäts-Constanten der drei Saponin-Lösungen (1:1000, 1:10000 und 1:20000) sind aus der Messung der Lamellen-Spannung bestimmt: resp. 5,88, 6,83 und 7,11; aus der Messung der Capillarhöhe bettimmt: 6,20, 7,16 und 7,22.

Um einige Beobachtungen über den Einfluſs der Temperatur auf die Spannung der Saponin-Lamellen zu machen, habe ich eine Saponin-Lösung (1:1000) in einem geheizten Zimmer bei 23° C. und darauf in einem ungeheizten Zimmer bei 4,2° C. mit zwei Platinringen von $4{,}6^{cm}$ und $6{,}1^{cm}$ Durchmesser untersucht. Die auf ein Millimeter bezogenen Spannungen wurden bei 23° C. gleich 11,97 Mgr. und 12,31 Mgr., also im Mittel 12,14 Mgr., dagegen bei 4,2° C. gleich 12,39 Mgr. und 12,97 Mgr., im Mittel also gleich 12,68 Mgr. gefunden. Die Capillaritäts-Constante dieser Saponin-Lösung ergiebt sich also nach diesen Versuchen bei 23° C. gleich 6,07 Mgr., bei 4,2° C. gleich 6,34 Mgr.

Ueber die Spannung der Saponin-Lamellen habe ich nur eine von einem anderen Beobachter gemachte Mittheilung auffinden können. J. Plateau[1]) giebt den Werth der Spannung der Lamelle aus einer Saponin-Lösung im Verhältnisse 1:100 gleich 8,74 Mgr. an, ohne mitzutheilen, auf welche Weise er diesen mit meinen Versuchen übereinstimmenden Werth gefunden hat.

3. *Ueber die Oberflächen-Spannung des Wassers.* Wenn man einen Drahtring in destillirtes Wasser eintaucht und dann wieder recht langsam und vorsichtig heraushebt, so sieht man unter demselben ebenfalls ein dünnes Häutchen entstehen, welches freilich nicht so zäh und haltbar ist

1) Poggendorff's Ann. d. Ch. Bd. 141, pag. 55.

wie bei dem Seifenwasser oder den Saponin-Lösungen, sondern rasch zerreifst und daher nur bei grofser Geduld und Vorsicht zu genauen Messungen der Spannung einer Wasser-Lamelle und zur Bestimmung der Capillaritäts-Constante des destillirten Wassers dienen kann.

Die Kraft, mit welcher der Ring an dem von ihm in die Höhe gehobenen Meniskus festsitzt, ist gröfser als die Lamellen-Spannung, man erhält defshalb nur genäherte und zwar immer zu grofse Werthe für die Capillaritäts-Constante, wenn man nur das Gewicht bestimmt, welches erforderlich ist, um den Ring von dem Wasser abzureifsen. Aus solchen in der mittleren Temperatur von etwa 20° C. ausgeführten Bestimmungen ergaben sich für die auf die Strecke eines Millimeters bezogene Spannung der Wasser-Lamelle Werthe von 16 bis 19 Milligrammen, welche um mehrere Milligramme zu grofs sind, wie aus der Vergleichung mit der Capillarhöhe des Wassers in engen Röhrchen sich ergiebt. Das Wasser aus dem Bielau-Flusse und das Neisser Brunnenwasser zeigte sich für den Versuch geeigneter und konnte daher für dasselbe die Lamellen-Spannung und die sich daraus ergebende Capillaritäts-Constante mit gröfserer Zuverlässigkeit bestimmt werden. Die Capillaritäts-Constante oder die Oberflächen-Spannung des Wassers aus der von dem städtischen Wasserhebewerk mit Bielauwasser versorgten Wasserleitung der Realschule wurde gleich 7,29 Mgr. bei 16,5° C. gefunden. Das Wasser aus dem Brunnen im sogen. Peterswinkel hat bei 15,5° C. 7,42 Mgr., das Wasser aus dem Kreuzbrunnen bei 13° C. 7,54 Mgr. und bei 16,8° C. 7,35 Mgr. und das Wasser aus dem Schönbrunnen auf der Breslauer Strafse bei 15° C. 7,22 Mgr. für die Capillaritäts-Constante ergeben. Das Wasser aus dem letztgenannten Brunnen zeichnet sich nach der Untersuchung von Prof. Dr. Poleck[1])

1) Das süfse Wasser mit besonderer Berücksichtigung des Trinkwassers der Stadt Neifse, von Dr. phil. Theodor Poleck, pag. 173 der Denkschrift zur Feier ihres 25jährigen Bestehens herausgegeben von der Philomathie in Neifse 1863.

vor den anderen Brunnen durch seinen verhältnifsmäfsig grofsen Gehalt an festen Salzen aus, dessen Folge offenbar die kleinere Capillaritäts-Constante ist.

Je reiner das Wasser ist, d. h. je weniger es organische oder unorganische Stoffe gelöst enthält, desto gröfser ist bei gleicher Temperatur seine Capillaritäts-Constante. Dieselbe hat daher bei dem destillirten Wasser den gröfsten Werth. Nach dem oben Bemerkten ist es schwierig, für reines destillirtes Wasser durch die Messung der Lamellen-Spannung die Capillaritäts-Constante genau zu ermitteln, aber nicht unmöglich. Man mufs bei der Wägung der genauen Gewichtsbestimmung allmälig näher kommen und während der kurzen Dauer der dünnen cylindrischen Lamelle ermitteln, ob der Zug derselben den Ring nach unten ziehe oder ob ein kleines Uebergewicht den Ring hebe und die Lamelle ausdehne. Auf solche Weise habe ich ermittelt, dafs destillirtes Wasser, welches der Lehrer der Chemie an der hiesigen Realschule, Herr Rose, mit dem gut eingerichteten Destillir-Apparate des Laboratoriums der Anstalt bereitete, bei 16,6° C. eine Lamellen-Spannung von 14,86 Mgr. pro Millimeter hat, woraus die Capillaritäts-Constante 7,43 Mgr. sich ergiebt.

In niedrigerer Temperatur, in der Nähe des Gefrierpunktes zeigt das Wasser eine andere Oberflächen-Beschaffenheit, es wird zäher und ist zur Lamellen-Bildung geeigneter. Das dünne cylindrische Häutchen, welches sich zwischen dem von der Waagschale gehobenen Ringe und der Oberfläche des Wassers ausspannt, ist dauerhafter und gestattet daher, da sich die Waage ordentlich in's Gleichgewicht setzen läfst, eine genaue Gewichtsbestimmung der Lamellen-Spannung. Die Beobachtung wird allerdings unbequemer, weil man sie nur im Winter in einem ungeheizten Zimmer ausführen kann. Ich habe im letzten Winter unter Anwendung von zwei Ringen aus Platindraht von 4,6 und 6,1^{cm} Durchmesser einige Beobachtungen in niedriger Temperatur angestellt und theile die correspondirenden bei gleicher Temperatur erhaltenen Resultate

in der Weise nachstehend mit, dafs die obere Angabe immer dem kleineren Ringe entspricht. Zur Vergleichung sind zuletzt zwei im geheizten Zimmer mit denselben Ringen angestellte Beobachtungen beigefügt.

No.	Temperatur C.	Belastung der Waage Gr.	Lamellen-Spannung für 1mm 2α Mgr.	Mittel Mgr.	Capillaritäts-Constante d. Wassers α Mgr.
1.	1,6°	2,25	15,57	15,53	7,76
		2,97	15,50		
2.	3,6	2,19	15,15	15,35	7,67
		2,98	15,55		
3.	5,0	2,19	15,15	15,25	7,62
		2,94	15,34		
4.	16,6	2,11	14,60	14,86	7,43
		2,90	15,13		

Die für die auf ein Millimeter bezogene Lamellen-Spannung angegebenen Werthe drücken nach der Gleichung

$$h\,r = \frac{2\alpha}{\sigma}$$

zugleich die Höhe in Millimetern aus, bis zu welcher das Wasser in einem Haarröhrchen mit kreisförmigem Querschnitt von einem Millimeter Radius emporsteigt, denn das specifische Gewicht des Wassers σ ist bei den angegebenen Temperaturen so wenig von der Einheit verschieden, dafs die Division der Lamellen-Spannung durch σ auch auf die zweite Decimalstelle der angegebenen Werthe kaum von erheblichem Einflufs ist. Wenn nun z. B. die mittlere Lamellen-Spannung bei 16,6° C. nämlich 14,86, durch das specifische Gewicht des Wassers bei 17° C. nämlich 0,99899 dividirt, so erhält man den wenig verschiedenen Quotienten 14,87 Mm. für die Capillarhöhe.

Die Vergleichung dieser Beobachtungen mit den Resultaten einer von mir im Jahre 1840 über die Capillarität des Wassers bei verschiedener Temperatur angestellten Untersuchung gewährte mir nicht geringe Befriedigung, denn der von mir damals zuerst gelieferte experimentelle Nachweis, dafs die Cohäsion der Flüssigkeiten bei der Zu-

nahme der Wärme continuirlich abnimmt, wurde nicht nur durch die Beobachtung der Lamellen-Spannung bestätigt, sondern die nach den beiden Methoden gefundenen Werthe der Capillaritäts-Constante stimmten auch in befriedigender Weise überein. Ich glaube hier bei dieser Gelegenheit an meine frühere Arbeit, welche wenig bekannt geworden zu seyn scheint, erinnern zu dürfen. Ich habe nämlich, veranlafst durch den verstorbenen Professor M. L. Frankenheim, dessen Amanuensis ich eine Reihe von Jahren war, die Untersuchung des Einflusses der Wärme auf die Capillarität der Flüssigkeiten zu meiner Promotions-Arbeit gewählt und, unterstützt und geleitet von meinem erfahrenen Lehrer, mit Benutzung eines zweckmäfsigen Apparats, die Höhen-Differenz gemessen, welche Wasser, Weingeist und geschmolzener Schwefel in aus einem weiten und einem engen Rohre zusammengesetzten Hebern bei sehr verschiedener Temperatur zeigen. Die Wärme wurde durch ein durchsichtiges Wasserbad regulirt und die Höhen-Differenz der Flüssigkeit in den in dem Wasserbade befindlichen Glashebern mit einem Kathetometer mittelst eines an dem Nonius befestigten Mikroskops bestimmt. Aus der gemessenen Höhen-Differenz der Flüssigkeit und der Weite der beiden Röhren wurde die Höhe der Flüssigkeit in dem engen Rohre über einem äufsern unbegrenzten Niveau durch Rechnung abgeleitet. Den Apparat und die Versuche habe ich in meiner im Februar 1841 veröffentlichten Dissertation: „*De vi, quam calor habet in fluidorum capillaritatem*“ beschrieben und die Resultate in Tabellen zusammengestellt. Das Hauptergebnifs meiner Arbeit war: dafs die Abnahme der Capillarität des Wassers im geraden Verhältnisse zu der Zunahme der Wärme steht, und dafs die Höhe des Wassers h in einem Röhrchen von einem Millimeter inneren Radius bei der in Centesimal-Graden ausgedrückten Temperatur t mit grofser Annäherung durch die Gleichung

$$h = 15{,}373 - 0{,}02938\, t$$

ausgedrückt wird. Professor Frankenheim hat diese

Untersuchung fortgesetzt und eine von ihm verfafste Abhandlung[1]) über diesen Gegenstand unter seinem und meinem Namen in Erdmann's Journal für praktische Chemie bekannt gemacht, in den Tabellen aber wegen einer gewissen bei der Reduction der Beobachtungen nicht zu vermeidenden Unsicherheit nicht die absoluten, sondern nur die relativen Werthe der Capillarität für die Temperaturen von 5 zu 5 Graden angegeben und deshalb auch die von mir für die absoluten Werthe der Capillarhöhe des Wassers für die verschiedenen Temperaturen aufgestellte Gleichung nicht aufgenommen.

Seitdem hat C. Brunner[2]) sich mit demselben Gegenstande beschäftigt und Resultate gefunden, welche mit den meinigen übereinstimmen. Die von ihm für die Capillarhöhe des Wassers für verschiedene Temperatur aufgestellte Gleichung

$$h = 15{,}33215 - 0{,}0286396\, t$$

weicht von der meinigen nur unwesentlich ab. Auch die umfangreiche Arbeit von C. Wolf[3]) liefert eine weitere Bestätigung des von mir nachgewiesenen Gesetzes. Dieser sorgfältige Beobachter spricht sich dahin aus[4]), „dafs das von verschiedenen Beobachtern und besonders von Hrn. Brunner gefundene Gesetz für die Abnahme der Capillarhöhe bei steigender Temperatur richtig ist, dafs es aber unmöglich ist, dasselbe zu verallgemeinern und anzuwenden auf andere Röhren, als mit welchen die Versuche gemacht wurden.“ Deshalb stellt er auch für die Röhren, welche er bei seinen Versuchen gebraucht hat, besondere Gleichungen auf und berechnet nach denselben

1) Ueber die Capillarität der flüssigen Körper bei verschiedenen Temperaturen. Von Frankenheim und Sondhaufs. Erdmann's Journal 1841. Bd. XXIII pag. 401.

2) C. Brunner, „Ueber die Cohäsion der Flüssigkeiten“. Poggendorff's Annalen 1847 Bd. 70 pag. 481.

3) C. Wolf, „Vom Einflufs der Temperatur auf die Erscheinungen in Haarröhrchen“. Poggendorff's Annalen 1857 Bd. 101 pag. 550 und Bd. 102 pag. 571.

4) Poggendorff's Annalen Bd. 102 pag. 594.

die Capillarhöhe für die Temperaturen, bei welchen er die einzelnen Beobachtungen angestellt hat, wobei sich ergiebt, dafs die Resultate der Rechnung und der Beobachtung sehr gut übereinstimmen. Sieht man von einer Gleichung ab, in welcher er auch die zweite Potenz der Temperatur in Rechnung gezogen hat, so kommen drei Gleichungen in Betracht, nämlich:

$$y = 132,265736 - 0,260553\,x$$
$$y = 132,0785 - 0,245699\,x$$
$$y = 101,80346 - 0,184966\,x,$$

von welchen die beiden ersten für die mit einer Röhre, deren innerer Durchmesser gleich 0,2346 Mm. war, angestellten Beobachtungen und zwar für die Temperatur von 0 bis 8° C. und von 13 bis 25° C. Geltung haben, und die dritte sich auf eine Röhre von 0,3098 Mm. innerem Durchmesser innerhalb der Temperaturen von 5,73 bis 82,27° C. bezieht. Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit dem Radius der betreffenden Röhren, um die Capillarhöhe auf die innere Röhrenweite von 1 Mm. Radius zu reduciren, so erhält man, wenn überdies $y\,r$ mit h bezeichnet und t zur Bezeichnung der Temperatur verwendet wird:

$$h = 15,51476 - 0,0305629\,t$$
$$h = 15,49281 - 0,0288205\,t$$
$$h = 15,76935 - 0,0286512\,t.$$

Diese Gleichungen zeigen, wenn man die überflüssigen Decimalstellen wegläfst und berücksichtigt, dafs die Maafseinheit ein Millimeter ist, eine erfreuliche Uebereinstimmung mit der von mir im Jahre 1841 producirten Gleichung.

Ich glaubte daher die Capillarhöhe des Wassers für die Temperaturen, bei welchen die oben angegebenen Lamellen-Beobachtungen angestellt sind, nach meiner eignen Formel berechnen zu sollen. Für die Temperaturen von 1,6° C., 3,6° C., 5° C. und 16,6° C. ergaben sich für die Capillarhöhe des Wassers die bezüglichen Werthe von 15,33, 15,27, 15,23 und 14,86 Mm., welche mit den Resultaten der Lamellen-Beobachtungen so gut übereinstimmen, wie man nur erwarten kann. Es fehlt nämlich auch

bei der Lamellen-Beobachtung nicht an Störungen, welche die Erlangung von übereinstimmenden Resultaten erschweren Die Art des Aufhängens der Ringe an der Waagschale, eine kleine unbemerkte Verbiegung eines Ringes hat z. B. auf die Gewichtsbestimmung der Lamellen-Spannung erheblichen Einfluſs und die Bewegung der Luft, die Nähe des Experimentators, die nicht immer vollkommne Reinheit der Ringe und Gefäſse und die Ungleichartigkeit der untersuchten Flüssigkeit tragen zu der Beeinträchtigung der Genauigkeit das ihrige bei. Ich zweifle nicht, daſs sich der Apparat für diese Versuche bei Aufwendung der nöthigen Mittel noch besser construiren läſst, und werde mich freuen, wenn andere Beobachter die von mir empfohlene Methode mit noch besserem Erfolge anwenden sollten.

4. *Die Capillaritäts-Constante des Quecksilbers* läſst sich mit Ringen, an welchen dasselbe adhärirt, ebenfalls bestimmen. Ich habe aus sehr dünnem versilberten Kupferdrahte mir drei kleine Ringe angefertigt, deren Durchmesser 1,65, 2 und 2,5 Cm. betrug, und mit denselben eine Reihe von Versuchen in verschiedener Temperatur von 0 bis 25° C. allmälig durchgeführt. — Wenn man einen solchen, mit seinem Stiel an der Waagschale hängenden Ring in Quecksilber eintaucht und dann auf die andere Waagschale mehr und mehr Gewichte legt, so zieht sich mit dem gehobenen Ringe auch eine Quecksilber-Lamelle in die Höhe, deren Spannung man durch Gewichte ausdrücken kann. Der Ring läſst sich allerdings nur etwa 1 bis 1,5 Mm. aus dem Niveau des Quecksilbers emporheben, ohne abzureiſsen, aber man kann doch, wenn man alle Erschütterungen vermeidet und zuletzt nur kleine Gewichte auflegt, die Gewichtsbestimmung der Oberflächen-Spannung sehr genau ausführen. Ob der mit dem Ringe gehobene Quecksilberrand wirklich als eine dünne Lamelle anzusehen sey, läſst sich wegen seiner geringen Höhe nicht entscheiden; es stimmen aber die einzelnen, zu verschiedener Zeit und mit verschiedenen Ringen unter übrigens gleichen Umständen ausgeführten Beobachtungen

im Ganzen mit einander ziemlich gut überein und ergeben sich auch aus denselben für die Lamellen-Spannung und die Capillaritäts-Constante des Quecksilbers Werthe, welche den von andern Beobachtern nach andern Methoden bestimmten Werthen nahe kommen. Daſs das Quecksilber zur Lamellen-Bildung geeignet ist, läſst sich schon aus der Bildung von Luftblasen erkennen, welche auf der Oberfläche von Quecksilbermassen entstehen, wenn man einen dünnen Quecksilberstrahl auf sie fallen läſst. Diese Erscheinung hat man oft zu beobachten Gelegenheit, wenn man naſs gewordenes Quecksilber durch einen Papiertrichter filtrirt. In der oben erwähnten Abhandlung „Ueber flüssige Lamellen" habe ich auch schon darauf aufmerksam gemacht, daſs Quecksilber sich durch amalgamirte Drähte zu einer kleinen Lamelle ausspannen läſst.

Ich habe eine groſse Anzahl von Beobachtungen über die Lamellen-Spannung des Quecksilbers und die sich daraus ergebende Capillaritäts-Constante desselben bei verschiedener Temperatur, welche in verschiedenen geheizten und kalten Zimmern abgewartet werden muſste, mit Sorgfalt angestellt und theile davon vier Gruppen mit, bei welchen die Temperatur gleich oder fast gleich war. Diese Versuche sind in den beiden letzten Monaten des vorigen Jahres ausgeführt worden.

No.	Temperatur C.	Durchmesser des Ringes Cm.	Belastung der Waage Gr.	Lamellen-Spannung für 1 Mm. Mgr.	Capillaritäts-Const. α des Quecksilbers Mgr.	Mittel von α Mgr.
1.	0	2,5	8,32	105,91	52,95	53,85
	0	1,65	5,58	107,65	53,82	
	0	1,65	5,68	109,57	54,78	
2.	7,5	2	6,32	102,22	51,11	51,73
	7,5	2,5	8,22	104,66	52,33	
	7,5	2,5	8,13	103,51	51,75	
3.	18,1	1,65	5,16	99,54	49,77	49,67
	18,1	1,65	5,24	101,09	50,54	
	18,75	2,5	5,67	97,40	48,70	
4.	25	2,5	7,51	95,62	47,81	47,8
	55	1,65	4,94	95,53	47,76	

Dafs die Oberflächen-Spannung des Quecksilbers innerhalb der Temperatur von 0 bis 25° C. ziemlich regelmäfsig im Verhältnifs zur Wärmezunahme abnimmt, dürfte unzweifelhaft seyn; dagegen würde es doch wohl voreilig seyn, aus diesen Versuchen schon Schlüsse auf das Gesetz dieser Aenderung der Capillaritäts-Constante zu machen. Die gründlichste und umfangreichste Untersuchung über die Capillaritäts-Constante des Quecksilbers sowie vieler anderer Körper verdanken wir Herrn G. Quincke. Am Schlusse seiner Abhandlung [1]) „Ueber die Capillaritäts-Constanten fester Körper ist eine kleine Tabelle zusammengestellt, in welcher die Capillaritäts-Constante des Quecksilber $\alpha = 55{,}21$ Mgr. angegeben ist; in seiner nächsten Abhandlung [2]) „Ueber die Capillaritäts-Constanten geschmolzener Körper" enthält eine umfangreichere Tabelle für dieselbe Gröfse den Werth $\alpha = 58{,}79$ Mgr. Bezüglich des Weges, auf welchem diese Werthe bestimmt worden sind, verweist der Verfasser auf die im Jahre 1858 veröffentlichte Abhandlung [3]) „Ueber die Capillaritäts-Constanten des Quecksilbers". Hier bestimmt der Verfasser zunächst durch sehr genaue Messungen von Quecksilbertropfen eine andere Constante a, deren Quadrat die Höhe seyn würde, welche die Flüssigkeit in einem von ihr benetzten Rohre von einem Millimeter inneren Radius über dem äufsern Niveau erreichte. Die Constante a^3 ist also identisch mit hr in der S. 269 abgeleiteten Gleichung

$$hr = \frac{2\alpha}{\sigma}.$$

Es ergiebt sich demnach

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\sigma} \text{ und } \alpha = \frac{a^2\sigma}{2}.$$

Herr Quincke fand, dafs die Constante a sich ziemlich rasch ändert und giebt die bei der Temperatur von 16,3° C., 18° C., 15° C. gefundenen Werthe derselben

1) Poggend. Ann. d. Ph. Bd. 134 pag. 356. 1868.
2) Poggend. Ann. d. Ph. Bd. 135 pag. 621. 1868.
3) Poggend. Ann. d. Ph. Bd. 105.

gleich 2,941, 2,816, 2,833, 2,772 und 2,616 an. Ich habe daraus unter der Annahme, daſs das specifische Gewicht des Quecksilbers $\alpha = 13,59$ sey, die bezüglichen Werthe für die Oberflächen-Spannung ausdrückende Constante α berechnet und 58,79, 53,90, 54,54, 52,20 und 46,50 gefunden, womit die Resultate meiner Beobachtungen übereinstimmen, insofern sie innerhalb derselben liegen.

Ich muſs übrigens bemerken, daſs ich bei meinen Versuchen kein reines Quecksilber zur Verfügung hatte und daſs das von mir angewendete verkäufliche Quecksilber überdies durch die Versilberung der Drähte noch mehr verunreinigt wurde.

Obwohl ich mein Verfahren zur Untersuchung von noch anderen Flüssigkeiten angewendet habe, muſs ich doch, um die Gränzen einer Programm-Abhandlung nicht zu überschreiten, meine Mittheilung hier abbrechen. Ich schlieſse mit der Bemerkung, daſs die Messung der Lamellen-Spannung auch ihre praktische Bedeutung erhalten kann, indem der an der Waage hängende Ring bei der Unterscheidung und Untersuchung von Flüssigkeiten als ein hülfreicher und oft zur Klarheit führender Genosse des Aräometers dienen kann. Der einfache Apparat wird sich so zweckmäſsig einrichten lassen, daſs nicht blos ein geübter Beobachter, sondern jeder gebildete Geschäftsmann und Beamte damit operiren kann. Da Milch, Bier und Wein die Eigenschaft der Lamellen-Bildung in hinreichendem Grade besitzen, so kann man wahrscheinlich den normalen Zustand dieser Getränke nach meinem Verfahren constatiren und Verfälschungen entdecken und nachweisen. Auch die organischen Flüssigkeiten, wie Blut, Urin besitzen die Eigenschaft der Lamellen-Bildung: es könnte daher, wenn die Oberflächen-Spannung solcher Flüssigkeiten in normalen und in abnormen Zuständen bestimmt würde, dadurch für die Diagnose der Aerzte ein neues und sicheres Hülfsmittel gewonnen werden.

IV. *Ueber ein dioptrisches Fundamentalgesetz;* *von R. Most.*

1. Die von Gaufs, Listing und Töpler[1]) eingeführten Fundamentalpunkte eines dioptrischen Systems zeigen eine so reiche Fülle gleichartiger Beziehungen, dafs die Vermuthung nahe liegt, ein umfassendes Gesetz begründe alle jene Gesetzmäfsigkeiten. In Nachfolgendem soll ein solches Grundgesetz dargelegt werden, mit dem Nachweise, dafs dasselbe auch in Bezug auf die beiden Brennlinien *nicht* centraler unendlich dünner Strahlenbündel Geltung behält, wenn man an Stelle der einen Centrallinie 2 Axen, die eine für die auffallenden, die andere für die austretenden Strahlen einführt; das Fundamentalgesetz veranlafst bei dem zweiaxigen Strahlensystem ebenso wie auf der Centrallinie die Einführung der Fundamentalpunkte und macht damit das Nachbargebiet der beiden Axen den üblichen geometrischen Constructionen zugänglich.

Bei den gewöhnlichen Betrachtungen centrirter sphärischer Systeme wird vorausgesetzt, dafs für die auffallenden Strahlen bei der ersten brechenden Fläche nur ein kleines Stück um die Centrallinie freigelassen ist; denkt man sich die entsprechende Bedingung bei einer nicht centralen Axe auffallender Strahlen erfüllt, so erzeugt ein Object, welches sich im Gebiet dieser Axe befindet, *zwei* Bilder verschiedener Art; für jede Art treten besondere Fundamentalpunkte auf, doch genügen zur analytischen Bestimmung jeder Gruppe von Fundamentalpunkten eine Determinante und zwei ihrer Unterdeterminanten; bei dem centralen Gebiet fallen die beiden Bilder und entsprechend die beiden Gruppen von Fundamentalpunkten zusammen. — Gaufs hat die conjugirten Punkte im centralen Ge-

1) Poggend. Ann. Band 142, S. 252.

biet dioptrischer Systeme durch die Brennpunkte und Hauptpunkte bestimmt; in wiefern allgemein die conjugirten Punkte der Centrallinie durch 4 gegebene Punkte bestimmt werden können, läfst sich nach dem Fundamentalgesetz leicht entscheiden. In einem zweiaxigen Gebiet treten nicht zwei, sondern drei conjugirte Punkte auf, denn jeder Lichtpunkt der ersten Axe hat zwei Brennpunkte auf der zweiten und jeder Punkt der zweiten Axe kann als erster oder zweiter Brennpunkt aufgefafst werden und ist deshalb zwei Lichtpunkten der ersten Axe conjugirt; aus dem Fundamentalgesetz ergiebt sich, dafs die conjugirten Punkte eines zweiaxigen Gebietes durch 7 auf den Axen gegebene Punkte bestimmt werden können. — Der einfacheren Darstellung wegen soll das Fundamentalgesetz mit seinen Anwendungen zunächst für das centrale Gebiet centrirter Systeme, sodann für das nichtcentrale Gebiet derselben und endlich für das mittlere Gebiet nahe centrirter Systeme entwickelt werden.

2. Es sind $p+1$ Medien mit den absoluten Brechungsexponenten:

$$n \quad n_1 \quad n_2 \;.\;.\; n_p$$

durch p sphärische centrirte Flächen getrennt; die Mittelpunkte der letzteren seyen

$$M \quad M_1 \quad M_{p-1},$$

ihre Schnittpunkte mit der Centrallinie

$$C \quad C_1 \quad C_{p-1}$$

und die Vereinigungspunkte der keinmal, einmal .. $p$mal gebrochenen Strahlen seyen

$$A \quad A_1 \;.\;.\; A_p,$$

dann ist:

$$1) \;.\;.\; \begin{cases} \dfrac{n}{CA} - \dfrac{n_1}{CA_1} = \dfrac{n-n_1}{CM} \\ \dfrac{n_{p-1}}{C_{p-1}A_{p-1}} - \dfrac{n_p}{C_{p-1}A_p} = \dfrac{n_{p-1}-n_p}{C_{p-1}M_{p-1}} \end{cases}$$

$$1a) \;.\;.\; \begin{cases} n \,.\, \dfrac{MA}{CA} = n_1 \dfrac{MA_1}{CA_1} \\ n_{p-1} \dfrac{M_{p-1}A_{p-1}}{C_{p-1}A_{p-1}} = n_p \dfrac{M_{p-1}A_p}{C_{p-1}A_p} \end{cases}$$

Für die Ableitung der Gleichungen 1a ergiebt sich bekanntlich in Bezug auf einen zu C benachbarten Punkt P der sphärischen Fläche

$$n\frac{MA}{PA} = n_1\frac{MA_1}{PA_1};$$

die Gleichungen 1 folgen aus 1a, indem allgemein

$$MA = MC + CA \qquad MA_1 = MC + CA_1$$

gesetzt wird. Es kommen also in Nachfolgendem nur Richtungsstrecken in Anwendung, deren Benutzung schon Möbius[1]) empfohlen hat; sie haben bekanntlich ihren grofsen Vortheil darin, dafs sie die Subtraction und Addition durch dasselbe Rechnungszeichen darstellen.

3. In Fig. 1 Taf. III schneide ein nach A gerichteter, der Centrallinie benachbarter Strahl die erste brechende Fläche in P, so dafs der gebrochene Strahl PA_1 entsteht, welcher seinerseits die zweite brechende Fläche in P_1 schneidet u. s. w. Bestimmt man den Schnitt des letzten Strahles $P_{\nu-1}A_\nu$ mit dem ersten PA in dem Punkte P_ν und fällt auf die Centrallinie das Loth $P_\nu S$, so ist, da für Strahlen, welche nur um kleine Winkel von der Centrallinie abweichen, die Linien PC als gerade angesehen werden können:

$$\frac{P_\nu S}{PC} = \frac{SA}{CA} \qquad \frac{PC}{P_1C_1} = \frac{CA_1}{C_1A_1} \quad \cdots \quad \frac{P_{\nu-1}}{P_\nu S} = \frac{C_{\nu-1}A_\nu}{SA_\nu}$$

also durch Multiplication:

$$2) \quad \ldots \quad \frac{SA}{SA_\nu} = \frac{CA\,.\,C_1A_1\,\ldots\,C_{\nu-1}A_{\nu-1}}{CA_1\,.\,C_1A_2\,\ldots\,C_{\nu-1}A_\nu}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dafs durch diesen Ausdruck der Punkt S eindeutig bestimmt ist; denn aus den Gleichungen 1) geht hervor, dafs sämmtliche Gröfsen C_iA_i und C_iA_{i+1} durch die erste $CA = x$ in der Form $\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}$ bestimmt werden können und zwar stellt sich unmittelbar heraus, dafs die Gröfsen C_iA_i und C_iA_{i+1} bis

1) Crelle, Band 5, S. 114.

auf eine Constante im Zähler übereinstimmen, dagegen die Gröfsen $C_i A_{i+1}$ und $C_{i+1} A_{i+1}$ im Nenner, da

$$C_i C_{i+1} = C_i A_{i+1} + A_{i+1} C_{i+1}$$

ist, der Ausdruck der rechten Seite in Gleichung 2 ist also in Bezug auf x linear, woraus sich ergiebt, dafs sowohl S durch A, als auch A durch das Verhältnifs $\frac{SA}{SA_p}$ eindeutig bestimmt ist. Aufserdem ergiebt sich aus der Bemerkung, Punkt S sei von P unabhängig, dafs sich sämmtliche conjugirte von A und A_p ausgehende Strahlen in einer zur Centrallinie normalen Ebene schneiden. Letzteres wird auch leicht geometrisch erkannt, denn berücksichtigt man zunächst nur Strahlenbüschel in der Zeichenebene bei $A, A_1 .. A_p$, so ist A mit A_1, A_1 mit A_2 u. s. w. perspectivisch, da die Linien PC als gerade angesehen werden können, folglich sind auch Büschel A und A_p perspectivisch und müssen sich daher in einer Geraden schneiden, die der Symmetrie wegen zu der Centrallinie senkrecht stehen mufs.

4. Stellt man zu den Gleichungen 1 ein zweites System von Gleichungen in Bezug auf ein zweites Strahlenbündel mit den Sammelpunkten $B, B_1 .. B_p$ und subtrahirt die entsprechenden Gleichungen von einander, so erhält man p Gleichungen von der Form:

$$\frac{n \,.\, AB}{CA \,.\, CB} = \frac{n_1 \,.\, A_1 B_1}{CA_1 \,.\, CB_1};$$

durch Multiplication ergiebt sich:

$$\frac{n}{n_p} \frac{AB}{A_p B_p} = \frac{CA \;..\; C_{p-1} A_{p-1}}{CA_1 \;..\; C_{p-1} A_p} \cdot \frac{CB \;..\; C_{p-1} B_{p-1}}{CB_1 \;..\; C_{p-1} B_p} = \frac{SA}{SA_p} \cdot \frac{TB}{TB_p},$$

wenn mit Bezug auf Gleichung 2) T für das Strahlenbündel B dieselbe Bedeutung hat, wie S für das Bündel A. Bezeichnet man die austretenden Strahlen und den zugehörigen Brechungsindex mit dem Accent, so erhält man die Proportion:

$$3) \quad n \,.\, AB : n' \,.\, A'B' = AS \,.\, BT : A'S \,.\, B'T$$

und somit folgendes Grundgesetz:

„Legt man durch jeden von zwei Lichtpunkten der Centrallinie einen dieser Linie benachbarten Strahl und bestimmt die Länge desselben bis zu seinem Schnittpunkt mit dem conjugirten Strahl, so verhält sich der Abstand der Lichtpunkte, multiplicirt mit dem absoluten Brechungsexponenten ihres Mediums, zu dem Abstand der conjugirten Punkte, multiplicirt mit dem entsprechenden Brechungsexponenten, wie das Product aus den Längen der eintretenden Strahlen zu dem Product aus den Längen der austretenden.“

Offenbar kann man dem Gesetz diesen allgemeineren Ausdruck geben, denn schneiden sich die von A und A' ausgehenden conjugirten Strahlen in P und die von B und B' ausgehenden in Q, so ist mit erlaubten Vernachlässigungen:

$$\frac{AP}{A'B} = \frac{AS}{A'S} \quad \text{und} \quad \frac{BQ}{B'Q} = \frac{BT}{B'T}.$$

Bezeichnet man die trigonometrische Tangente der Winkel, welche die Strahlenrichtung mit der positiven Richtung der Centrallinie bildet, mit α und β, so kann man, da $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{A'S}{AS}$ ist, das Fundamentalgesetz auch sehr übersichtlich in folgender Form schreiben:

$$3\text{a}) \quad . \quad . \quad . \quad n \,.\, \alpha \,.\, \beta\, AB = n' \,.\, \alpha' \,.\, \beta' \,.\, A'B'.$$

Für die meisten Betrachtungen kann man sich unter α und β die Winkel selbst denken, indem man nur bei Berücksichtigung negativer Werthe auf die trigonometrischen Tangenten zurückgeht; man erhält also das Gesetz:

„Legt man durch jeden von zwei Lichtpunkten der Centrallinie einen dieser Linie benachbarten Strahl und bestimmt dessen Neigung gegen die Centrallinie, so ist das Product aus diesen Neigungen, dem Abstande der Lichtpunkte und dem Brechungsexponenten ihres Mediums gleich dem entsprechenden Product für die conjugirten Punkte und Strahlen.“

Dafs das Fundamentalgesetz mit den Bildgröfsen nichts zu thun hat, ist nur naturgemäfs, denn die Bildgröfsen sind nicht Eigenschaften der auf der Centrallinie liegenden Strahlenpunkte, sondern Beziehungen dieser zu benachbarten Strahlenpunkten. Doch steht das Bildgröfsenverhältnifs bei den Punkten A und A' in einfacher Beziehung zu den Neigungen von α und α', wie schon öfter hervorgehohen ist[1]) und auch allgemein unmittelbar erkannt werden kann.

5. In Fig. 2 Tafel III seyen die zu dem Object AD gehörigen Bilder mit $A_1 D_1$ . . $A_p D_p$ bezeichnet; DM schneide die erste brechende Fläche in $E, D_1 M_1$, die zweite in E_1 u. s. w. Die Winkel bei M werden mit μ bezeichnet, dann ergiebt bekanntlich die Vergleichung der beiden Beziehungen:

$$\frac{n}{CA} - \frac{n_1}{CA_1} = \frac{n-n_1}{CM}$$

$$\frac{n}{ED \cdot \cos\mu} - \frac{n_1}{ED_1 \cdot \cos\mu} = \frac{n-n_1}{EM \cdot \cos\mu},$$

dafs mit erlaubten Vernachlässigungen A_1 als Proportion von D_1 angesehen werden kann; man erhält danach die Gleichungen:

$$\frac{AD}{A_1 D_1} = \frac{MA}{MA_1} \quad \ldots \quad \frac{A_{p-1} D_{p-1}}{A_p D_p} = \frac{M_{p-1} A_{p-1}}{M_{p-1} A_p}$$

also durch Multiplication und Anwendung der Gleichungen 1a und 2:

$$\frac{AD}{A_p D_p} = \frac{MA \ldots M_{p-1} A_{p-1}}{MA_1 \ldots M_{p-1} A_p} = \frac{n_p}{n} \frac{CA \ldots C_{p-1} A_{p-1}}{CA_1 \ldots C_{p-1} A_p} = \frac{n_p}{n} \frac{SA}{SA_p};$$

führt man also wiederum die Accente ein, so erhält man für das Bildgröfsenverhältnifs die Beziehung:

$$4) \quad \ldots \quad \frac{AD}{A'D'} = \frac{n'}{n} \frac{AS}{A'S} = \frac{n'}{n} \frac{\alpha'}{\alpha};$$ [2])

denkt man sich nun, entsprechend AD, in B das Object BE, so ergiebt sich aus dem Fundamentalgesetz die Gleichung:

1) Physiologische Optik von Helmholtz S. 50 und a. a. O.

2) Da $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB \cdot \beta}{A'B' \cdot \beta'}$ gesetzt werden darf, so kann Gl. 4 auch aus 3a abgeleitet werden.

3b) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{BE}{B'E'}$$

d. h. „das Bildtiefenverhältnifs bei einem leuchtenden Körper ist gleich dem Product aus dem Verhältnifs der Brechungsexponenten und den Bildgröfsenverhältnissen der vorderen und hinteren Fläche, wobei die Verhältnisse alle in demselben Sinne zu nehmen sind."

6. Fundamentalpunkte eines dioptrischen Systems sollen diejenigen conjugirten Punkte genannt werden, welche zu einem zweiten Paar conjugirter Punkte eine besonders einfache Beziehung haben. Nun bieten sich für die Gleichung:

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AS}{A'S} \cdot \frac{BT}{B'T}$$

zunächst die vereinfachenden Bedingungen dar:

$$\frac{AS}{A'S} = \pm 1 \quad \text{oder} \quad = \pm \frac{n}{n'};$$

man erhält damit

a) die positiven Knotenpunkte K und K', für welche

$$\frac{KS}{K'S} = \frac{x'}{x} = \frac{n}{n'} \frac{KD}{K'D'} = +1 \text{ ist;}$$

b) die negativen[1]) Knotenpunkte $\bar{K}$ und $\bar{K'}$, für welche $\frac{\bar{K}S}{\bar{K}'S}$ und die entsprechenden Gröfsen gleich — 1 sind;

c) die positiven Hauptpunkte H und H', für welche $\frac{HS}{H'S} = \frac{n}{n'}$ ist;

d) die negativen Hauptpunkte $\bar{H}$ und $\bar{H'}$, für welche $\frac{\bar{H}S}{\bar{H}'S} = -\frac{n}{n'}$ ist.

Bei den negativen Knotenpunkten geht also der Strahlenschnitt durch die Mitte ihres Abstandes, bei den positiven Knotenpunkten liegt die bezeichnete Ebene im Unendlichen. Eine andere Vereinfachung des Fundamentalgesetzes kann dadurch herbeigeführt werden, dafs man für 2 conjugirte Punkte F und F' die Bedingung stellt $\frac{B'F'}{SF'} = k$,

1) Töpler, Poggend. Ann. Bd. 142 S. 244.

wo k eine constante Gröſse seyn soll; es ergiebt sich:

$$\frac{B'S}{SF'} + 1 = k, \text{ also } SF' = \pm\infty \text{ und } k = 1.$$

Entsprechend erhält man die Fundamentalpunkte G und G', für welche $\frac{BG}{SG} = 1$ und $SG = \pm\infty$ ist. Mit diesen Bedingungen für die beiden Brennpunkte F und G' sind die einfachen Fälle erschöpft, es giebt also in einem dioptrischen System nur 10 Fundamentalpunkte, nämlich die, welche Gauſs, Listing und Töpler eingeführt haben.

7. Aus dem Fundamentalgesetz lassen sich nun die Beziehungen zu den Fundamentalpunkten unmittelbar ablesen; läſst man für B und B' die Knotenpunkte oder Hauptpunkte eintreten, so ergeben sich die Gleichungen

$$5)\left\{\begin{aligned} \frac{AS}{A'S} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n}{n'}\frac{AD}{A'D'} = \frac{n}{n'}\frac{AK}{A'K'} = -\frac{n}{n'}\frac{A\bar{K}}{A'\bar{\bar{K}}'} = \\ \frac{AH}{A'H'} = -\frac{A\bar{H}}{A'\bar{\bar{H}}'}. \end{aligned}\right.$$

Es wird also das Neigungsverhältniſs $\frac{\alpha'}{\alpha}$ zweier durch A' und A gehender conjugirter Strahlen durch $\frac{AH}{A'H'}$ und $\frac{\bar{H}A}{A'\bar{\bar{H}}'}$ bestimmt, das Bildgröſsenverhältniſs $\frac{AD}{A'D'}$ aber durch $\frac{AK}{A'K'}$ und $\frac{\bar{K}A}{A'\bar{\bar{K}}'}$.

Läſst man in 5. für A und A' die oben genannten Fundamentalpunkte eintreten, so erhält man die Beziehungen:

$$5a)\left\{\begin{aligned} 1 = -\frac{n}{n'}\frac{K\bar{K}}{K'\bar{\bar{K}}'} = \frac{KH}{K'H'} = -\frac{K\bar{H}}{K'\bar{\bar{H}}'} \\ 1 = -\frac{\bar{K}H}{\bar{\bar{K}}'H'} = \frac{\bar{K}\bar{H}}{\bar{\bar{K}}'\bar{\bar{H}}'} \\ 1 = -\frac{n'}{n}\frac{H\bar{H}}{H'\bar{\bar{H}}'} \end{aligned}\right.$$

Die beiden Punktsysteme:

$$\begin{matrix} & K & H & \bar{H} & \bar{K} \\ \text{und} & \bar{\bar{H}}' & \bar{K}' & K' & H' \end{matrix}$$

sind also congruent, und es verhalten sich die Abstände $H\bar{H}$ und $K\bar{K}$ wie $n : n'$.

Läſst man in die Gleichung 5. für A und A' die Brennpunkte F und F' oder G und G' eintreten, so erhält man:

$$\text{5b)} \begin{cases} FS = \frac{n}{n'} FK = -\frac{n}{n'} F\bar{K} = FH = -F\bar{H} \\ G'S = \frac{n'}{n} G'K' = -\frac{n'}{n} G'\bar{K}' = G'H' = -G'\bar{H}' \end{cases}$$

Der Schnitt conjugirter Strahlen geht also bei den von F ausgehenden Strahlen durch H und bei den sich in G' sammelnden Strahlen durch H'; ferner ergiebt sich F als Mitte von $H\bar{H}$ und $K\bar{K}$, und G' als Mitte von $H'\bar{H}'$ und $K'\bar{K}'$. Läſst man in Gleichung 3. für B und B' entweder F und F', also für T den Punkt H, oder G G', und H' eintreten, so erhält man die Gleichung:

$$\text{6)} \quad \frac{AS}{A'S} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n}{n'} \frac{AF}{HF} = \frac{AF}{KF} \text{ oder } = \frac{n}{n'} \frac{H'G'}{A'G'} = \frac{K'G'}{A'G'}$$

woraus sich

$$\text{6a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad AF \,.\, A'G' = HF \,.\, H'G'$$

ergiebt; läſst man in 3. für A, A' und S die Punkte F, F' und H und für B, B' und T die Punkte G, G' und H' eintreten, so erhält man die Beziehung:

$$\text{7)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{FH}{G'H'} = -\frac{n}{n'};$$

in einem gewöhnlichen dioptrischen System sind also die Hauptbrennweiten entgegengesetzt gerichtet; hat aber das System an einer Seite einen Reflector, so sind die Hauptbrennweiten gleich gerichtet.

8. Um mit Hülfe des Fundamentalgesetzes festzustellen, welcher Art 4 Punkte seyn müssen, die das centrale Gebiet eines dioptrischen Systems bestimmen, führe man die Punkte P, P', Q, Q' ein und bezeichne der Kürze halber für dieselben das Verhältniſs der Längen conjugirter Strahlen oder das umgekehrte Verhältniſs der Neigungen dieser Strahlen mit p und q, so daſs man auch ent-

sprechend $\frac{AS}{A'S} = \frac{\alpha'}{\alpha} = a$ zu setzen hat; man erhält nach Gleichung 3 die Beziehungen:

$$\frac{n}{n'}\frac{PQ}{P'Q'} = p \, . \, q \qquad \frac{n}{n'}\frac{AP}{A'P'} = a \, . \, p \qquad \frac{n}{n'}\frac{AQ}{A'Q'} = a \, . \, q$$

also

$$8) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{AP}{A'P'} : \frac{AQ}{A'Q'} = p : q \, ;$$

es genügen also zur Bestimmung 2 Paare conjugirter Punkte, wenn für dieselben gleichzeitig das Verhältniſs $p : q$ gegeben ist. Aus Gleichung 8 ergeben sich die Beziehungen:

$$8a) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p \, . \, PQ}{PA} - \frac{q \, . \, P'Q'}{P'A'} = p - q \\ PF = \frac{p \, . \, PQ}{p-q} \qquad P'G' = - \frac{q \, . \, P'Q'}{p-q} \\ \frac{PF}{PA} + \frac{P'G'}{P'A'} = 1. \end{array} \right.$$

Setzt man $q = -p$ und bezeichnet die dadurch bestimmten Punkte Q und Q' durch $\overline{P}$ und $\overline{P}'$, so gehen die ersten Gleichungen unter 8a über in:

$$9) \quad . \; . \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P\overline{P}}{PA} + \frac{P'\overline{P}'}{P'A'} = 2 \\ PF = \frac{P\overline{P}}{2} \qquad P'G' = \frac{P'\overline{P}'}{2} \end{array} \right.$$

Es ergiebt sich also, daſs das Gebiet um die Centrallinie allgemein durch 4 Punkte P, P', $\overline{P}$, $\overline{P}'$, bestimmt ist, daſs aber auch einer der beiden Punkte P und $\overline{P}$ durch F und einer der beiden Punkte P' und $\overline{P}'$ durch G' ersetzt werden kann. Als bemerkenswerthe Specialfälle ergeben sich die 4 Knotenpunkte, die 4 Hauptpunkte und die Brennpunkte mit 2 Hauptpunkten und 2 Knotenpunkten; auf dieselben hat Töpler schon aufmerksam gemacht, doch deutet er unrichtig auch eine Combination von 2 Hauptpunkten und 2 Knotenpunkten als eine für die Be-

stimmung des Systems mögliche[1]) an; wie die Beziehungen im Abschnitt 7 zeigen, sind 4 Punkte dieser Art garnicht unabhängig von einander, es müfste zur Bestimmung noch das Verhältnifs $\frac{n}{n'}$ hinzutreten. Andererseits sind, wie aus Obigem hervorgeht, die Specialfälle durchaus nicht erschöpft, denn da aus den beiden Gruppen P, F, $\overline{P}$ und P', G', $\overline{P'}$ Combinationen beliebiger Paare gestattet sind, so sind 9 allgemeine Fälle möglich; bei den Fundamentalpunkten können für die Punkte P entweder die Hauptpunkte oder die Knotenpunkte eintreten, so dafs 18 Fälle denkbar sind, das centrale Gebiet eines dioptrischen Systems durch 4 Fundamentalpunkte, von denen je zwei zu den ein- und austretenden Strahlen gehören, zu bestimmen. — Bildet man nach der zweiten Gleichung unter 8a die Ausdrücke für QF und $Q'G'$, so erhält man die Beziehungen:

$$10) \quad . \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{PF}{QF} = \frac{p}{q} \qquad\qquad \frac{P'G'}{Q'G'} = \frac{q}{p} \\ PF \, . \, P'G' = QF \, . \, Q'G' \end{array} \right.$$

welche, da P und Q ursprünglich ganz beliebige Punkte waren, allgemein gültig sind und die Beziehungen 6 und 6a als Specialfälle enthalten.

9. Denkt man sich auf der Centrallinie einen Lichtpunkt bewegt, so giebt das Fundamentalgesetz über die gleichzeitige Bewegung des Bildpunktes ohne Weiteres Auskunft; man dividire AB und $A'B'$ durch die Wegzeit und lasse B an A herantreten, so ergiebt sich, wenn die Geschwindigkeiten mit v und v' bezeichnet werden:

$$11) \quad . \quad . \quad \frac{v}{v'} = \frac{n'}{n}\left(\frac{AS}{A'S}\right)^2 = \frac{n'}{n}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 = \frac{n}{n'}\left(\frac{AD}{A'D'}\right)^2;$$

es zeigt sich also, dafs das Zeichen von $\frac{v}{v'}$ nur von $\frac{n}{n'}$ abhängig ist; bei einem gewöhnlichen dioptrischen System bewegen sich also Object und Bild immer in derselben Richtung, hat aber das System an einer Seite einen Reflector, so bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung.

1) a. a. O. S. 247.

Für Orientirung im Allgemeinen ist diese Erkenntnifs nicht ohne Werth; hat man z. B. an einem gewöhnlichen dioptrischen System 2 Paare conjugirter Punkte in der Reihenfolge $B'\ A\ B\ A'$ bestimmt, so mufs F zwischen A und B, und G' zwischen B' und A' liegen, denn während der Lichtpunkt von A nach B wandert, mufs der conjugirte Punkt von A' nach B' gehen, aber in derselben Richtung, also durch das Unendliche, und entsprechend sieht man, dafs der Lichtpunkt durch das Unendliche gehen mufs, während der Bildpunkt von B' nach A' wandert. Hat man aber für 2 Paare conjugirter Punkte eine Folge $A\ B\ B'\ A'$ gefunden, so kann man schliefsen, dafs das System symptotische Punkte enthält und zwar, wenn man dieselben mit X und Y bezeichnet, in folgender Lage: $A\ F\ X\ B\ B'\ Y\ G'\ A'$; man hat wiederum nur nöthig, den Lichtpunkt von A nach B zu schieben und andererseits den Bildpunkt von B' nach A' und jedesmal die gleichzeitige Wanderung des conjugirten Punktes zu berücksichtigen. Man erkennt hieraus, dafs ein System mit symptotischen Punkten durch die Folge $A\ B\ B'\ A'$ charakterisirt werden kann.

10. Bekanntlich ist die Gleichung 6a. die brauchbarste zur geometrischen Construction conjugirter Punkte, doch scheint noch nicht, so viel ich weifs, bekannt zu sein, dafs sie auch zur analytischen Bestimmung der Fundamentalpunkte eines Systems oder einer Combination von Systemen überaus geeignet ist und einfachere Resultate liefert als die Gleichung 1. und ähnlich gebildete Gleichungen. Es seien p Systeme in centraler Anordnung gegeben:

$$F\ G;\ F_1\ G_1;\ \ .\ .\ .\ \ F_{p-1}\ G_{p-1};$$

die Brechungsexponenten der einhüllenden Medien seyen:

$$n\quad n_1\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \ n_p$$

die Hauptbrennweiten der combinirten Systeme bezeichne man, der Kürze wegen, mit f und g und zwar in der Richtung $H\ F$ und $H'\ G$, so dafs also

$$f_i = H_i F_i \quad \text{und} \quad g_i = H_i'\ G_i$$

ist; bezeichnet man nun noch die Sammelpunkte der durch kein, durch 1, 2 Systeme gegangenen Strahlen mit

$$A \quad A_1 \quad \ldots \ldots \quad A_p$$

und die Neigungen eines bestimmten Strahles gegen die Centrallinie mit

$$\alpha \quad \alpha_1 \quad \ldots \ldots \quad \alpha_p,$$

so erhält man nach Gleichung 6. die Beziehungen:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{n}{n_1} \frac{AF}{f} \quad \text{oder} \quad = \frac{n}{n_1} \frac{g}{A_1 G}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2} \frac{A_1 F_1}{f_1} \quad \text{oder} \quad = \frac{n_1}{n_2} \frac{g_1}{A_2 G_1}$$

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} = \frac{n_{p-1}}{n_p} \frac{A_{p-1} F_{p-1}}{f_{p-1}} \quad \text{oder} \quad = \frac{n_{p-1}}{n_p} \frac{g_{p-1}}{A_p G_{p-1}}$$

also durch Multiplication:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha} = \frac{n}{n_p} \frac{AF \,.\, A_1 F_1 \ldots A_{p-1} F_{p-1}}{f \,.\, f_1 \ldots f_{p-1}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n}{n_p} \frac{g \cdot g_1 \ldots g_{p-1}}{A_1 G \,.\, A_2 G_1 \ldots A_p G_{p-1}}.$$

Nach Gleichung 6a. treten die Beziehungen hinzu:

$$\text{12a)} \left\{ \begin{array}{c} AF \,.\, A_1 G = f \cdot g \\ A_{p-1} F_{p-1} \,.\, A_p G_{p-1} = f_{p-1} \cdot g_{p-1} \end{array} \right.$$

und außerdem ist:

$$\text{12b)} \left\{ \begin{array}{c} GA_1 + A_1 F_1 = GF_1 \\ G_1 A_2 + A_2 F_2 = G_1 F_2 \\ \vdots \\ G_{p-2} A_{p-1} + A_{p-1} F_{p-1} = G_{p-2} F_{p-1}. \end{array} \right.$$

Setzt man

$$x_i = -A_i F_i, \quad y_i = A_{i+1} G_i, \quad k_i = -f_i \cdot g_i, \quad e_i = G_i F_{i+1}$$

$$a = (-1)^p \frac{\alpha_p}{\alpha} \cdot \frac{n_p}{n} f \cdot f_1 \cdots f_{p-1}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha_p} \frac{n}{n_p} g \cdot g_1 \cdots g_{p-1};$$

so handelt es sich um die Auflösung folgender Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} & x \,.\, y = k & y + x_1 = -e \\ x \,.\, x_1 \ldots x_{p-1} = a & x_1 \,.\, y_1 = k_1 & y_1 + x_2 = -e_1 \\ y \cdot y_1 \ldots y_{p-1} = b & \vdots & \vdots \\ & x_{p-1}\, y_{p-1} = k_{p-1} & y_{p-2} + x_{p-1} = -e_{p-2}. \end{array}$$

Um x zu bestimmen, bilde man folgende Gruppe von Gleichungen:

$$k + ex + x \cdot x_1 = o$$
$$k_1 + e_1 x_1 + x_1 \cdot x_2 = o$$
$$\vdots$$
$$k_{p-2} + e_{p-2} x_{p-2} + x_{p-2} \cdot x_{p-1} = o\,.$$

Nun multiplicire man diese Gleichungen der Reihe nach mit 1, x, xx_1 . . $(xx_1 \,.\,.\, x_{p-2})$, dann kann das letzte Glied der letzten Gleichung durch a ersetzt werden, so dafs in den $p-1$ Gleichungen nur $p-1$ Unbekannte nämlich x, xx_1, xx_1x_2, . . $(xx_1 \,.\,.\, x_{p-2})$ auftreten und somit x bestimmt werden kann. Entsprechend findet man y_{p-1}; eliminirt man aus beiden Ausdrücken $\frac{\alpha}{\alpha_p}$, so erhält man die allgemeine Beziehung der conjugirten Punkte; für die Fundamentalpunkte dagegen nimmt $\frac{\alpha_p}{\alpha}$ die besonderen Werthe ± 1 und $\pm \frac{n}{n_p}$ an, so dafs dieselben aus den Ausdrücken für x und y_{p-1} gefunden werden. Bezeichnet man die Determinante:

$$\begin{array}{cccccccc}
e & 1 & o & & & & & \\
k_1 & e_1 & 1 & & & & & \\
 & k_2 & e_2 & 1 & . & . & & \\
 & & & . & . & . & k_{p-3} & e_{p-3} & 1 \\
 & & & & & & & k_{p-2} & e_{p-2}
\end{array}$$

in welcher die übrigen Stellen der angedeuteten Horizontalreihen durch Null zu besetzen sind, mit D, so ergeben sich die Gleichungen:

$$13)\left\{\begin{array}{l}
D \,.\, AF = \frac{\alpha_p}{\alpha}\frac{n_p}{n} f \,.\, f_1 \,.\,.\, f_{p-1} - f \,.\, g \,.\, \{e_1 \,.\, e_2 \,.\,.\,.\, e_{p-2}\} \\
D \,.\, A_p G_{p-1} = (-1)^{p-1} \frac{\alpha}{\alpha_p}\frac{n}{n_p} g \,.\, g_1 \,.\,.\, g_{p-1} + f_{p-1} \,.\, g_{p-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \{e \,.\, e_1 \,.\,.\, e_{p-3}\}
\end{array}\right.$$

woraus für A und A_p die Beziehung folgt:

$$13a)\left\{\begin{array}{l}\left[D\,.\,AF+f\,.\,g\left\{e_1\,.\,e_2\,..\,e_{p-2}\right\}\right]\left[D\,.\,A_p G_{p-1}-f_{p-1}\,.\,g_{p-1}\right.\\ \qquad\qquad \left.\left\{e\,.\,e_1\,..\,e_{p-3}\right\}\right]=(-1)^{p-1}f\,.\,g\,..\,f_{p-1}\,.\,g_{p-1};\end{array}\right.$$

die beiden Gröfsen $\left\{e\,.\,e_1\,..\,e_{p-3}\right\}$ und $\left\{e_1\,.\,e_2\,..\,e_{p-2}\right\}$ bezeichnen diejenigen Unterdeterminanten von D, deren Diagonalreihen mit den Reihen in den Klammern übereinstimmen.

Es sollen nun die Fundamentalpunkte des resultirenden Systems mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden; führt man die Punkte $\bar{A}$ und $\bar{A}_p$ ein, für welche $\frac{\alpha}{\alpha_p}$ in den Gleichungen 13) durch $-\frac{\alpha}{\alpha_p}$ zu ersetzen ist, und bedenkt man, dafs nach Gleichung 9. $\mathfrak{F}$ die Mitte von $A\bar{A}$ und $\mathfrak{G}$ die Mitte von $A_p\bar{A}_p$ ist, dafs also $AF+\bar{A}F=2\,.\,\mathfrak{F}F$ ist und entsprechend $A_p G_{p-1}+\bar{A}_p G_{p-1}=2\ \mathfrak{G}G_{p-1}$, so erhält man

$$14)\,.\quad\left\{\begin{array}{l}D\,.\,\mathfrak{F}F=-f\,.\,g\left\{e_1\,.\,e_2\,..\,e_{p-2}\right\}\\ D\,.\,\mathfrak{G}G_{p-1}=f_{p-1}\,.\,g_{p-1}\left\{e\,.\,e_1\,..\,e_{p-3}\right\};\end{array}\right.$$

für die Gröfsen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ wird $\frac{\alpha}{\alpha_p}=\frac{n_p}{n}$ und aufserdem ist $\mathfrak{H}\mathfrak{F}=\mathfrak{H}F+F\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}'\mathfrak{G}=\mathfrak{H}'G_{p-1}+G_{p-1}\mathfrak{G}$, also ergiebt sich:

$$14a)\,.\quad .\quad\left\{\begin{array}{l}D\,.\,\mathfrak{H}\mathfrak{F}=f\,.\,f_1\,..\,f_{p-1}\\ D\,.\,\mathfrak{H}'\mathfrak{G}=(-1)^{p-1}g\,.\,g_1\,..\,g_{p-1}\end{array}\right.$$

Für ein aus den vier Systemen FG, F_1G_1, F_2G_2, F_3G_3 combinirtes System ergiebt sich also z. B.:

$$\begin{array}{l}D\,.\,\mathfrak{F}F=-f\,.\,g\,.\,(e_1\,.\,e_2+f_2\,.\,g_2)\\ D\,.\,\mathfrak{G}G_3=f_3\,.\,g_3\,.\,(e\,.\,e_1+f_1\,.\,g_1)\\ D\,.\,\mathfrak{H}\mathfrak{F}=f\,.\,f_1\,.\,f_2\,.\,f_3\\ D\,.\,\mathfrak{H}'\mathfrak{G}=-g\,.\,g_1\,.\,g_2\,.\,g_3,\end{array}$$

wo $D=e\,.\,e_1\,.\,e_2+e\,.\,f_2\,.\,g_2\,.+e_2\,.\,f_1\,.\,g_1$ und $e=GF_1$, $e_1=G_1F_2$, $e_2=G_2F_3$ ist.

Uebrigens wird man bei einer gröfseren Anzahl von Systemen gut thun, die numerischen Werthe in die Determinanten einzuführen, da sich dieselben, ihres einfachen Baues wegen, leichter berechnen lassen als die aus ihnen entwickelten Ausdrücke; man gelangt nämlich bei denselben zu einer Determinante niederer Ordnung, wenn man das letzte Glied der letzten Horizontalreihe als Factor heraussetzt und die dadurch gewonnene untere Reihe von der vorletzten subtrahirt, also z. B.:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2 . 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 8{,}5 \end{vmatrix} = -2 . 2 . 27{,}5$$

Da hiernach die für die Determinante $\left\{e_1 . e_2 . . e_{p-1}\right\}$ geführte Rechnung unmittelbar zu dem Werth der Determinante D führt, so ist nur die Arbeit für die numerische Berechnung von zwei Determinanten erforderlich, um sämmtliche Fundamentalpunkte des resultirenden Systems zu bestimmen. — Handelt es sich um die Bestimmung der Fundamentalpunkte eines sphärischen Systems mit den Radien $r_i = C_i M_i$, so hat man in die Gleichungen 13) und 14) die Werthe:

$$15) \left\{ \begin{aligned} f_i &= \frac{n_i}{n_i - n_{i+1}} r_i \\ g_i &= -\frac{n_i}{n_i - n_{i+1}} r_i \end{aligned} \right. \qquad e_i = -g_i + C_i C_{i+1} + f_{i+1}$$

einzuführen. Man erhält aus 14a) die Hauptbrennweiten des Systems und aus 14) die Abstände der Brennpunkte von den Brennpunkten der ersten und letzten brechenden Fläche; will man die Abstände der Brennpunkte von diesen brechenden Flächen selbst haben, so ergiebt sich aus der Gleichung $\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}F + FC$ und aus der entsprechenden:

$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}F - \frac{n}{n - n_1} r$$

$$\text{und } \mathfrak{G}C_{p-1} = \mathfrak{G}G_{p-1} + \frac{n_{p-1}}{n_{p-1} - n_p} r_{p-1}.$$

II.

11. Es soll nun das centrale Gebiet verlassen werden und an Stelle der einen als Axe benutzten Centrallinie sollen 2 Axen, die eine für die auffallenden, die andere für die austretenden Strahlen eingeführt werden. In Fig. 3 schneide ein auffallender Strahl die erste brechende Fläche in P und die Centrallinie in E unter dem Winkel ε; der Strahl PE bilde mit dem Radius PM den Winkel φ und erzeuge den gebrochenen Strahl PE_1, welcher mit PM den Winkel ψ bildet und die Centrallinie unter dem Winkel E_1 schneidet; der Strahl PE_1 schneide die zweite brechende Fläche in P_1, indem er mit dem Radius $P_1 M_1$ den Winkel φ_1 bildet, während der gebrochene Strahl $P_1 E_2$ den Winkel ψ_1 bildet u. s. w.; der schliefslich austretende Strahl schneidet die Centrallinie in E_p unter dem Winkel ε_p; es sollen dann die beiden Linien PE und $P_{p-1}\,E_p$ als die Axen angesehen werden, ihre analytische Abhängigkeit von einander wird durch ein System von Gleichungen:

$$16) \quad \sin\varphi_i = \frac{E\ M_i}{r_1}\sin\varepsilon_i,\ \sin\psi_i = \frac{n_i}{n_{i+1}}\sin\varphi_i,$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \varphi_i + \psi_i,\ E_{i+1}\,M_i = \frac{r_i}{\sin\varepsilon_{i+1}}\sin\psi_i,$$

worin i alle Werthe von o bis $p-1$ annimmt, gegeben. Wenn PE zur Axe der auffallenden Strahlen gemacht wird, so heifst das, es sollen nur Lichtpunkte berücksichtigt werden, welche auf der unbegränzten Linie PE oder in ihrer Nähe liegen und von diesen Lichtpunkten nur Strahlen, welche kleine Winkel mit PE bilden. Denkt man sich zunächst auf der Axe (E, ε) selbst einen Sammelpunkt A eines unendlich dünnen die Axe umfassenden Strahlenbündels, so kann man sich in demselben unendlich viel von A ausgehende, die Axe enthaltende ebene Strahlenbüschel denken; nur zwei dieser ebenen Strahlenbüschel können nach den allgemeinen Untersuchungen von Hamilton und Kummer[1]) Sammelpunkte der gebrochenen Strah-

1) Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 57, S. 189.

len auf der Axe (E_ν, ε_ν) haben; offenbar wird das in der Centralebene (Zeichenebene) liegende ebene Strahlenbüschel A, da seine Strahlen immer in derselben Ebene bleiben, Sammelpunkte $A_1 . A_2 .. A_\nu$ für die gebrochenen Strahlen haben können; dafs diese Vereinigungen stets stattfinden müssen, ist schon öfter[1]) bewiesen und läfst sich, wie aus Nachfolgendem hervorgeht, überaus einfach ableiten; das Gleiche gilt in Bezug auf das von A ausgehende zur Centralebene rechtneigig stehende ebene Strahlenbüschel A' mit den zugehörigen Sammelpunkten A_1', .. A_ν'. Es soll zunächst für jede der beiden Arten von Büscheln das Fundamentalgesetz bewiesen und erläutert werden.

12. In Fig. 4 Taf. III sey PA ein Stück der Axe, PM der Radius der ersten brechenden Fläche, PA_1 der gebrochene Strahl, die Winkel APM und A_1PM werden mit φ und ψ bezeichnet; in Bezug auf einen benachbarten Strahl QA treten die entsprechenden Gröfsen QM, QA_1, φ_1, ψ_1 auf; die dadurch bei A, A_1 und M gebildeten Winkel bezeichne man mit α, α_1 und μ, dann ergeben sich unmittelbar die Beziehungen:

$$\alpha = \frac{PQ}{PA}\cos\varphi \qquad \alpha_1 = \frac{PQ}{PA_1}\cos\psi \qquad \mu = \frac{PQ}{PM}$$

und mit Benutzung zusammenstofsender Dreiecke die Winkelbeziehungen:

$$\varphi + \alpha = \varphi_1 + \mu \qquad \psi + \alpha_1 = \psi_1 + \mu.$$

Da sich nun aus den beiden Gleichungen:

$$n \sin\varphi = n_1 \sin\psi \quad \text{und} \quad n \sin\varphi_1 = n_1 \sin\psi_1$$

mit Vernachlässigung von Gröfsen höherer Ordnung die Beziehung:

$$n(\varphi_1 - \varphi)\cos\varphi = n_1(\psi_1 - \psi)\cos\psi$$

ergiebt, so folgt aus den oben aufgestellten Werthen die Gleichung:

1) Vergl. Hermann, Ueber den schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen, Zürich 1874, S. 9 oder Pogg. Ann. Bd. 153, S. 471. Siehe Bemerkungen von Krüfs in Pogg. Ann. Bd. 157, S. 335.

$$n(\alpha - \mu) \cos \varphi = n_1 (\alpha_1 - \mu) \cos \psi$$

also

17) . $\frac{n \cos^2 \varphi}{PA} - \frac{n_1 \cos^2 \psi}{PA_1} = \frac{n \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{PM}$

neben der noch die Beziehung:

17a) . . . . . $\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{PA}{PA_1} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$

von Bedeutung ist. Da die Gleichung 17. von α unabhängig ist, so ergiebt sich aus derselben, dafs A_1 wirklich ein Sammelpunkt für das unendlich dünne ebene Strahlenbüschel A ist; in gleicher Weise folgt, dafs A_1 einen Sammelpunkt A_2 hervorruft u. s. w.

13. Stellt man zu 17. die zugehörigen Gleichungen für $A_2 \,.\,.\, A_p$, bildet die entsprechenden für ein ebenes Strahlenbüschel B, $B_1 \,.\,.\, B_p$ und subtrahirt die entsprechenden Gleichungen von einander, so erhält man p neue Gleichungen, deren erste folgende ist:

$$\frac{n \,.\, AB \,.\, \cos^2 \varphi}{PA \,.\, PB} = \frac{n_1 \,.\, A_1 B_1 \,.\, \cos^2 \psi}{PA_1 \,.\, PB_1};$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit einander und berücksichtigt, dafs aus 17a. und den zugehörigen Gleichungen die Beziehung:

18) $\frac{\alpha_p}{\alpha} = \frac{PA \,.\, P_1 A_1 \,.\,.\,.\, P_{p-1} A_{p-1}}{PA_1 \,.\, P_1 A_2 \,.\,.\,.\, P_{p-1} A_p} \; \frac{\cos \psi \,.\, \cos \psi_1 \,.\,.\,.\, \cos \psi_{p-1}}{\cos \varphi \,.\, \cos \varphi_1 \,.\,.\,.\, \cos \varphi_{p-1}}$

folgt, so ergiebt sich das Fundamentalgesetz in der Form:

19) . . $n \,.\, \alpha \,.\, \beta \,.\, AB = n_p \,.\, \alpha_p \,.\, \beta_p \,.\, A_p B_p$.

Wenn keine Verwechslung möglich ist, soll für die austretenden Strahlen 1 an Stelle des Index p gebraucht werden; es ergeben sich dann also aus 19., indem man für $\frac{\beta_1}{\beta}$ oder $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ die Werthe ± 1 oder $\pm \frac{n}{n_1}$ einführt, die Beziehungen:

19a) $\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{n}{n_1} \frac{AK}{A_1 K_1} = -\frac{n}{n_1} \frac{A\bar{K}}{A_1 \bar{K}_1} = \frac{AH}{A_1 H_1} = -\frac{A\bar{H}}{A_1 \bar{H}_1}$

und sämmtliche Beziehungen unter 5a. Die Brennpunkte führe man durch die Betrachtungen des Abschnittes 8. ein,

indem man p und q nicht als die Verhältnisse der Längen conjugirter Strahlen, sondern als die umgekehrten Verhältnisse der Axen-Neigungen dieser Strahlen nimmt; man erhält dann aus den Gleichungen 9 und 10, in denen P und Q beliebige Punkte sind, vornehmlich die Beziehungen:

$$20)\quad \left\{ \begin{array}{ll} 2 \,.\, AF = A\bar{A} & 2 \,.\, A_1 G_1 = A_1 \bar{A}_1 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha} : \frac{\beta_1}{\beta} = AF : BF = B_1 G_1 : A_1 G_1 & \end{array} \right.$$

woraus dann die einfacheren Beziehungen:

$$20\text{a})\quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{AF}{KF} = \frac{K_1 G_1}{A_1 G_1} = \frac{n}{n_1} \frac{AF}{HF} = \frac{n}{n_1} \frac{H_1 G_1}{A_1 G_1} \\ \frac{n}{n_1} = \frac{HF}{KF} \\ AF \,.\, A_1 G_1 = HF \,.\, H_1 G_1 \end{array} \right.$$

und andere folgen. Für die Fundamentalpunkte speciell ergiebt sich also, dafs die beiden Punktreihen:

$$K \quad H \quad F \quad \bar{H} \quad \bar{K}$$

und

$$\bar{H}_1 \quad \bar{K}_1 \quad G_1 \quad K_1 \quad H_1$$

in Bezug auf F und G_1 symmetrisch und einander congruent sind und dafs sich $FH : FK$ verhält wie $n : n_1$. — Auch für das Bildgröfsenverhältnifs $\frac{AD}{A_1 D_1}$ ergiebt sich die Beziehung 4) $\frac{AD}{A_1 D_1} = \frac{n_1}{n} \frac{\alpha_1}{\alpha}$, wenn D und D_1 in der Centralebene gedacht werden, denn da nach der Definition der Punkte K und K_1 der Winkel DAK gleich dem Winkel $D_1 A_1 K_1$ ist (Fig. 5 Taf. III), weil ja KD und $K_1 D_1$ conjugirte Strahlen sind, so hat man ähnliche Dreiecke, also ergiebt sich:

$$21)\quad \frac{AD}{A_1 D_1} = \frac{AK}{A_1 K_1} \text{ und somit nach 19a} = \frac{n_1}{n} \,.\, \frac{\alpha_1}{\alpha} \,.$$[1]

Eine Abweichung von den Gesetzen des centralen Gebietes zeigt sich nur in Bezug auf die Schnittlinie conjugirter Strahlenbüschel; diese gehen nämlich alle durch einen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt S der beiden

1) Da $\frac{AD}{A_1 D_1} = \frac{\beta \,.\, AB}{\beta_1 \,.\, A_1 B_1}$ gesetzt werden kann, so ergiebt sich die Gleichung 21 auch unmittelbar aus dem Fundamentalgesetz.

Axen, und unterscheiden sich nur durch die Winkel β und β_1, welche sie mit den Axen bilden; es ist offenbar:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{SA}{SA_1} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta};$$

zur Construction dieser Linie, soll der Schnittpunkt V derselben mit der Linie AA_1 (Fig. 6 Taf. III) bestimmt werden; man nehme auf VS einen benachbarten Punkt U zu S und ziehe UA und UA_1, so sind die dadurch gebildeten Winkel bei A und A_1 die Gröfsen α und α_1; man erhält mit Berücksichtigung von 22 und 20a:

$$23)\quad \begin{cases} \dfrac{VA}{VA_1} = \dfrac{SA}{SA_1}\,\dfrac{\sin\beta}{\sin\beta_1} = \dfrac{SA_1}{SA_1{}^2}\,\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{SA^2}{SA_1{}^2}\cdot\dfrac{KF}{AF} \text{ oder} \\ \qquad = \dfrac{SA^2}{SA_1{}^2}\,\dfrac{A_1G_1}{K_1G_1}. \end{cases}$$

Fallen die beiden Axen zusammen, so treten auch V und S zusammen und man erhält die Beziehungen in Gleichung 6. Für die parallel austretenden Strahlen liegt A_1 im Unendlichen, man erhält also:

$$23\text{a})\quad . \quad . \quad VF = SF\,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{SF^2}{G_1K_1},$$

wo φ und φ_1 die Winkel bezeichnen, welche der Schnitt der von F auffallenden und der zu einander parallel austretenden Strahlen mit den Axen bildet. Entsprechend erhält man für die parallel auffallenden Strahlen:

$$23\text{b})\quad . \quad . \quad VG_1 = SG_1\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma} = \frac{SG_1{}^2}{FK},$$

wenn γ und γ_1 die Winkel sind, welche der Schnitt der mit der Axe parallel auffallenden und der nach G_1 hin austretenden Strahlen mit den Axen bildet. In beiden Fällen ergeben sich übereinstimmende Constructionen; um z. B. den zuletzt bezeichneten Schnitt zu finden, braucht man nur von S aus SR gleich und gleichgerichtet mit FK zu machen, durch die 3 Punkte S, R und G_1 einen Kreis zu legen und und an diesen durch S eine Tangente zu ziehen, denn wenn man durch G_1 eine Parallele zu der ersten Axe zieht und deren Schnittpunkt mit der gewonnenen Tangente V nennt, so hat die Linie VG_1 (Fig. 7

Taf. III) die verlangte Eigenschaft. Beim Zusammenfallen der beiden Axen ergiebt sich aus 23a und b:

$$SF = G_1 K_1 \quad \text{also} \quad = HF$$
$$SG_1 = FK \quad \text{also} \quad = H_1 G_1 .$$

14. In Bezug auf die analytische Bestimmung der Fundamentalpunkte und die analytische Beziehung der conjugirten Punkte erhält man aus 20a dieselben Bedingungsgleichungen, wie sie in Abschnitt 10. aufgestellt sind, also mufs man auch die durch die Gleichungen 13, 13a, 14 und 14a gefundenen Resultate gewinnen, für welche aber nicht die Werthe der Gleichungen 15 gelten, sondern diejenigen, welche sich aus Gleichung 17 ergeben; man erhält unmittelbar für die erste brechende Fläche:

$$PF = \frac{n \cos^2\varphi \,.\, PM}{n \cos\varphi - n_1 \cos\psi} \quad \text{und} \quad PG_1 = -\frac{n_1 \cos^2\psi \,.\, PM}{n \cos\varphi - n_1 \cos\psi};$$

zur Bestimmung der conjugirten Punkte H und H_1 tritt zu Gl. 17 die Bedingung aus 17a:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{PH}{PH_1} \, \frac{\cos\psi}{\cos\varphi};$$

hat man PH und PH_1 bestimmt, so wird $HF = HP + PF$ und entsprechend $H_1 G_1$ gefunden; man erhält:

$$HF = \frac{n \cos\varphi \,.\,.\, \psi \cos PM}{n \cos\varphi - n_1 \cos\psi}$$
$$H_1 G_1 = -\frac{n_1 \cos\varphi \cos\psi \,.\, PM}{n \cos\psi - n_1 \cos\psi};$$

dieselben Beziehungen ergeben sich bei den übrigen brechenden Flächen und somit sind folgende Werthe in die Gleichungen 13 und 14 einzuführen:

$$24) \left\{ \begin{aligned} f_i &= \frac{n_i \cos\varphi_i \cos\psi_i}{n_i \cos\varphi_i - n_{i+1} \cos\psi_i} \, r_i \\ g_i &= \frac{n_{i+1} \,.\, \cos\varphi_i \,.\, \cos\psi_i}{n_i \cos\varphi_i - n_{i+1} \cos\psi_i} \, r_i \\ e_i &= G_i F_{i+1} = G_i P_i + P_i P_{i+1} + P_{i+1} F_{i+1} \\ G_i P_i &= \frac{n_{i+1} \,.\, \cos^2\psi_i}{n_i \cos\varphi_i - n_{i+1} \cos\psi_i} \, r_i \\ P_i F_i &= \frac{n_i \cos^2\varphi_i}{n_i \cos\omega_i - n_{i+1} \cos\psi_i} \, r_i \\ P_i P_{i+1} &= \frac{r_i \sin(\varepsilon_{i+1} - \psi_i) - r_{i+1} \sin(\varepsilon_{i+1} - \varphi_{i+1})}{\sin \varepsilon_{i+1}} \end{aligned} \right.$$

wo die Werthe ε, φ und ψ aus Gleichung 16 zu entnehmen sind und f, g und r die Richtungen HF, $H_1 G_1$ und PM haben.

15. Es sey nun in der Centralebene im Gebiet der ersten Axe ein Lichtpunkt A mit den Coordinaten x und y gegeben, es soll der conjugirte Punkt A_1 mit den Coordinaten x_1 und y_1 bestimmt werden; die Gröſsen x und x_1 sollen von K und K_1 in der Richtung SK und SK_1 (Fig. 8 Taf. III) gezählt werden und die positiven Richtungen von y und y_1 müssen übereinstimmend gewählt werden, d. h. so, daſs sie beim Zusammenfallen der Axen identisch werden; führt man noch die Punkte $\bar{K}$ und $\bar{K}_1$ ein, so ist:

$$\bar{K}K = H_1\bar{H}_1 = 2H_1G_1 = 2g$$
$$\text{und } \bar{K}_1K_1 = H\bar{H} = 2HF = 2f;$$

da nun KA und K_1A_1 conjugirte Strahlen sind und nach der Definition von K und K_1 die Gröſsen tg AKB und tg $A_1K_1B_1$ gleich sind, so erhält man

$$\frac{BA}{KB} = \frac{B_1A_1}{K_1B_1} \quad \text{also} \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1};$$

die Gröſsen tg $A\bar{K}B$ und tg $A_1\bar{K}_1B_1$ sind aber entgegengesetzt, also ergiebt sich andererseits:

$$\frac{BA}{\bar{K}B} = -\frac{B_1A_1}{\bar{K}_1B_1} \quad \text{also} \quad \frac{y}{2g+x} = -\frac{y_1}{2f+x_1},$$

woraus folgende Gleichungen zu entnehmen sind:

$$25)\ .\ \begin{cases} x_1 = -\dfrac{f.x}{g+x} & y_1 = -\dfrac{fy}{g+x} \\ x = -\dfrac{gx_1}{f+x_1} & y = -\dfrac{gy_1}{f+x_1}. \end{cases}$$

Ist also in der Centralebene im Gebiet der ersten Axe eine Lichtlinie gegeben, deren Gleichung $F(x, y) = a$ ist, so wird das Lichtbild derselben in der Centralebene durch die Gleichung:

$$F\left(-\frac{gx_1}{f+x_1}, -\frac{gy_1}{f+x_1}\right) = a$$

bestimmt, es wird also bei der Abbildung der Grad der Curve nicht geändert, eine gerade Lichtlinie wird durch

eine Gerade abgebildet, ein Kegelschnitt durch einen anderen und zwar ergiebt sich, daſs wenn die eine Axe des Kegelschnittes der Axe der auffallenden Strahlen parallel ist, so findet bei dem Bilde die gleiche Beziehung zu der Axe der austretenden Strahlen Statt.

16. Betrachtet man nun das zu dem Strahlenpunkt A gehörige ebene Flächenbüschel A', welches zu der Centralebene (Zeichenebene) rechtneigig steht, so soll zunächst gezeigt werden, daſs dasselbe einen Sammelpunkt A'_1 erzeugt, welcher auf AM liegt (Fig. 4, Taf. III.). Man denke sich in P zu der Zeichenebene ein kleines Loth PR errichtet, so ist R noch, mit Vernachlässigung der Gröſsen zweiterOrdnung, auf der ersten brechenden Fläche zu denken,

denn es ist $MR = \sqrt{MP^2 + PR^2} = MP\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{PR}{MP}\right)^2\right]$;

vergleicht man weiter auch noch die beiden Seiten AR und AP der beiden Dreiecke APM und ARM, so stimmen auch diese bis auf Gröſsen zweiter Ordnung überein, also müssen auch sämmtliche Gröſsen der beiden Dreiecke APM und ARM, welche entsprechende analytische Beziehungen haben, da sie als Functionen der drei Seiten des Dreiecks gedacht werden können, bis auf Gröſsen zweiter Ordnung übereinstimmen. Denkt man sich nun im Dreieck ARM die Seite AR als einen auffallenden Strahl, welcher mit PM den Winkel φ' bildet und construirt den gebrochenen Strahl RU, wobei U der Schnittpunkt mit AM ist, so hat Winkel $\psi' = URM$ zu φ' dieselbe analytische Beziehung, wie ψ zu φ, also hat auch MU dieselbe analytische Beziehung zu den drei Seiten des Dreiecks APM wie MA'_1 zu den drei Seiten des Dreiecks APM, also müssen MU und MA_1' bis auf Gröſsen zweiter Ordnung übereinstimmen, d. h. für einen unendlich schmalen ebenen Büschel A' ist A'_1 der Sammelpunkt und zwar steht der Büschel A'_1 auch rechtneigig zur Centralebene, so daſs der Schluſs von A'_1 auf A'_2 u. s. w. berechtigt ist. Da nun A'_1 auf AM liegt, so ist die Be-

ziehung zwischen $PA' = PA$, PA'_1 und PM sehr leicht gewonnen, es ist

$$\Delta APM - \Delta A'_1 PM = \Delta A' PA'_1;$$

drückt man den Inhalt der Dreiecke durch die Winkel φ, ψ und $\varphi - \psi$ aus und dividirt durch das Product $PA' . PA'_1 . PM$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\sin \varphi}{PA'_1} - \frac{\sin \psi}{PA'} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{PM}$$

also:

$$26) \quad . \quad . \quad \frac{n}{PA'} - \frac{n_1}{PA'_1} = \frac{n \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{PM}$$

zu welcher noch die Beziehung:

$$26a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\alpha'_1}{\alpha'} = \frac{PA'}{PA'_1}$$

tritt, wenn α' und α_1' die Winkel sind, welche conjugirte Strahlen der Büschel A' und A_1' mit den Axen bilden. In schon bekannter Weise ergiebt sich aus diesen Gleichungen 26 und 26a die Beziehung:

$$\frac{\alpha'_p}{\alpha'} = \frac{PA' . P_1 A'_1 . . P_{p-1} A'_{p-1}}{PA'_1 . P_1 A'_2 . . P_{p-1} A'_p}$$

und damit das Fundamentalgesetz:

$$27) \quad . \quad . \quad n . \alpha' . \beta' . A'B' = n_p . \alpha'_p . \beta'_p . A'_p B'_p;$$

aus demselben ergeben sich die Beziehungen 19a, 20, 20a und 21, nur daſs überall Accente hinzugedacht werden müssen. Nur die Betrachtung für den Schnitt der Büschel A' und A'_p gestaltet sich wieder eigenartig; die beiden Büschel schneiden sich in einem zur Centralebene in S (Fig. 6, Taf. III) errichteten Loth, aber es treffen sich auf demselben nicht die conjugirten Strahlen, sondern es werden durch diese auf dem Loth nur affine Gebilde erzeugt; bezeichnet man wieder die austretenden Strahlen mit dem Index 1 und somit zwei entsprechende Punkte auf dem Lothe mit R und R_1, so erhält man die Gleichungen:

$$SR = SA' . \alpha' \qquad SR_1 = SA'_1 . \alpha_1'$$

also mit Hülfe von 20a

$$28)\quad \frac{SR}{SR_1} = \frac{SA'}{SA'_1} \cdot \frac{F'K'}{F'A'} \quad \text{oder} \quad = \frac{SA'}{SA'_1} \cdot \frac{G'_1A'_1}{G'_1K'_1};$$

da die Ausdrücke von α' und α'_1 frei sind, so sind die Punktreihen R und R_1 affin; fallen die beiden Axen zusammen, so werden die Ausdrücke nach Gleichung 6 und 5b der Einheit gleich, die Punktreihen R und R_1 werden also congruent. Bei den parallel auffallenden und nach G'_1 austretenden Strahlen ergiebt sich nach 28 für die Punktreihen R und R_1 die Beziehung:

$$28a)\quad \ldots\ldots \frac{SR}{SR_1} = \frac{F'K'}{SG'_1}$$

und für die von F' auffallenden und parallel austretenden Strahlen ergiebt sich:

$$28b)\quad \ldots\ldots \frac{SR}{SR_1} = \frac{SF'}{G'_1K'_1}.$$

17. Für die analytischen Bestimmungen gelten die Betrachtungen aus dem Abschnitt 14, nur müssen die Gröfsen f', g', e' eingeführt werden, welche sich aus Gleichung 26 ergeben:

$$29)\quad \begin{cases} f'_i = \dfrac{n_i}{n_i \cos\varphi_i - n_{i+1}\cos\psi_i}\, r_i \\ g'_i = -\dfrac{n_{i+1}}{n_i\cos\varphi_i - n_{i+1}\cos\psi_i}\, r_i \\ e'_i = G'_iF'_{i+1} = G'_iP_i + P_iP_{i+1} + P_{i+1}F'_{i+1} = \\ \qquad -g'_i + P_iP_{i+1} + f'_{i+1}. \end{cases}$$

Soll zu einem Lichtpunkt A', welcher sich in der rechtneigigen Ebene in der Nähe der ersten Axe befindet, der conjugirte Punkt A'_1 bestimmt werden, so genügt es, die Punkte K', $\overline{K'}$, K'_1 und $\overline{K'}_1$ in Anwendung zu bringen; man erkennt, dafs A'_1 in einer Ebene liegen mufs, welche rechtneigig zur Centralebene durch die zweite Axe gelegt ist. Bezeichnet man die Coordinaten von A' mit x' und z', wobei x' von K' aus gezählt ist, und die Coordinaten von A'_1 mit x'_1 und z'_1, so erhält man, entsprechend den Gleichungen 25, die Beziehungen:

$$30)\quad \begin{cases} x_1' = -\dfrac{f'x'}{g'+x'} & z_1' = -\dfrac{f'z'}{g'+x'} \\ x' = -\dfrac{g'x'_1}{f'+x'_1} & z' = -\dfrac{g'z'_1}{f'+x'_1}, \end{cases}$$

aus denen auch in diesem Falle für die Lichtlinie und ihr Bild eine Uebereinstimmung im Grade folgt.

18. In einem zweiaxigen Strahlensystem giebt es, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, 3 conjugirte Punkte, denn zu einem Punkte der ersten Axe gehören zwei Bildpunkte A_1 und A'_1 und zu einem Punkte A_1 der zweiten Axe gehören, da derselbe als erster oder zweiter Bildpunkt gedacht werden kann, zwei Lichtpunkte A und A'; es soll zunächst gezeigt werden, dafs die zu demselben A gehörigen Punkte A_1 und A'_1 und ebenso die zu demselben A_1 gehörigen Punkte A und A' die gewöhnliche Beziehung conjugirter Punkte haben; es ist nämlich:

$$FF' = FA + AF' = \frac{f'.g'}{A'_1\,G'_1} - \frac{f.g}{A_1\,G_1},$$

führt man also die den Brennpunkten entsprechenden Punkte L_1 und L'_1 ein, so erhält man:

$$31)\quad \begin{cases} L_1\,G_1 = -\dfrac{f.g}{FF'} & L'_1G'_1 = \dfrac{f'.g'}{FF'} \\ \dfrac{L_1\,G_1}{A_1\,G_1} + \dfrac{L'_1\,G'_1}{A'_1\,G'_1} = 1 & A_1L_1.A'_1L'_1 = G_1L_1.G'_1L'_1. \end{cases}$$

Die Punkte G_1 und G'_1 erscheinen in der letzten Gleichung als conjugirte, was auch zutreffend ist, da sie sich beide auf den Lichtpunkt $G = \infty$ beziehen.

Entsprechend erhält man für die beiden Punkte A und A', welche demselben Punkt A_1 conjugirt sind, wenn man auf der ersten Axe die den Brennpunkten entsprechenden Punkte L und L' einführt, folgende Beziehungen:

$$31a)\quad \begin{cases} LF = -\dfrac{f.g}{G_1\,G'_1} & L'F' = \dfrac{f'.g'}{G_1\,G'_1} \\ \dfrac{LF}{AF} + \dfrac{L'F'}{A'F'} = 1 & AL.A'L' = FL.F'L'; \end{cases}$$

in der letzten Gleichung treten die Punkte F und F' als

conjugirte auf, was zutreffend ist, da sie denselben Brennpunkt $F_1 = \infty$ haben. — Besonderes Interesse erregen die symptotischen Punkte des Systems 31, denn das sind diejenigen Punkte, bei denen die Bildpunkte zusammenfallen, also eine homocentrische Sammlung der Strahlen stattfindet. Nach den Auseinandersetzungen im Abschnitt 9 sind symptotische Punkte möglich, wenn eine Ordnung L_1, B_1, B'_1, L'_1 eintreten kann; dieselbe wird möglich seyn, wenn $\sqrt{L_1 B_1 \,.\, B'_1 L'_1}$ kleiner ist als $\frac{1}{2} L_1 L'_1$, denn ihr nothwendiges Eintreten unter dieser Bedingung wird unmittelbar eingesehen, wenn man $L_1 B_1$ und $B'_1 L'_1$ gleich lang wählt, man erhält somit für das Eintreten symptotischer Punkte die Bedingung:

$$\frac{2}{FF'} \sqrt{f \,.\, g \,.\, f' \,.\, g'} < L_1 L'_1 \,.$$
$$< L_1 G_1 + G_1 G'_1 + G'_1 L'_1 ,$$

woraus leicht die Bedingung:

$$32) \;.\quad FF' \,.\, G'_1 G_1 < \left(\sqrt{-f \,.\, g} - \sqrt{-f' \,.\, g'}\right)^2$$

abgeleitet wird; sucht man die symptotischen Punkte durch die Gleichungen:

$$L_1 X_1 + X_1 L'_1 = L_1 L'_1 \quad \text{und} \quad X_1 L_1 \,.\, X_1 L'_1 = G_1 L_1 \,.\, G'_1 L'_1$$

unmittelbar zu bestimmen, so werden reelle Wurzelwerthe auch nur durch die Bedingung:

$$4 f \,.\, f' \,.\, g \,.\, g' < FF'^2 \,.\, L_1 L'^2_1$$

ermöglicht, aus welcher 32 hervorgeht; die symptotischen Punkte des Systems 31a führen auf die Bedingung

$$4 f \,.\, f' \,.\, g \,.\, g' < G_1 G'^2_1 \,.\, LL'^2 ,$$

welche gleichfalls in 32 übergeht. Bezeichnet man den Lichtpunkt, welcher einen symptotischen Punkt X_1 zum Bilde hat, mit Z, so gehen die zu X_1 conjugirten Strahlenbüschel A und A' beide von Z aus, d. h. Z ist einer der symptotischen Punkte X; die Punkte X und X_1 sind daher doppelt conjugirt, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$XF \,.\, X_1 G_1 = f \,.\, g \qquad XF' \,.\, X_1 G'_1 = f' \,.\, g' —.$$

Die Punktreihen A und A_1 werden durch die 4 Punkte

$\bar{K}, K, \bar{K}_1$ und K_1 oder durch 4, welche sie ersetzen können, bestimmt; zur Bestimmung der Punktreihen A' und A'_1 sind nur die 4 Punkte $\bar{K}', K', \bar{K}'_1$ und K'_1 erforderlich; da aber nach den Gleichungen 5a und ihren analogen:

$$33) \quad \ldots \quad \frac{\bar{K}K}{\bar{K}_1 K_1} = -\frac{n_1}{n} = \frac{\bar{K}'K'}{\bar{K}'_1 K'_1}$$

ist, so sind die genannten 8 Punkte nicht von einander unabhängig und es genügen also 7 Punkte in einem 2axigen System, um die conjugirten Punkte A, A_1, A'_1 und A, A', A_1 vollständig zu bestimmen. Aus Gleichung 33 ergiebt sich ferner:

$$\frac{\bar{K}K}{\bar{H}H} = \frac{\bar{K}'K'}{\bar{H}'H'}$$

und die entsprechende Beziehung; es folgt also, daſs die beiden Punktreihen:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{K} & \bar{H} & F & H & K \\ \bar{K}' & \bar{H}' & F' & H' & K' \end{array}$$

und ebenso die beiden Reihen der andern Axe einander affin sind. Fallen in den beiden angeführten Punktreihen die Punkte F und F' zusammen, so müssen auch die übrigen zusammenfallen, und es werden nicht nur die Systeme der Fundamentalpunkte auf der zweiten Axe congruent, sondern allgemein die Punktreihen A_1 und A'_1; es ergiebt sich nämlich aus den Gleichungen

$AF \,.\, A_1 G_1 = HF \,.\, H_1 G_1$ und $AF' \,.\, A'_1 G'_1 = H'F' \,.\, H'_1 G'_1$

wenn $AF = AF'$ wird:

$$\frac{A_1 G_1}{A'_1 G'_1} = \frac{HF}{H'F'} \cdot \frac{H_1 G_1}{H'_1 G'_1};$$

führt man für die allgemeinen Punkte A_1 und A'_1 die Punkte H_1 und H'_1 ein, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung $HF = H'F'$, also $H = H'$, folglich fallen auch die übrigen Fundamentalpunkte der ersten Axe zusammen; da nun die beiden Gruppen von Fundamentalpunkten der zweiten Axe einzeln den beiden Gruppen der ersten Axe congruent sind, so müssen sie unter einander congruent seyn, also $H_1 G_1 = H'_1 G'_1$, so dass sich aus der obigen

Gleichung $A_1 G_1 = A'_1 G'_1$ oder $A_1 A'_1 = G_1 G'_1$ ergiebt. Die entsprechenden Beziehungen treten offenbar auf der ersten Axe auf, wenn auf der zweiten G_1 und G'_1 zusammenfallen.

19. In den Abschnitten 15 und 17 waren Lichtpunkte, welche in der Nähe der ersten Axe liegen, in Betracht gezogen, doch mit der Beschränkung, daſs dieselben entweder in der Centralebene oder einer zu derselben durch die Axe gelegten rechtneigigen Ebene lägen, und dann war bei den Lichtpunkten der Centralebene nur der erste Bildpunkt, bei den anderen nur der zweite Bildpunkt berücksichtigt worden. Um nun allgemein für jeden beliebigen Lichtpunkt in der Nähe der ersten Axe die beiden Brennpunkte auf dem mittleren gebrochenen Strahl und die Lage und Länge der durch diese Brennpunkte gehenden Brennlinien bestimmen zu können, soll zunächst die Aufgabe gelöst werden, zu einem beliebigen auffallenden Strahl im Gebiete der ersten Axe den conjugirten Strahl im Gebiete der zweiten Axe zu bestimmen. Man bezeichne die Coordinaten des auffallenden Strahles mit ξ, ξ', ξ'_1, η, ζ, die des austretenden mit ξ_1, ξ'_1, η_1, ζ_1, wobei sich die Gröſsen ξ und ξ' nur dadurch unterscheiden, daſs ξ von K aus, ξ' von K' aus gezählt wird, so daſs also $\xi = KK' + \xi'$ ist; Entsprechendes gilt von ξ_1 und ξ'_1; die positive Richtung der X- und X_1-Axen soll beliebig aber übereinstimmend gewählt seyn, d. h. wenn AB die positive Richtung der X-Axe angiebt, so wird die positive Richtung der X_1-Axe durch $A_1 B_1$ bestimmt; die Y- und Y_1-Axen, also auch die Gröſsen η und η_1 werden in der Centralebene gedacht und die Z und Z'-Axen lothrecht zu derselben. Man lege nun durch den auffallenden Strahl eine zur YX-Ebene rechtneigige, welche diese in AB' und die XZ-Ebene in AC schneidet, wobei B' und C auf dem Strahl selbst liegen (Fig. 9 Taf. III); der Strahl $B'C$ bilde mit $B'A$ den kleinen Winkel β, während $B'A$ mit der X-Axe SA den kleinen Winkel α bildet, projicirt man einen beliebigen Punkt P des auffallenden Strahles auf die XY-Ebene

durch PQ und Q auf die X-Axe durch QR, so ist $KR = \xi$, $K'R = \xi'$, $RQ = \eta$, $QP = \zeta$; die entsprechende Figur denke man für den austretenden Strahl entworfen. Denkt man sich durch B' in der Ebene $AB'C$ beliebig Strahlen gelegt, so erhält man ein zur Centralebene rechtneigiges Strahlenbüschel; das conjugirte Büschel mufs nach Abschnitt 16, auch zu der Centralebene rechtneigig stehen und folglich in der Ebene $A_1 B'_1 C_1$ liegen, da $B'C$ und $B'_1 C_1$ die gegebenen conjugirten Strahlen sind; der Strahl $B'A$ liegt in der Normalebene, also mufs auch der conjugirte Strahl in derselben liegen d. h. $B'_1 A_1$ ist der conjugirte Strahl zu $B'A$, somit sind B' und B_1' conjugirte Punkte als Schnittpunkte zweier Paare conjugirter Strahlen und zwar ist B'_1 ein Bildpunkt zweiter Art. Entsprechend sind A und A_1 conjugirte Punkte als Schnitte zweier Paare conjugirter Strahlen, und zwar ist A_1 ein Bildpunkt erster Art; bezeichnet man nun die Fundamentalpunkte der Axen $B'A$ und $B'_1 A_1$ mit 2 Accenten, so erhält man:

$$\frac{\beta'_1}{\beta} = \frac{B'F''}{K''F''} \text{ (Gl. 27 u. 20a)}; \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{AF}{KF} \text{ (Gl. 20a)}$$

$$K_1 A_1 = -f\frac{KA}{FA} \text{ (Gl. 25)}; \quad K''_1 B'_1 = -f\frac{K''B'}{F''B'} \text{ (Gl. 30)}.$$

Entnimmt man aus der Figur 9 Taf. III und ihrer entsprechenden noch die Ausdrücke:

$$\alpha_1 = \frac{\eta_1}{R_1 A_1} = \frac{\eta_1}{K_1 A_1 - \xi_1} \qquad \beta'_1 = \frac{Q_1 P_1}{Q_1 B'_1} = \frac{\zeta_1}{K''_1 B'_1 - K''_1 Q_1}$$

$$KA = \xi + \frac{\eta}{\alpha} \qquad K''B' = \xi' + \frac{\zeta}{\beta} + \delta$$

$$FA = g + \xi + \frac{\eta}{\alpha} \qquad F''B' = g' + \xi' + \frac{\zeta}{\beta} + \delta_1,$$

wo δ und δ_1 kleine Gröfsen erster Ordnung bedeuten, so genügen diese Beziehungen zur Lösung der Aufgabe man erhält zunächst:

$$KF \, . \, \eta_1 = \alpha (f \, . \, KA + \xi_1 \, . \, FA)$$
$$K''F'' \, . \, \zeta_1 = \beta (f \, . \, K''B' + \xi'_1 \, . \, F''B')$$

und sodann:

$$34)\left\{\begin{array}{l}-g\cdot\eta_1=\eta(f+\xi_1)+\alpha(f\cdot\xi+g\cdot\xi_1+\xi\xi_1)\\-g'\cdot\zeta_1=\zeta(f'+\xi'_1)+\beta(f'\xi'+g'\cdot\xi'_1+\xi'\cdot\xi'_1);\end{array}\right.$$

in diesen Gleichungen bezieht sich ξ, ξ', η, ζ auf einen beliebigen Punkt des auffallenden Strahles.

20. Bei den üblichen Betrachtungen der Erscheinungen im centralen Gebiet ist vorausgesetzt, daſs den auffallenden Strahlen nur ein kleines Stück der ersten brechenden Fläche um die Centrallinie herum frei gegeben ist; entsprechend soll bei den nachfolgenden Betrachtungen vorausgesetzt seyn, daſs auf der ersten brechenden Fläche nur ein kleines Stück um den Punkt P herum, d. h. um den Schnittpunkt dieser Fläche mit der Axe der auffallenden Strahlen, für den Eintritt des Lichtes frei sey. Es soll nun ein beliebiger Lichtpunkt D mit den Coordinaten x, x', y, z in der Nähe der ersten Axe gedacht werden; man lege durch denselben eine Normalebene zur Axe der auffallenden Strahlen, so daſs diese im Punkte A geschnitten wird, dann ist $KA=x$, $K'A=x'$; durch A lege man Parallellinien zu den Y- und Z-Axen und fälle von D aus die Lothe DB und DC, dann ist $AB=y$ und $AC=z$ (Fig. 10 Taf. III); die conjugirten Strahlen zu den von D ausgehenden Lichtstrahlen werden durch die Gleichungen:

$$34\text{a})\left\{\begin{array}{l}-g\cdot\eta_1=y(f+\xi_1)+\alpha(f\cdot x+g\xi_1+x\xi_1)\\-g'\cdot\zeta_1=z(f'+\xi'_1)+\beta(f'x'+g'\xi'_1+x'\xi'_1)\end{array}\right.$$

dargestellt, wo α, wie sich aus Abschnitt 19 ergiebt, den Winkel bezeichnet, welchen die durch den auffallenden Strahl rechtneigig zur XY-Ebene gelegte Ebene mit der XZ-Ebene bildet, und β den Winkel, welchen der auffallende Strahl mit dem in der XY-Ebene erhaltenen Schnitt bildet. Bestimmt man nun $\xi_1=-\frac{fx}{g+x}$, welcher Werth sich nach Gl. 15 auf den zu A conjugirten ersten Bildpunkt A_1 bezieht, so wird für alle Werthe von α und β:

$$\eta_1=-y\frac{f+\xi_1}{g}=-y\frac{f}{g+x};$$

nach Gl. 25 bestimmen die erhaltenen Werthe ξ_1, η_1 den

conjugirten ersten Bildpunkt B_1 zu B; sämmtliche gebrochene Strahlen gehen also durch eine zu der Z_1-Axe parallele Linie, welche durch B_1 gelegt ist; man hat damit die erste Brennlinie des austretenden Strahlenbündels. Bestimmt man andererseits

$$\xi'_1 = -\frac{f' x'}{g' + x'},$$

welcher Werth nach Gl. 30 dem zu A conjugirten zweiten Bildpunkt A'_1 entspricht, so wird für alle Werthe von α und β.

$$\zeta_1 = -z\,\frac{f' + \xi'_1}{g'} = -z\,\frac{f'}{g' + x'};$$

die erhaltenen Werthe ξ'_1 und ζ_1 bestimmen den zweiten conjugirten Bildpunkt C'_1 zu C; legt man also durch diesen Punkt eine Parallele zur Y_1-Axe, so gehen sämmtliche gebrochene Strahlen durch dieselbe und es ist damit die zweite Brennlinie des austretenden Strahlenbündels bestimmt. Es ergiebt sich also, daſs mit Vernachlässigung der Gröſsen zweiter Ordnung alle Lichtpunkte im Gebiet der ersten Axe parallele Brennlinien haben und zwar liegen für Lichtpunkte derselben Normalebene zur ersten Axe die Brennlinien ebenfalls in denselben Normalebenen der zweiten Axe. — Die Länge der Brennlinien ist offenbar von der Lichtöffnung abhängig; bezeichnet man auf derselben die gröſsten und kleinsten Werthe durch η_a, η_i, ζ_a, ζ_i, so ist mit den üblichen Vernachlässigungen:

$$\alpha_a = \frac{\eta_a - y}{PA},\quad \alpha_i = \frac{\eta_i - y}{PA},\quad \beta_a = \frac{\zeta_a - z}{PA},\quad \beta_i = \frac{\zeta_i - z}{PA};$$

man erhält damit aus der zweiten der Gleichungen unter 34a die Länge l der ersten Brennlinie:

$$35)\quad \left\{ \begin{aligned} l = \frac{\zeta_a - \zeta_i}{(PK + x)\,(g + x)} \Big[& f \cdot x\,(g' + x') - f' \cdot x'\,(g + x) \\ & + K_1 K'_1\,(g + x)\,(g' + x') \Big] \end{aligned} \right.$$

und entsprechend aus der ersten der Gl. 34a die Länge L der zweiten Brennlinie

Ist also die leuchtende Fläche durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = a$$

bestimmt, so ist das erste Bild durch:

$$39)\quad F\left(-\frac{g x_1}{f+x_1}, -\frac{g \cdot y_1}{f+x_1}, -\frac{g' z_1}{f+x_1}\frac{f.PK+x_1 PF}{f'.PK'+x'_1 PF'}\right) = a$$

das zweite Bild durch:

$$39\text{a})\quad F\left(\frac{g' X'}{f'+X'}, -\frac{g Y}{f'+X'}\frac{f'.PK'+X'.PF'}{f.PK+X.PF}, -\frac{g'.Z}{f'+X'}\right) = a$$

bestimmt; eine leuchtende Ebene wird also durch 2 Flächen zweiten Grades abgebildet; um die Erscheinung vollkommen darzustellen, mufs man nun noch durch jeden Punkt der Fläche 39 eine mit der Z_1-Axe parallele Brennlinie von der Länge l (Gl. 35) in der durch 38 bestimmten Lage geführt denken und entsprechend bei der Fläche 39a eine zur Y_1-Axe parallele Brennlinie, deren Länge und Lage durch 35a und 38a bestimmt wird.

III.

23. Betrachtet man ein nahe centrirtes System, so bietet dasselbe stets eine Mittellinie dar, in deren Nähe die Mittelpunkte der brechenden Flächen liegen müssen; es ist nun zunächst nachzuweisen, dafs für das mittlere Gebiet eines solchen Systems d. h. für Strahlen, welche in der Nähe der Mittellinie bleiben, eine homocentrische Sammlung der gebrochenen Strahlen stattfindet. Wenn ein durch D gehendes unendlich dünnes Strahlenbündel die Linie DM enthält, so findet auf DM eine homocentrische Sammlung der Strahlen in einem Punkte D_1 statt und wenn das Strahlenbündel D_1 die Linie $D_1 M_1$ enthält, so mufs auf derselben wieder ein Sammelpunkt D_2 liegen u. s. w.; nun kann aber ein Punkt D_i auch so fallen, dafs, obgleich er sich in der Nähe der Mittellinie befindet, doch $D_i M_i$ nicht in dem durch D_i gehenden Strahlenbündel gedacht werden kann, man braucht etwa nur D_i in einer durch M_i zur Mittellinie gelegten Normalebene zu denken; es fragt sich, ob in einem solchen Falle auch

eine homocentrische Sammlung stattfindet; da nur solche Strahlenbündel in Betracht gezogen werden sollen, bei denen die Strahlen in der Nähe der Mittellinie liegen, und da die Mittelpunkte der brechenden Flächen nur kleine Entfernungen von der Mittellinie haben, so müssen die Winkel φ und ψ der Gleichungen 17 und 26 nur klein seyn, so dafs ihr Cosinus der Einheit gleich gesetzt werden kann; daraus folgt dann aber, dafs $P_i D_{i+1}$ und $P_i D'_{i+1}$ gleich werden, also D_{i+1} und D'_{i+1} zusammenfallen müssen. Man bezeichne die Coordinaten der Sammelpunkte $D, D_1 \ldots D_p$ mit x, y, z, indem man x auf der Mittellinie von einem beliebigen Anfangspunkt in der Richtung der auffallenden Strahlen zählt und y und z in einer Normalebene der Mittellinie; die Coordinaten der Mittelpunkte M, M_1, M_{p-1} werden mit a, b, c bezeichnet: die Projectionen der Punkte D auf die Mittellinien mögen $A, A_1 \ldots A_p$, die der Punkte $M : N, N_1 \ldots N_{p-1}$ heifsen. Bei den oben bezeichneten Sammlungen erster Art werde P als Schnittpunkt der Linie DM mit der zu M gehörigen Fläche gedacht, also P_1 der Schnittpunkt von $D_1 M_1$ mit der Fläche M_1 u. s. w.; bei den Sammlungen zweiter Art sey P_i der Schnittpunkt des mittleren Strahles aus dem Bündel D_i mit der Fläche M_i. Bei den kleinen Werthen von φ und ψ erhält man allgemein nur Gleichungen von der Form:

$$\frac{n}{PD} - \frac{n_1}{PD_1} = \frac{n - n_1}{PM},$$

welche, da PM nur einen kleinen Winkel mit der Mittellinie bildet, unter Vornahme erlaubter Vernachlässigungen, in Gleichungen von der Form:

$$\frac{n}{CA} - \frac{n_1}{CA_1} = \frac{n - n_1}{CN}$$

übergehen, wobei $C, C_1 \ldots C_{p-1}$ die Schnittpunkte der Mittellinie mit den brechenden Flächen sind. Denkt man sich die entsprechenden Gleichungen für ein zweites Strahlenbündel $E, E_1 \ldots E_p$ mit den Projectionen $B, B_1 \ldots B_p$ entwickelt, so erhält man wie früher:

$$\frac{n . AB}{n_p . A_p B_p} = \frac{CA . C_1 A_1 \ldots C_{p-1} A_{p-1}}{CA_1 \ldots C_1 A_2 . C_{p-1} A_p} \cdot \frac{CB \ldots C_{p-1} B_{p-1}}{CB_1 \ldots C_{p-1} B_p};$$

Bezeichnet man nun die Projectionen der Punkte D, E, M auf die YZ-Ebene mit kleinen Buchstaben, so erhält man mit Benutzung der Gleichung 1a:

$$\frac{md}{md_1} = \frac{MD}{MD_1} = \frac{n_1}{n}\frac{PD}{PD_1} = \frac{n_1}{n}\frac{CA}{CA_1}$$

entsprechend wird, wenn in derselben Normalebene zur Mittellinie aufser D ein Punkt D' gedacht wird:

$$\frac{md'}{md'_1} = \frac{n_1}{n}\frac{CA}{CA_1};$$

da somit die Dreiecke $m\,d\,d'$ und $m\,d_1\,d'_1$ (Fig. 11, Taf. 3) ähnlich sind, so erhält man auch:

$$\frac{dd'}{d_1 d'_1} = \frac{n_1}{n}\frac{CA}{CA_1}$$

also

$$\frac{dd'}{d_p \,.\, d'_p} = \frac{n_p}{n}\frac{CA \,..\, C_{p-1}A_{p-1}}{CA_1 \,..\, C_{p-1}A_p};$$

führt man entsprechend in derselben Normalebene, welche durch E gelegt ist, einen Punkt E' ein, so erhält man die Gleichung:

$$40)\qquad \frac{AB}{A_p B_p} = \frac{n}{n_p}\frac{dd'}{d_p d'_p}\frac{ee'}{e_p e'_p},$$

durch welche für conjugirte Normalebenen das Fundamentalgesetz in der Form 3_b bewiesen ist. Denkt man sich also in Bezug auf die Mittellinien zwei leuchtende Normalebenen, so ist das Verhältnifs ihres Abstandes zu dem der conjugirten Ebenen gleich dem Product aus den Bildgröfsenverhältnissen beider Ebenen und dem Verhältnifs aus den Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums. Im Allgemeinen sind bei nicht centrirten Systemen die Punkte A und A_p, B und B_p nicht conjugirte; es empfiehlt sich deshalb zunächst mit Hülfe des Fundamentalgesetzes Fundamentalebenen einzuführen und als Hauptebenen H, H_1, $\bar{H}$, $\bar{H}_1$ diejenigen zu wählen, für welche das Bildgröfsenverhältnifs $\frac{dd'}{d_p d'_p}$ gleich ± 1 ist, als Knotenebenen K, K_1, $\bar{K}$, $\bar{K}_1$ diejenigen, für welche $\frac{dd'}{d_p d'_p} = \pm \frac{n_p}{n}$ ist, und als Brennebenen F und G diejenigen, welche in der Mitte zwischen den Ebenen K und $\bar{K}$ und andererseits zwischen

k_1 $\bar{K}_1$ liegen. Bezeichnet man die conjugirten Gröfsen nun wieder allgemein mit dem Index 1, führt zwei Paare Ebenen P, P_1 und Q, Q_1 ein, wobei diese Zeichen zugleich die Schnittpunkte der Ebenen mit der Mittellinie bezeichnen mögen, und drückt das Product aus $\frac{n}{n_1}$ und dem Bildgröfsenverhältnifs der Ebenen P durch p aus, so erhält man zunächst aus dem Fundamentalgesetz die Gleichung 8:

$$\frac{AP}{A_1 P_1} : \frac{AQ}{A_1 Q_1} = p : q$$

und ebenso die Gl. 8a, 9, 10, aus welchen sich die einfacheren z. B.

$$41) \quad p = \frac{PF}{KF} \text{ od. } = \frac{K_1 G_1}{P_1 G_1}; \; \frac{\pi \pi'}{\pi_1 \pi'_1} = \frac{PF}{HF} \text{ od. } = \frac{H_1 G_1}{P_1 G_1},$$

wo $\frac{\pi \pi'}{\pi_1 \pi'_1}$ das Bildgröfsenverhältnifs der Ebenen P und P_1 andeuten soll, leicht ergeben. Da das Product aus $\frac{n}{n_1}$ und dem Bildgröfsenverhältnifs genau ebenso für die analytischen Rechnungen zu verwerthen ist wie früher $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, so erkennt man leicht, dafs für die Schnittpunkte der Fundamentalebenen und für die der conjugirten Ebenen mit der Mittellinie genau dieselben Beziehungen 12 bis 15 gewonnen werden können, wie früher für die Fundamentalpunkte selbst.

24. Um nun innerhalb der conjugirten Ebenen die conjugirten Punkte zunächst analytisch zu bestimmen, ist es nur nöthig, das Bildgröfsenverhältnifs in Betracht zu ziehen, denkt man sich wieder die Punkte D, D_1 . . D_p mit den zugehörigen Normalebenen und legt durch M, M_1 Parallelen zu der Mittellinie, so schneidet die durch M gelegte die Ebenen D und D_1, die durch M_1 gelegte die Ebenen D_1 und D_2 u. s. w. in conjugirten Punkten in Bezug auf die einzelnen brechenden Flächen; man erhält also nach 41 die Beziehungen

$$\frac{md}{md_1} = \frac{AF}{f} \quad \text{oder} \quad = \frac{g}{A_1 G}$$

$$\frac{m_1 d_1}{m_1 d_2} = \frac{A_1 F_1}{f_1} \quad \text{oder} \quad = \frac{g_1}{A_2 G_1} \quad \text{u. s. w.,}$$

wo die Gröfsen f und g die in 15 angegebenen Werthe haben. Da nun

$$\frac{md}{md_1} = \frac{y-b}{y_1-b} = \frac{z-c}{z_1-c} \text{ u. s. w.}$$

ist, so erhält man die Gleichungen:

$$42)\left\{\begin{aligned} y-b &= \frac{b_1-b}{f}\,.\,AF + \frac{b_2-b_1}{f.f_1} AF.A_1F_1 + \ldots \\ &\quad \frac{b_{p-1}-b_{p-2}}{f.f_1..f_{p-2}} AF.\,A_1F_1..A_{p-2}F_{p-2} + \frac{y_p-b_{p-1}}{f.f_1..f_{p-1}} \\ &\qquad AF..\,A_1F_1.\,A_{p-1}F_{p-1} \\ z-c &= \frac{c_1-c}{f} AF + \frac{c_2-c_1}{f.f_1} AF.\,A_1F_1 + .. \frac{c_{p-1}-c_{p-2}}{f...f_{p-1}} \\ &\quad AF...A_{p-2}F_{p-2} + \frac{z_p-c_{p-1}}{f...f_{p-1}} AF...A_{p-1}F_{p-1}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man

$$x_i = -A_iF_i \qquad k_i = -f_i\,.\,g_i \qquad e_i = -g_i + C_i C_{i+1} + f_{i+1}$$

$$a = (-1)^p \frac{DD'}{D_pD'_p} f\,.\,f_1..f_{p-1},$$

wo $\frac{DD'}{D_pD'_p}$ das Bildgröfsenverhältnifs der Ebenen A und A_p bezeichnet, so kann man nach den Entwicklungen zu 12b und 13 die Producte AF, $AF\,.\,A_1F_1$ u. s. w. aus dem System der Gleichungen:

$$k + ex + xx_1 = 0$$

$$k_{p-1} + e_{p-2}x_{p-2} + x_{p-2}x_{p-1} = 0$$

bestimmen, wenn man berücksichtigt, dafs

$$\frac{DD'}{D_1D'_1} = \frac{AF}{f}, \frac{D_1D'_1}{D_2D'_2} = \frac{A_1F_1}{f_1} \quad \text{also}$$

$$43) \;..\; \frac{DD'}{D_pD'_p} = \frac{AF.A_1F_1\,.\,A_{p-1}F_{p-1}}{f\,.\,.\,f_1\,.\,.\,.\,.\,f_{p-1}} \text{ ist.}$$

Führt man zwei Gröfsen B und B_p durch die Gleichungen:

$$
44)\quad \left\{\begin{aligned}
B\,.\,D &= b\,.\,D - g\,(b - b_1)\left\{e_1\,..\,e_{p-1}\right\} + g\,.\,g_1\,(b_1 - b_2) \\
&\quad \left\{e_2\,..\,e_{p-2}\right\} + \,..\,(-1)^{p-2}\,g\,..\,g_{p-3}\,(b_{p-3} - b_{p-2})\,e_{p-2} \\
&\quad + (-1)^{p-1}\,g\,..\,g_{p-2}\,(b_{p-2}\,b_{p-1}) \\
B_p\,.\,D &= (b - b_1)\,f_1\,..\,f_{p-1} + e\,(b_1 - b_2)\,f_2\,..\,f_{p-1} \\
&\quad + \left\{e\,e_1\right\}(b_2 - b_3)\,f_3\,..\,f_{p-1} + \,..\left\{e\,..\,e_{p-3}\right\} \\
&\quad (b_{p-2} - b_{p-1})\,f_{p-1} + D\,.\,b_{p-1}
\end{aligned}\right.
$$

ein und entsprechend zwei Gröſsen C und C_p, für welche die Gröſsen b durch die Gröſsen c zu ersetzen sind, so bestimmt man die Coordinaten y_p, z_p des conjugirten Punktes durch die Gleichungen:

$$
45)\quad y - B = \frac{D\,D'}{D_p\,D'_p}(y_p - B_p) \qquad z - C = \frac{D\,D'}{D_p\,D'_p}(z_p - C_p);
$$

die bei den Gleichungen 44 auftretenden Gröſsen $\left\{e_i\,..\,e_k\right\}$ sind Unterdeterminanten der für die Gleichungen 13 und 14 aufgestellten Determinante D, welche selbst durch $\left\{e\,..\,e_{p-2}\right\}$ zu bezeichnen wäre; man erkennt also, daſs für die Unterdeterminanten das Stück der Diagonalreihe angeführt ist, welches aus der Determinante D entnommen ist, es ist z. B.

$$
\left\{e\,e_1\,e_2\right\} = \begin{vmatrix} e & 1 & 0 \\ k_1 & e_1 & 1 \\ & k_2 & e_2 \end{vmatrix}.
$$

Die Ausdrücke 44 sind für die Theorie dioptrischer Instrumente, was die durch mangelhafte Centrirung entstehenden Fehler anbetrifft, höchst bedeutungsvoll. Bei unveränderten Abständen der brechenden Flächen können die angedeuteten Fehler dadurch beseitigt werden, daſs zwei Theilsysteme des Instrumentes parallel mit sich selbst, normal zur Mittellinie verschoben werden; offenbar handelt es sich nur darum, die Correcturen so einzurichten, daſs durch dieselben die Gröſsen B, B_p, C, C_p der Null gleich

gemacht werden; man schreibe zunächst die Gleichungen 44 in der Form:

$$44\,a)\quad \begin{cases} B\,.\,D = b\,.\,\delta + b_1\,\delta_1 + \ldots\; b_{p-1}\,.\,\delta_{p-1} \\ B_p\,.\,D = b\,.\,\delta' + b_1\,\delta'_1 + \ldots\; b_{p-1}\,.\,\delta'_{p-1}, \end{cases}$$

zu denen noch zwei andere Gleichungen treten, welche die Gröſsen C und c an Stelle der Gröſsen B und b enthalten; denkt man sich nun etwa das erste der oben bezeichneten Theilsysteme mit den Flächen M, M_1 und M_2, das zweite mit den Flächen M_{p-2} und M_{p-1} und nimmt man an, daſs die Coordinaten der nöthigen Verschiebungen durch v und w, v_1 und w_1 bezeichnet werden, so bestimmt man diese Gröſsen durch die Gleichungen:

$$46)\quad \begin{cases} -B\,.\,D = v\,(\delta + \delta_1 + \delta_2) + v_1\,(\delta_{p-2} + \delta_{p-1}) \\ -B_p\,.\,D = v\,(\delta' + \delta'_1 + \delta'_2) + v_1\,(\delta'_{p-2} + \delta'_{p-1}) \end{cases}$$

und die entsprechenden, bei denen die Gröſsen C und w für die Gröſsen B und v eintreten; die Gröſsen δ ergeben sich durch den Vergleich der Gleichungen 44 und 44a als Functionen der Gröſsen e, f und g und können durch diese berechnet werden und was die Gröſsen B, B_p, C, C_p anbetrifft, so zeigen die Gleichungen 45, daſs sie gefunden werden können, wenn für zwei verschiedene Stellungen des Objectes die Abstände y, y_p, z, z_p und das Bildgröſsenverhältniſs gemessen werden. — Unter Umständen ist es auch möglich, durch Drehung zweier Theilsysteme um die Mittellinie die Fehler der mangelhaften Centrirung zu beseitigen; setzt man

$$47a)\;.\;.\quad \begin{cases} R^2 = B^2 + C^2 \qquad b_i = \varrho_i \cos\varphi_i \\ R_p^2 = B_p^2 + C_p^2 \qquad c_i = \varrho_i \sin\varphi_i \end{cases}$$

und ist ψ der Winkel, um welchen das Theilsystem λ gedreht werden muſs, χ der entsprechende Winkel für das Theilsystem μ, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$47)\quad \begin{cases} D^2\,.\,R^2 = \Sigma\delta_\lambda\,.\,\delta_k\,.\,\varrho_\lambda\,.\,\varrho_k\,[\cos(\varphi_\lambda - \varphi_k) - \cos(\psi + \varphi_\lambda - \varphi_k)] \\ \qquad + \Sigma\delta_\mu\,.\,\delta_k\,.\,\varrho_\mu\,.\,\varrho_k\,[\cos(\varphi_\mu - \varphi_k) - \cos(\chi + \varphi_\mu - \varphi_k)] \\ \qquad + \Sigma\delta_\lambda\,.\,\delta_\mu\,.\,\varrho_\lambda\,.\,\varrho_\mu\,[\cos(\varphi_\lambda - \varphi_\mu) - \cos(\psi - \chi + \varphi_\lambda - \varphi_\mu)], \end{cases}$$

bei welcher λ alle Werthe des Theilsystems λ, μ alle Werthe des Theilsystems μ und k alle Werthe, welche sich nicht auf jene Theilsysteme beziehen, annehmen muſs; denkt man sich zu 47 noch eine zweite Gleichung, bei welcher R durch R_p und die Gröſsen δ durch die Gröſsen δ' ersetzt werden, so ist die angedeutete überaus einfache Correctur möglich, wenn die beiden Gleichungen durch reelle Werthe von φ und ψ erfüllt werden können; in wie weit es möglich ist, durch Wahl und besondere Einrichtung der Theilsysteme diese Bedingung zu erfüllen, soll an anderer Stelle untersucht werden. Uebrigens hat die vorgeschlagene Correctur nur für eine bestimmte Combination der brechenden Flächen Geltung; sind Theile des Systems parallel mit der Mittellinie verschiebbar, so ändern sich eine oder einige der Gröſsen e und die Werthe B, B_p, C, C_p werden also gleichfalls verändert; bei einem solchen Instrument hat man aber die Mittel in Händen, sämmtliche Gröſsen b und c zu bestimmen; man hat nur nöthig, für $\frac{p}{2}$, bei einem ungeraden p für $\frac{p+1}{2}$ verschiedene Abstände e in dem Instrumente die Gröſsen B, B_p, C und C_p in der oben angegebenen Weise zu bestimmen um eine genügende Anzahl von Gleichungen in der Form 44a zu erhalten, durch welche die $2p$ Gröſsen b und c bestimmt werden können; dann ist es aber möglich für alle verschiedenen Variationen der Gröſsen e, welche das Instrument zuläſst, Tabellen für die Gröſsen B, B_p, C, C_p zu berechnen; in welcher Weise diese Gröſsen die etwaigen Winkelmessungen, welche mit dem Instrument vorgenommen werden, beeinflussen, wird sich im nachfolgenden Abschnitt ergeben.

25. Aus den Gleichungen 45 ergiebt sich die Beziehung $\frac{y-B}{z-C} = \frac{y_p - B_p}{z_p - C_p}$; aus derselben geht Folgendes hervor: Verbindet man in der durch D gelegten Normalebene den Punkt D mit dem Punkte $y = B$, $z = C$ und entsprechend den Punkt D_p in der durch ihn gelegten

Normalebene mit dem Punkte (B_p, C_p), so sind diese beiden Linien parallel und ihr Verhältniſs giebt das Bildgröſsenverhältniſs beider Ebenen. — Allgemein sagen die Gleichungen 45 aus, daſs für alle beliebigen Bildgröſsenverhältnisse, d. h. für alle beliebigen conjugirten Ebenen die Punkte (B, C) und (B_p, C_p) conjugirte sind; die beiden Parallelen der Mittellinie: $\eta = B$, $\zeta = C$ und $\eta = B_p$, $\zeta = C_p$ sind folglich conjugirte Strahlen.

Bezeichnet man, um Unklarheiten zu vermeiden, die Fundamentalpunkte und Fundamentalgröſsen des ganzen Systems mit deutschen Buchstaben, so ist:

$$\frac{DD'}{D_p D_p} = \frac{A\mathfrak{F}}{\mathfrak{f}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\mathfrak{g}}{A_p \mathfrak{G}},$$

wo $\mathfrak{f} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{G}$ ist; setzt man nun

$$\mathfrak{F}A = \xi \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}A_p = \xi_p,$$

so gehen die Gleichungen 45 in folgende über:

$$\text{45a)} \quad \frac{\eta - B}{\eta_p - B_p} = \frac{\zeta - C}{\zeta_p - C_p} = -\frac{\xi}{\mathfrak{f}} \text{ oder } = -\frac{\mathfrak{g}}{\xi_p};$$

die Gleichungen:

$$\eta_p - B_p = -(\eta - B)\frac{\xi_p}{\mathfrak{g}} \qquad \zeta_p - C_p = -(\zeta - C)\frac{\xi_p}{\mathfrak{g}}$$

werden für alle Werthe von η und ζ durch die Werthe

$$\xi_p = o, \quad \eta_p = B_p, \quad \zeta_p = C_p$$

erfüllt, d. h. alle mit der Mittellinie parallel auffallenden Strahlen werden nach dem Punkte ($\xi_p = o$, B_p, C_p) gebrochen; entsprechend entnimmt man aus den Gleichungen 45a, daſs die von dem Punkte ($\xi = o$, B, C) ausgehenden Strahlen parallel mit der Mittellinie austreten. — Ist das Instrument auf ein optisches Bild, d. h. auf einen Bildpunkt eingestellt, so geht die Mittellinie durch denselben und es sind also die Gröſsen η_p und ζ_p der Null gleich; für das Object erhält man dann die Gleichungen:

$$\eta - B = \xi\frac{B_p}{\mathfrak{f}} \qquad \zeta - C = \xi\frac{C_p}{\mathfrak{f}}$$

da nun die Winkelmessungen sich auf die Mittellinie beziehen, so erhält man als Winkelfehler:

$$48) \quad . \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{B}{\xi} + \frac{B_p}{\mathfrak{f}} \qquad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{C}{\xi} + \frac{C_p}{\mathfrak{f}},$$

wobei das Object so entfernt gedacht ist, dafs man den Abstand des Punktes $\mathfrak{G}$ von dem Mittelpunkt der Kreistheilung vernachlässigen kann; für weit entfernte Objecte ist:

$$48a) \quad . \quad . \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{B_p}{\mathfrak{f}} \quad \text{und} \quad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{C_p}{\mathfrak{f}};$$

bei umlegbaren Instrumenten wäre der Fehler offenbar durch eine doppelte Ablesung bei verschiedenen Lagen des Instrumentes auszugleichen, doch ist dann dabei vorausgesetzt, dafs das Instrument anderweitig so fehlerfrei ist, dafs die Mittellinie beim Umlegen dieselbe Lage wieder erhält.

26) Bestimmt man den auffallenden Strahl durch die Gleichungen:

$$\eta - B = \lambda \xi + \lambda_1 \qquad \zeta - C = \mu \xi + \mu_1,$$

so wird nach Gl. 45a) der austretende Strahl durch die Gleichungen:

$$45b) \qquad \eta_p - B_p = -\frac{\lambda_1}{\mathfrak{g}} \xi_p - \mathfrak{f}\lambda \qquad \zeta_p - C_p = -\frac{\mu_1}{\mathfrak{g}} \xi_p - \mathfrak{f}\mu$$

bestimmt; für die parallelen conjugirten Strahlen wird $\lambda_1 = -\mathfrak{g}\lambda$ und $\mu_1 = -\mathfrak{g}\mu$, und es ergeben sich für dieselben die Gleichungen:

$$45c) \quad \begin{array}{ll} \eta - B = \lambda(\xi - \mathfrak{g}) & \zeta - C = \mu(\xi - \mathfrak{g}) \\ \eta_p - B_p = \lambda(\xi_p - \mathfrak{f}) & \zeta_p - C_p = \mu(\xi_p - \mathfrak{f}) \end{array}$$

Von diesen Parallelstrahlen gehen also, wie 45 *c* aussagt, alle auffallenden Strahlen durch den Punkt ($\xi = \mathfrak{g}$, B, C) und alle austretenden durch den Punkt ($\xi_p = \mathfrak{f}$, B_p, C_p); die so bestimmten Punkte sind offenbar die Knotenpunkte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ des Systems. — Zwei von den Knotenpunkten ausgehende parallele Strahlen schneiden conjugirte Ebenen in conjugirten Punkten, denn allgemein schneiden die conjugirten Strahlen conjugirte Ebenen in conjugirten Punkten, wie aus den Gleichungen 45b und

den zugehörigen hervorgeht, denn berücksichtigt man, dafs für conjugirte Ebenen $\mathfrak{x} . \mathfrak{x}_p = \mathfrak{f} . \mathfrak{g}$ ist, so erhält man:

$$\frac{\eta - B}{\eta_p - B_p} = \frac{\zeta - C}{\zeta_p - C_p} = - \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{f}},$$

wodurch nach 45 a) conjugirte Punkte bestimmt werden. Die durch $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gehende Linie enthält diejenigen parallelen conjugirten Strahlen, welche zusammenfallen; sie schneidet also sämmtliche conjugirte Ebenen in conjugirten Punkten; sie ist die von Casorati eingeführte Cardinallinie [1]), ihre Bestimmungsgleichungen sind:

$$45\text{ d)} \quad \eta - B = \frac{B_p - B}{\mathfrak{K} \mathfrak{K}_1} (\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) \quad \zeta - = C \frac{C_p - C}{\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1} (\mathfrak{x} - \mathfrak{g}).$$

Wird die Cardinallinie zur Mittellinie gewählt, so werden die Gröfsen B, B_p, C, C_p der Null gleich und die conjugirten Strahlen werden durch die Gleichungen:

$$45\text{ e)} \quad \begin{aligned} \eta &= \lambda \mathfrak{x} + \lambda_1 & \zeta &= \mu \mathfrak{x} + \mu_1 \\ \eta_p &= - \frac{\lambda_1}{\mathfrak{g}} \mathfrak{x}_p - \mathfrak{f} \lambda & \zeta_p &= - \frac{\mu_1}{\mathfrak{g}} \mathfrak{x}_p - \mathfrak{f} \mu \end{aligned}$$

bestimmt; gehen die auffallenden Strahlen von einem Punkte A der Cardinallinie aus, für welchen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ ist, so nehmen die aufgestellten Gleichungen, da dann $\lambda_1 = -\lambda \mathfrak{x}_0$, $\mu_1 = - \mu\, \mathfrak{x}_0$ wird, die Form an:

1) *Le proprietà cardinalidel cannocchiali anche non centrati p.* 108. — Casorati, der die von Gaufs gewählten analytischen Ausdrücke beibehielt, hat den conjugirten Strahl eines nichtcentrirten Systems ebenfalls durch eine Determinante k und ihre Unterdeterminanten bestimmt (S. 105). Die Determinante k stimmt im Bau mit der von mir eingeführten Determinante D überein, insofern in jeder Horizontalreihe nur 3 Elemente auftreten, ja sie erscheint sogar einfacher, da das erste Element stets der Einheit gleich ist; indefs wird man diesen Vortheil nicht zu hoch anschlagen dürfen, da die Determinante k schwerlich nach dem von Casorati entwickelten Ausdruck (S. 124) zu berechnen ist, sondern wohl nur in der von mir oben für die Determinante D vorgeschlagenen Weise, wobei es dann aber gleichgültig ist, ob das erste Glied der Horizontalreihe 1 oder k ist. Ein wesentlicher Unterschied liegt aber darin, dafs die Determinante D für p Flächen vom $p - 1$ ten Grade ist, während Casorati's Determinante k vom $2p - 1$ ten Grade ist.

$$45\,f)\quad \begin{aligned} \eta &= \lambda(\xi - \xi_0) & \zeta &= \mu(\xi - \xi_0) \\ \eta_p &= \lambda\left(\frac{\xi_0}{\mathfrak{g}}\,\xi_p - \mathfrak{f}\right) & \zeta_p &= \mu\left(\frac{\xi_0}{\mathfrak{g}}\,\xi_p - \mathfrak{f}\right) \end{aligned}$$

Da $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\eta_p}{\zeta_p}$ ist, so liegen die conjugirten Strahlen in derselben Ebene; bezeichnet man die Neigungen der Strahlen gegen die Cardinallinie mit α und α_p, so erhält man:

$$49)\qquad \frac{\alpha}{\alpha_p} = \frac{\mathfrak{g}}{\xi_0} = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{K}}{\mathfrak{F}A},$$

wodurch für die Cardinallinie die Beziehungen 6) bewiesen sind; daraus ergiebt sich, daſs für die Cardinallinie Alles Geltung behält, was im ersten Theil für die Centrallinie bewiesen ist, selbst bis auf den Schnitt der conjugirten Strahlenbündel.

27) Im Abschnitt 24) wurde untersucht, ob man bei unveränderter Mittellinie durch seitliche Verschiebung oder Drehung zweier Theilsysteme die Cardinallinie in die Mittellinie verlegen könne; aus den Untersuchungen des Abschnittes 26) geht hervor, daſs man auch umgekehrt die Cardinallinie zur Mittellinie machen kann, es ist nur nöthig in den Gleichungen 45d) $\xi = \mathfrak{F}\,C$ und $= \mathfrak{F}\,C_{p-1}$ zu setzen, dadurch die beiden Punkte zu bestimmen, in denen die Cardinallinie die erste und letzte brechende Fläche schneidet, und dann die Verbindungslinie dieser beiden Punkte zur Mittellinie zu wählen. Doch erscheint es nöthig, hervorzuheben, daſs die so ausgeführte Correctur ebenso wie die früher angedeuteten auch nur für ein constantes System gilt; sind Theile des Systems drehbar oder längs der Mittellinie verschiebbar, so wird durch diese Bewegung, wie aus den Gleichungen 44) hervorgeht, die Cardinallinie immer aus der Mittellinie herausgeführt. — Unter Umständen wird es wünschenswerth seyn, Theile, für welche die Constanten paralleler conjugirter Strahlen bestimmt sind, so zu einem resultirenden System zu vereinigen, daſs dieses die Cardinallinie zur Mittellinie hat; es sollen hierfür die nöthigen Gleichungen aufgestellt wer-

den. Es seyen p Systeme längs einer Mittellinie gegeben; die der Mittellinie parallelen conjugirten Strahlen werden durch:

$$\begin{matrix} B & B'_1 \\ C & C' \end{matrix}; \quad \begin{matrix} B_1 & B'_1 \\ C_1 & C'_1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} B_{p-1} & B'_{p-1} \\ C_{p-1} & C'_{p-1} \end{matrix}$$

bestimmt; man denke sich für jedes System den Sammelpunkt der parallel mit der Mittellinie auffallenden Strahlen und den Ausgangspunkt der mit jener Linie parallel austretenden Strahlen bestimmt und durch diese Punkte Normalebenen zur Mittellinie gelegt, welche dieselbe in

$$F \; G; \qquad F_1 \; G_1; \qquad F_{p-1} \; G_{p-1}$$

schneiden. Ein Punkt D bilde im ersten System den Bildpunkt D_1 u. s. w., also im letzten System den Bildpunkt D_p; man lege durch die Punkte D Normalebenen, welche die Mittellinie in A, $A_1 \ldots A_p$ schneiden; nach 45 a erhält man die Gleichungen:

$$\frac{y - B}{y_1 - B'} = \frac{AF}{f}; \; \frac{y_1 - B_1}{y_2 - B'_1} = \frac{A_1 F_1}{f_1}; \ldots \frac{y_{p-1} - B_{p-1}}{y_p - B'_{p-1}} = \frac{A_{p-1} F_{p-1}}{f_{p-1}},$$

wo die Grössen f die ersten Brennweiten der Systeme oder, was mit Vernachlässigung der Gröfsen zweiter Ordnung dasselbe ist, den Abstand der zugehörigen Ebenen H und F bezeichnen. Man erhält:

$$y - B = (B_1 - B') \frac{AF}{f} + (B_2 - B'_1) \frac{AF . A_1 F_1}{f . f_1}$$
$$+ \ldots (B_{p-1} - B'_{p-2}) \frac{AF \ldots A_{p-2} F_{p-2}}{f \ldots f_{p-2}} + (y_p - B'_{p-1}) \frac{AF \ldots A_{p-1} F_{p-1}}{f \ldots f_{p-1}},$$

so dafs die Gröfsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_p$ des resultirenden Systems bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$50) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} . D = {} & B . D - g (B' - B_1) \{e_1 \ldots e_{p-2}\} + g . g_1 \\ & (B'_1 - B_2) \{e_2 \ldots e_{p-2}\} - \ldots + (-1)^{p-2} g \ldots g_{p-3} \\ & (B'_{p-3} - B_{p-2}) e_{p-2} + (-1)^{p-1} g \ldots g_{p-2} (B'_{p-2} - B_{p-1}) \\ \mathfrak{B}_p . D = {} & (B' - B_1) f_1 \ldots f_{p-1} + e (B'_1 - B_2) f_2 \ldots f_{p-1} \\ & + \{e \, e_1\} (B'_2 - B_3) f_3 \ldots f_{p-1} + \ldots \{e \ldots e_{p-3}\} \\ & (B'_{p-2} - B_{p-1}) f_{p-1} + D . B'_{p-1} \end{aligned} \right.$$

und die Gröſsen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ durch entsprechende, bei denen die Gröſsen B durch Gröſsen C ersetzt sind; die Gröſsen e, f und g haben die in den Gleichungen 12 und 13 geltende Bedeutung. Sind z. B. 2 Systeme so zu combiniren, daſs die Mittellinie Cardinallinie wird, so werden die Projectionen v und w der seitlichen Verschiebung des ersten Systems und die entsprechenden Gröſsen v_1 und w_1 durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$v = \frac{g(B' - B_1 + B'_1) - (e - f_1)B}{e - f_1 - g}; \; v_1 = \frac{f_1(B - B' + B_1) - (e - g)B'_1}{e - f_1 - g},$$

wenn bei w und w_1 die Gröſsen B durch die Gröſsen C ersetzt werden.

28. Enthält ein nicht centrirtes System die Cardinallinie als Mittellinie, so treten die bei centrirten Systemen üblichen Constructionen ein; aber auch die allgemeineren Fälle lassen sich constructiv behandeln. Es mag z. B. die Mittellinie gegeben seyn und zu derselben die Normalebenen, für welche das Bildgröſsenverhältniſs $+1$ ist, d. h. also die Ebenen H und H_1; auſserdem sey der Sammelpunkt G' der mit der Mittellinie parallel auffallenden Strahlen und der Ausgangspunkt F' der parallel mit der Mittellinie austretenden Strahlen gegeben; diese beiden Punkte liegen nicht auf der Mittellinie. Man lege durch F' und G' Normalebenen zur Mittellinie, welche dieselbe in F und G schneiden; man bestimme auf der Mittellinie einen Punkt K so, daſs $FK = H_1G$ ist, und einen Punkt K_1 so, daſs $GK_1 = HF$ wird, und lege durch K und K_1 Normalebenen, von denen die erste eine durch F' mit der Mittellinie gezogenen Parallele in $\mathfrak{K}$ und die andere die durch G' gelegte Parallele in $\mathfrak{K}_1$ schneiden; $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sind die Knotenpunkte und $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ ist die Cardinallinie des Systems; die Schnittpunkte derselben mit den Ebenen F und G geben die eigentlichen Brennpunkte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ des Systems, d. h. die Punkte, welche sich auf Strahlenbündel beziehen, die mit der Cardinallinie parallel sind. Mit Hülfe der Cardinallinie kann man nun leicht die üblichen Constructionen ausführen, aber auch ohne dieselbe ist der zu

D conjugirte Punkt D_1 leicht zu finden; man lege durch D die Normalebene zur Mittellinie, welche diese in A schneidet, bestimme A_1 auf der Mittellinie so, dafs

$$A_1 G \,.\, AF = H_1 G \,.\, HF$$

ist, dann mufs D_1 in der durch A_1 gelegten Normalebene liegen; man bestimme in dieser Ebene den Schnittpunkt $D_1{}^0$ mit der durch G' gelegten Parallelen der Mittellinie und entsprechend in der Ebene A den Schnittpunkt D^0 mit der durch F' gelegten Parallelen; wird dann in der Ebene A_1 von $D_1{}^0$ aus eine Parallele zu $D^0 D$ gezogen derartig, dafs $\frac{D_1{}^0 D_1}{D^0 D} = \frac{HF}{AF}$ wird, so ist D_1 der verlangte Punkt. — Conjugirte Strahlen werden leicht durch zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt.

29. Die vorliegenden Betrachtungen sind nicht auf sphärische Systeme beschränkt, sondern es lassen sich viele Resultate ohne Mühe auf Systeme mit Rotationsflächen beliebiger Art übertragen, wenn nur die Rotationsaxen derselben zusammenfallen oder doch in sehr kleinen Abständen zu einander parallel sind.

Stettin, den 15. Juli 1876.

V. *Ueber die Complementarfarben des Gypses im polarisirten Lichte; von F. v. Kobell.*

(Aus d. Bericht d. Münchener Akademie vom Herrn Verf. mitgetheilt.)

Die prachtvollen Farben, welche sehr dünne Gypsblätter im polarisirten Lichte zeigen, haben, seitdem Arago im Jahre 1811 auf sie aufmerksam gemacht hat, die Physiker mehrfach beschäftigt. Arago erkannte, dafs diese Farben, mit einem Kalkspath untersucht, in dessen zwei Bildern complementar erscheinen. Brewster beschreibt die Erscheinung ganz genau; wie vom glänzenden Roth ausgehend beim Drehen des Zerlegers die Farbe allmählig sich

bleiche, bis sie bei einer Drehung um 45° ganz verschwinde und darüber hinaus allmählig mit Grün erscheine und diese Farbe immer glänzender hervortretend bei einer Drehung von 90° in vollkommener Schönheit sich zeige.

So ist das Verhalten, wenn die Schwingungsebene des Gypsblattes parallel den Schwingungen des Nicol's ist, und diese rechtwinklig gegen die des Lichtes, welches von einem schwarzen Spiegel polarisirt wird. Das Stauroskop giebt die Lage der Schwingungsebene am Gyps in der Art an, daſs sie mit der faserigen Spaltungsfläche einen Winkel von 15°, mit der muschligen einen von 50° bildet. Sie fällt also nahezu in die Richtung der von Neumann bestimmten optischen Mittellinie. Der spitze ebene Winkel des rhomboidalen Blattes ergiebt sich daraus zu 65°. Nach andern genauen Messungen ist er 66° 14'.

Wenn man auf einem Gypsblatt die Linie der Schwingungsebene einritzt und das Blatt so dreht, daſs diese Linie mit der Schwingung des auf Dunkel gestellten Nicols parallel liegt, so zeigen sich die Erscheinungen ganz normal, wie sie Brewster angegeben; man erhält zu einer erscheinenden Farbe durch Drehung des Nicols um 90° nach links oder rechts die complementare und ein farbloses Feld beim Drehen um 45°.

Anders verhält es sich, wenn das Gypsblatt so gedreht wird, daſs die Schwingungsebene seiner Doppelbrechung eine andere Lage gegen die Schwingung des Nicols hat als die angegebene. Dann kann der Fall eintreten, daſs für eine Farbe schon beim Drehen des Nicols um 45° die complementare erscheint. Ich habe darüber einige Beobachtungen angestellt und zwar zunächst mit Rücksicht auf die faserige Theilungsfläche oder die entsprechende Linie, welche, oft mehrfach, an jedem Gypsblatt kenntlich oder leicht aufzufinden ist. Ich benutzte vorzüglich einen groſsblättrigen Gyps von Aschersleben am Harz, von welchem ich durch freundliche Mittheilung des Herrn Prof. Ulrich in Hannover schöne Platten erhielt. Es ist dieser Gyps wie kaum ein anderer fein und so gleichmäſsig spaltbar,

dafs oft über ein Quadratzoll grofs im polarisirten Lichte eine einzige Farbe daran erscheint. Blätter von einiger Länge sind, abweichend von den gewöhnlichen Varietäten, elastisch biegsam.

Um bequem und sicher beobachten zu können, wurde das Gypsblatt auf eine runde Glasscheibe mit etwas Wachs befestigt und dieser auf einem Gestell die gehörige Neigung gegen den schwarzen Spiegel gegeben, oder ich klemmte das Blatt in eine, auf einem kleinen Stativ angebrachte neigbare kurze Pincette. Der in einer cylindrischen Fassung befindliche Nicol wurde durch die Mitte einer nach 45° getheilten Kreisscheibe gesteckt und ein für sich, und auch mit dem Nicol beweglicher Zeiger angebracht. Diese Scheibe wurde von einem Träger festgehalten.

Wenn der Nicol gegen den Spiegel dunkel gestellt ist, und am rhomboidalen Gypsblatt die Faserfläche oder die ihr entsprechende Linie *horizontal* liegt, also in einer Lage, wo die Schwingungsebene des Blattes mit der Schwingung des Nicols einen Winkel von 40° bildet, so erhält die erscheinende Farbe ihre complementare beim Drehen des Nicols um 45° und zwar so, dafs der Uebergang für ganz gleiche Stellung des Blattes (der stumpfe ebene Winkel oben links s. Fig. 1) bei einigen durch Drehen des *Nicols nach rechts*,

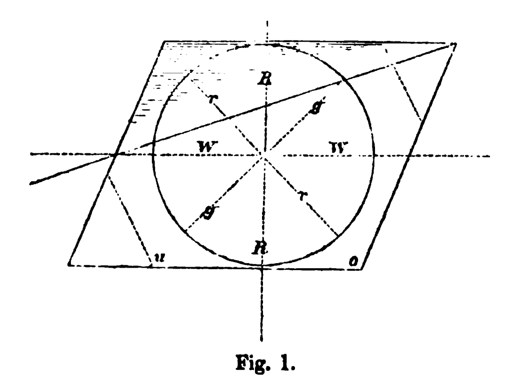


Fig. 1.

bei andern aber durch Drehung *nach links* erfolgt, ver-

gleichbar dem Verhalten eines rechts- oder eines linksdrehenden Bergkrystalls bei der Circularpolarisation.

Bei einem das Roth und Grün glänzend zeigenden Blatt war vom unmittelbar erscheinenden Roth (für die genannte Stellung) beim *Rechtsdrehen* des Nicols

um 45° das Feld complementar *grün*,
„ 90° „ „ farblos,
„ 135° „ „ blafsroth,
„ 180° „ „ vom ursprünglichen Roth.

Beim *Linksdrehen* von diesem Roth aus zeigte sich

das Feld bei 45° blafsroth,
„ „ „ 90° farblos,
„ „ „ 135° complementar *grün*,
„ „ „ 180° vom ursprünglichen Roth.

Bei anderen Blättern, und deren war die gröfsere Zahl, folgte auf die erscheinende Farbe die complementare beim *Linksdrehen* des Nicols.

Diese seltsame Erscheinung hängt mit einer Zwillingsbildung zusammen, von der man übrigens bei den meisten Blättern unmittelbar nichts erkennt. Bei einzelnen aber zeigt sich der spitze Winkel des rhomboidischen Blattes durch eine Linie abgeschnitten, s. Fig. 1 und stehen sich die gleichen Winkel *u* und *o* gegenüber. Stellt man nun das Blatt so, dafs der Winkel *u* oben links zu stehen kommt, so ist die Drehung des Nicols um 45° für die Complementarfarbe derjenigen entgegengesetzt, welche beobachtet wird, wenn der Winkel *o* oben links zu stehen kommt, weil dieses nur durch Umdrehen des Blattes geschehen kann. Das Zwillingsgesetz ist, dafs ein Blatt gegen das andere um die Faserfläche um 180° gedreht ist. Figur 2.

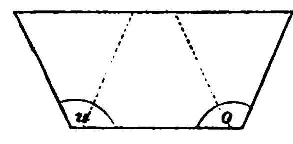


Fig. 2

Diese Zwillingsbildung, an vielen Blättern, wie gesagt, ganz unkennbar, wird an manchen im polarisirten Lichte enthüllt durch die oft prächtig in Farben strahlenden Dreiecke, welche sich am Rande des Gypsblattes zeigen. Es sind gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel

an der Basis, jeder 66° 14′, an der Spitze 47° 32′ mifst. (S. Fig. 1.) Die Basis hat die Lage der Faserfläche, die gleichen Seiten des Dreiecks entsprechen der muschligen Theilungsfläche und erscheinen in Folge des Zwillingsgegesetzes gegen einander geneigt.

Ich habe in ähnlicher Weise einen Muscovit von Buckfield in Maine untersucht.

Die Krystalle sind tafelförmige rhombische Prismen von 120° mit der brachydiagonalen Fläche, die Axenebene liegt in der Makrodiagonale, die Schwingungen der Doppelbrechung gehen nach den Diagonalen. Wenn ein gehörig dünnes Blatt so gestellt wird, dafs die Schwingungsebene mit der des Nicols parallel und dieser auf Dunkel gegen den Spiegel steht, so zeigt das Blatt keine Farbe, wie für solche Stellung beim Gyps der Fall ist, es erscheint dunkel und beim Drehen des Nicols um 90° hell, ohne merkliche oder nur ganz schwache Färbung in der Zwischenstellung. Wenn aber eine Seite der rhombischen Tafel horizontal gestellt wird und der stumpfe ebene Winkel oben links, so zeigen sich Farben, welche beim Drehen des Nicols um 45° *nach links* in die complementaren übergehen. Die Schwingungsebene des Blattes bildet dabei mit der Schwingung des dunkel gestellten Nicols 60°.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VIII. ERGÄNZUNG. Stück 3.

I. *Ueber die Magnetisirung ellipsoidisch-geformter Eisen- und Stahlkörper und die Veränderung des temporären und permanenten Magnetismus; von A. L. Holz.*

I. Die Magnetisirungsfunction.

§ 1. Theorien über magnetische Induction.

In keinem Theile der Physik begegnen wir so wenig Uebereinstimmung der Erfahrungen mit den vorhandenen Theorien, als in dem des Magnetismus; die durch werthvolle mathematische Untersuchungen erhaltenen Sätze der Poisson'schen, von Neumann und Kirchhoff verallgemeinerten Theorie, scheinen nicht genügend mit den Resultaten übereinzustimmen, welche namhafte Physiker durch eine Reihe mühsamer Experimente erhalten haben, und selbst Weber's Theorie der drehbaren Molekularmagnete giebt nur unter einer Modification von Maxwell[1]), dafs der um einen Winkel β abgelenkte Molekularmagnet in gewissen Fällen, welche wir im II. Abschnitt, § IX. genauer angeben, nicht wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, sondern um einen Winkel $\beta - \beta_0$ abgelenkt bleibt, eine annähernde Uebereinstimmung mit der Theorie. Betrachten wir die verschiedenen Voraussetzungen beider Theorien, so unterscheidet sich Poisson's Theorie von der Weber'schen in ihren Annahmen im Wesentlichen dadurch, dafs die erstere zwei magnetische Fluida voraussetzt, welche sich an die Oberflächen der Moleküle begeben, wenn magnetisirende Kräfte auf magnetische Sub-

1) Maxwell, *Electricity and Magnetism, Vol. II, pag.* 79.

stanzen einwirken und daſs die beiden Fluida vermöge einer durch die magnetisirende Kraft hervorgerufenen Spannung in ihren entgegengesetzten Lagen festgehalten werden und aus einem Moleküle nicht in das benachbarte Molekül übertreten dürfen, während Weber's Theorie das Molekül selbst schon als einen fertig hergestellten Magnet mit an den entgegengesetzten Enden versehenen Polen darstellt, welcher nur der einwirkenden magnetisirenden Kraft gehorchen darf, um durch eine Drehung aus dem stattgehabten indifferenten Zustande in den nach auſsen wirkenden, magnetischen überzugehen.

Poisson nimmt an, daſs in der Einheit des Volumens der Substanz das ganze Volumen aller magnetischen Elemente durch die Constante k dargestellt werden könne, es wird aber durch Maxwell[1]) gezeigt, daſs wenn $k = \frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa + 3}$ gesetzt wird, wo $\varkappa$ als Neumann's magnetischer Inductions-Coëfficient nach Thalen's Bestimmung für weiches Eisen $= 32$ gesetzt werden kann, für k der Werth von $\frac{134}{135}$ sich ergiebt; dieser Werth von nahe der Einheit repräsentirt die Gröſse von Poisson's magnetischem Coëfficient und bestimmt das Verhältniſs des Volumens der magnetischen Moleküle zu dem Volumen des Eisens; es scheint aber dieses Verhältniſs im Widerspruche mit der Erfahrung zu stehen, denn es ist erforderlich, daſs die Volum-Einheiten eines Stückes Eisen nahezu aus einer einander gleichen Anzahl magnetischer Moleküle bestehen, und daſs die dem Eisen beigemengten Bestandtheile fast vollkommen gleichmäſsig vertheilt seyn müssen, und zwar in so verschwindend geringem Volumen nur vorhanden seyn dürfen, damit das Verhältniſs von nahe der Einheit bestehen kann: „es ist aber auch höchst unwahrscheinlich, daſs ein so groſses Verhältniſs des Eisen-Volumens durch feste Moleküle ausgefüllt werde.“

Weber's Theorie erscheint einfacher durch die An-

1) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, *Vol. II*, *pag.* 54.

nahme drehbarer Molekularmagnete, und dürfte eher geeignet seyn, in Verbindung mit dem erwähnten Maxwell'schen Zusatz, uns einstweilen ein Bild über den innern Vorgang während der Magnetisirung zu verschaffen, bis einst alle die zahlreichen, sich fortwährend mehrenden und noch ungenügend erklärten Erscheinungen, welche nur durch die Einwirkung einer magnetisirenden Kraft *auf alle Körper* herrorgerufen werden, aus *einer und derselben Theorie* klar hervorgehen.

§ 2. Prüfung der Theorie.

Im Jahre 1857 hat Herr Wiedemann zuerst seine äufserst wichtigen und ausführlichen Untersuchungen über *„die genaueren Verhältnisse der Zunahme der temporären und permanenten magnetischen Momente im Eisen und Stahl mit wachsender Kraft"* veröffentlicht [1]), und im Jahre 1864 hat Herr G. v. Quintus Icilius aus seinen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Stärke der temporären Magnetisirung von der Gröfse der magnetisirenden Kraft eine gröfsere Reihe von Resultaten erhalten, welche die des Herrn Wiedemann bestätigten; seitdem sind weitere sorgfältige und ausgedehnte Untersuchungen über denselben Gegenstand von Hrn. Riecke [2]), Hrn. Stoletow [3]) und Hrn. Rowland [4]) theils an Ellipsoiden und theils an Ringen gemacht worden. Durch die Resultate des Hrn. Riecke, zugleich aber auch durch seine eigenen, wurde Herr Stoletow zu folgenden, äufserst wichtigen Schlufsfolgerungen geführt, die in seiner „Notiz über die Magnetisirungsfunction verschiedener Eisenkörper" wörtlich lauten [5]):

„Herr Prof. Riecke schlägt vor, statt der Magnetisirungsfunction des unendlichen Cylinders eine andere

1) Wiedemann's Galvanismus Bd. II, S. 343.
2) Pogg. Annal. Bd. CXLIX, 1873, S. 433.
3) Pogg. Annal. Bd. CXLVI, 1872, S. 439.
4) *Philosophical Magazin for August* 1873.
5) Pogg. Annal. Bd. CLI, 1873, S. 318.

Function p zu betrachten, welche dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Kugel hat. Beide Gröſsen, auf dieselbe Scheidungskraft bezogen, werden durch die Relation verbunden:

$$k = \frac{p}{1 - \frac{4}{3}\pi p}$$

oder

$$p = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{k}}$$

Die Function p soll deſshalb den Vorzug verdienen, weil sie „innerhalb eines sehr groſsen Gebietes magnetisirender Kräfte einen für alle Eisensorten nahezu constanten Werth besitzt." In der That stimmen die Werthe von p, welche Herr Riecke aus eigenen und fremden Versuchen berechnet hat, sehr gut überein, sie geben als Mittelwerth für mäſsige Scheidungskräfte die Zahl 0,2372 und als Maximalwerth $p = 0{,}2382$.

„Der Zweck der vorliegenden Notiz ist hervorzuheben, daſs diese Resultate von selbst einleuchten und obige Zahlen eine sehr einfache Bedeutung haben. Diese sind nämlich nichts weiter, als ziemlich nahe Approximationen an die Zahl

$$\frac{3}{4\pi} = 0{,}2387,$$

welche als die obere Gränze von p erhalten wird, wenn wir $k = \infty$ setzen und folglich das ideale Maximum von p darstellt. Bei mäſsigen Scheidungskräften ist $\frac{1}{k}$ immer klein gegen $\frac{4\pi}{3}$ und darf in der ersten Annäherung vernachlässigt werden. Deſshalb bleibt p immer nahezu constant und unabhängig von der Beschaffenheit des Eisens."

Herr Riecke giebt in Poggendorff's Annalen Bd. CXLIX, S. 470 die Resultate seiner Untersuchung an, dieselben lauten:

„Während wir also in Bezug auf die Function k kaum

ein allgemeines Resultat anzugeben im Stande sind, können wir als Ergebniſs unserer Untersuchungen über die Function p folgende zwei Sätze aufstellen:

1) die Magnetisirungsfunction der Kugel p ist für Werthe der magnetisirenden Kraft von 8 bis 40,000 bis auf 1 Proc. als constant zu betrachten für sämmtliche zu den angeführten Versuchen benutzte Eisensorten. Der Mittelwerth derselben innerhalb der gegebenen Gränzen des Arguments ist

$$p = 0{,}2372.$$

2) Eine genauere Betrachtung des Verlaufs der Function p zeigt, daſs dieselbe anfangs bei wachsendem Argument zunimmt, zwischen den Werthen $P = 20000$ und $P = 30000$ ein Maximum erreicht, und bei noch weiter zunehmendem Argument wieder abnimmt. Der Maximalwerth der Function p ist im Mittelwerth aus den obigen Beobachtungen

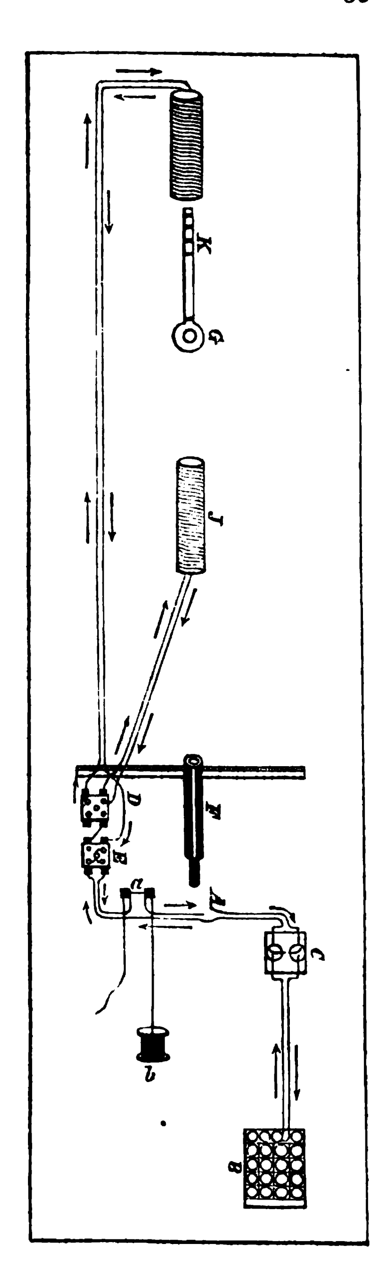
$$p = 0{,}2382.$$

Seit Mai 1874 habe ich mich im physikalischen Laboratorium der hiesigen Universität ebenfalls behufs Bestimmung der Magnetisirungsfunction ellipsoidisch-geformter Eisenkörper mit einer experimentellen Untersuchung beschäftigt, deren Einzelheiten in Folgendem mitgetheilt werden sollen.

§ 3. Die Anordnung der benutzten Apparate.

Nach Verlauf einiger probeartigen Vorversuche gelangte ich zur Aufstellung vollkommen zuverlässiger Apparate, um auf das Genaueste und Sicherste die Gröſse der magnetisirenden Kraft, der inducirten temporären als auch permanenten Momente zu erhalten; die Lagen der einzelnen Apparate sind in umstehender Figur dargestellt.

Die beiden Spiralen, welche mit H und J bezeichnet sind, bestanden aus einem 6,35 Mm. dicken Kupferdraht, diejenige, welche mit H bezeichnet, war 160 Mm. lang und diente zur Magnetisirung der Eisenkörper, die andere



Spirale, in der Figur bei *J* befindlich, welche 150 Mm. lang war, wurde zur Compensation benutzt. Die Magnetisirungsspirale befand sich in einem westlichen Abstande = 925 Mm. von dem Spiegelgalvanometer *G*, diesem gegenüber im östlichen Abstande von 897 Millim. war die Compensations-Spirale auf einem Stativ befestigt, das besonders für diesen Zweck construirt war; vermittelst feiner Verschiebungen des Stativs konnte ich mit der auf ihr befestigten Spirale überaus zuverlässig compensiren. Die Scala befand sich in einer Entfernung von 1445 Millim. vom Magnetspiegel, ihr Mittelpunkt lag genau in einer Verticalebene mit der Axe des Fernrohrs und der Verlängerung derselben zum Magnetometer, während die Scala selbst auf das Sorgfältigste senkrecht zur Fernrohraxe für die ganze Dauer der Untersuchung angebracht war. Zur Umwendung des galvanischen Stromes liefs ich vom Mechaniker Voss zwei Commutatoren (Tafel II) anfertigen, mit welchen ich

überaus sicher arbeiten konnte; dieselben waren so construirt, dafs sie nur einen relativ unerheblichen Widerstand erzeugten, und bei den stärksten zur Anwendung gekommenen Strömen, welche zuweilen durch eine Batterie von 30 Bunsen'schen Elementen erhalten wurden, zeigte sich an keiner Stelle eine erhebliche *Erwärmung*, welche eine Veränderung durch das Umwenden des Stromes an den Contactstellen erlitten hätte und dadurch eine nicht unerhebliche Störung hervorgerufen haben würde, da die einmal in einer Richtung abgelesene Intensität für die entgegengesetzte Richtung nicht mehr constant gewesen wäre. Der Commutator *D* diente zur Umkehrung des Stromes in der Compensationsspirale, der zweite Commutator, in der Figur mit *E* bezeichnet, vermittelte die Stromumwendung in der Magnetisirungsspirale, beide waren im Stromkreise so eingeschaltet, dafs ich sie, während die Ablesungen durch das Fernrohr geschahen, so schnell es erforderlich erschien, leicht dirigiren konnte. An der rechten Seite des Fernrohrs war ein Stromschlüssel bei *A* befestigt, mit welchem ich jederzeit den Strom öffnen und schliefsen konnte, bei *C* befanden sich zwei isolirte Quecksilbernäpfchen, durch welche der Ab- und Zuleitungsdraht der Batterie gingen, und gleichzeitig zu einer Nebenschliefsung benutzt werden konnten.

§ 4. Vermeidung der Wirkung des Extracurrents nach Helmholtz's Theorie.

Es war mir ganz aufserordentlich wichtig, jedesmal bei Anwendung einer bestimmten Stromstärke die permanenten Momente ohne irgend eine störende Wirkung möglichst sicher zu erhalten; ich hielt es defshalb für nöthig, vor allen weiteren Vorsichtsmafsregeln, zunächst die Wirkung des Extracurrents in dem Augenblicke zu beseitigen, in welchem ich zur Beobachtung der permanenten magnetischen Momente überging; ferner wollte ich einige Unregelmäfsigkeiten unterdrücken, die sich wohl eingestellt hätten, wenn ich durch irgend welche Verschiebungen oder

Drehungen den zu magnetisirenden Eisenkörper in dem elektrischen Felde der Spirale so bewegt haben würde, daſs die durch Lagenveränderung der magnetischen Axe veränderte Induction gleichzeitig das permanente Moment hätte verändern können.

Wird nun der Stromkreis vermittelst angeführten Schlüssels bei A geöffnet, während bei C die Nebenschlieſsung stattfindet, so wird nach Herrn Helmholtz's theoretischen und experimentellen Untersuchungen [1]) der Oeffnungsextrastrom nicht zu Stande kommen. Ich habe an sämmtlichen für die Untersuchung bestimmten Eisen- und Stahlellipsoiden, welche in § 5 näher bezeichnet werden, nach Beendigung der Versuchsreihen den permanenten Magnetismus beobachtet, indem ich den ganzen Stromkreis ohne Anwendung der Nebenschlieſsung öffnete, und fand ohne Ausnahme den bedeutenden Verlust des permanenten Magnetismus, während mit Anwendung der Nebenschlieſsung die magnetisirten Ellipsoide genau das Maximum der Magnetisirung erhielten, welches sie zeigten, als 100 Impulse desjenigen Stromes auf sie wirkten, welcher fähig war, das Maximum des permanenten Magnetismus zu induciren; genau dieselbe Uebereinstimmung ergab sich noch an einer gröſseren Anzahl von Stäben, welche in der probeweisen Voruntersuchung zu diesem Zwecke benutzt wurden. Die so bedeutende Veränderung der permanenten Momente wird wohl besonders durch Oscillationen des primären Stromes bedingt seyn, wobei dieser für Augenblicke entgegengesetzte Richtung annehmen kann [2]). Die Eisenellipsoide wurden regelmäſsig erst dann aus der Magnetisirungsspirale gezogen, nachdem der Strom unterbrochen war, worauf die Bestimmung der permanenten Momente stattfand.

1) Helmholtz, Pogg. Annal. Bd. LXXXIII, 1851.
2) N. Schiller, Pogg. Annal. Bd. CLII, S. 535.

§ 5. Ueber die Art des Materials und der Herstellung von sechs Ellipsoiden.

Die vorliegende Untersuchung wurde an sechs Eisen- und Stahlellipsoiden vollzogen, welche ich nach sorgfältig entworfenen, geometrischen Zeichnungen selbst geschliffen habe. Die Uebereinstimmung des aus den Hauptaxen der Ellipsoïde berechneten Volumens mit dem Volumen aus dem Gewichtsverlust in Wasser suchte ich, so weit es möglich war, durch Schleifen zu erreichen, bis der Unterschied so klein war, dafs ich ihn vollständig vernachlässigen konnte.

Die Ellipsoide waren aus drei verschiedenen Eisen- und Stahlsorten hergestellt, für welche ich einige der bekanntesten deutschen und englischen Qualitäten, die sehr verschieden in ihrer Härte und Struktur waren, gewählt hatte, es bestanden:

2 Ellipsoide aus englischem Stübbstahl von Sanderson Brothers,
2 Ellipsoide aus westphäl. Eisendraht (Union),
und 2 - - engl. Atlasstahl von Bolten, Iron.

Die Dimensionen, specifischen Gewichte etc. sind im § 14 einzeln in den Tabellen I bis XII enthalten.

Ich habe geglaubt durch die Wahl nur weniger, aber bekannter Haupt-Qualitäten und durch Feststellung einer nur geringen Anzahl von Ellipsoiden sicherer zu dem Ziele zu gelangen, die magnetisch-charakteristischen Eigenschaften in ihrer Verschiedenheit, je nach Verschiedenheit der Gattung herauszufinden, wenn bei der Untersuchung derjenige Grad von Genauigkeit beobachtet würde, welcher mir bei solchen Bestimmungen nur möglich gewesen wäre, denn es lag die Frage zu entscheiden vor, ob nach der Riecke-Stoletow'schen Annahme bei der Function p auch die Stoffbeschaffenheit so weit zurücktreten wird, dafs in den Werthen von p kein Unterschied mehr erkennbar ist, ob ferner nach jener Annahme auch für diese verschieden-

artigen Qualitäten p für ein so grofses Gebiet magnetisirender Kräfte constant seyn würde.

§ 5. Die Compensation.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit der Spiegelablesungen zur Bestimmung der Stromstärken, permanenten und temporären magnetischen Momente gebe ich in § 16 ein Protocoll einiger Beobachtungssätze; ich möchte jedoch noch die vollkommene Compensation erwähnen, welche mich bei der ganzen Ausführung dieser Untersuchung unterstützte.

Eine gerade Verbindungslinie der Axen beider Spiralen ging genau durch den Mittelpunkt des Stahlspiegels, die Ablenkung des Spiegels, welche die Intensität der Magnetisirungsspirale H verursachte, konnte durch eine zweite gegenüberstehende Spirale J, durch welche derselbe Strom hindurchging aufgehoben werden; legt man jetzt ein Ellipsoid in die Spirale, während der Stromkreis geschlossen ist, so wird die stattfindende Ablenkung nur noch von dem in dem Ellipsoide inducirten Magnetismus herrühren. Erst nach einer längeren Reihe von Versuchen und nach verschiedenen Anordnungen der einzelnen Leiterstücke des Stromkreises so wie durch sorgfältiges Aneinanderbefestigen der Zu- und Ableitungsdrähte ist es mir gelungen, jeden Fehler in der Compensation zu beseitigen, so dafs ich dieselbe als eine vollkommene erreicht hatte ich konnte defshalb die Spirale J für den ganzen Gang meiner Untersuchungen in der im § 3 angegebenen Lage befestigen; aber auch jede, selbst die kleinste Differenz einer nicht vollständigen Ausgleichung der Spiegelablenkung beider gleichnamigen Intensitäten konnte ich durch das regulirbare Stativ von nun ab aufheben.

§ 7. Die Anwendung von Kautschuk-Ringen.

Die Magnetisirungsspirale trug an jedem Ende ein gebogenes Glasstäbchen \\/ , dessen Lage für jeden Stab geändert wurde und zwar so, daſs ein Glasröhrchen, in welchem das Ellipsoid fest lag, mit beiden Enden darauf ruhen konnte; es geschah dies, weil die Ellipsoide kürzer als die Spirale waren, und um gleichzeitig die groſsen Axen der Ellipsoide genau mit der Axe der Spirale zusammenfallen zu lassen. Jedes Glasröhrchen, das ein Ellipsoid erhielt, war mit Kautschuk-Ringen an den Stellen versehen, welche auf die \\/ förmigen Stützen jedesmal eingreifen muſsten, und deshalb auch immer den Mittelpunkt des Ellipsoides mit dem der Spiral-Axe vereinigen lieſsen. Die Kautschuk-Ringe hatten auch noch den Zweck, daſs durch Vermeidung harter Stöſse und Erschütterungen die Veränderungen der permanenten magnetischen Momente so wie überhaupt eine Veränderung der Magnetisirbarkeit verhindert werde; ich brachte aus diesem Grunde noch einige kleine Kautschuk-Sättel an den Stellen an, auf welche die magnetisirten Ellipsoide gelegt wurden, als sie aus der Spirale genommen wurden. Diese Kautschuk-Sättel lagen in drei verschiedenen Entfernungen vom Magnetometer, um die permanenten Magnetismen aus drei verschiedenen Beobachtungen zu bestimmen. Die hierzu benutzten Glasröhrchen wurden zuvor auf ihren Magnetismus untersucht und nur diejenigen als Träger eines Ellipsoides benutzt, welche für unmagnetisch gefunden wurden.

Die Magnetisirung der Stäbe geschah nur in gleichem Sinne, d. h. die Stäbe haben während der ganzen Dauer, von der ersten Magnetisirung bis zur letzten, stets dieselben Pole behalten, es muſste also jedes Ellipsoid in eine

entgegengesetzte Lage gebracht werden, sobald der Strom umgekehrt wurde.

§ 8. Vermeidung von Wärme.

Die im Stromkreise befindlichen Leitungsdrähte hatten einen Durchmesser von 3 Mm. und die Veränderung der Temperatur innerhalb der Spiralen betrug bei der höchsten Intensität etwa 4 bis 5°; bis zur Hälfte der angewandten Stromintensitäten von der kleinsten aufwärts gerechnet, war keine Temperaturveränderung deutlich wahrzunehmen, diese Thatsache ist zur Bestimmung des ganzen temporären sowie permanenten Magnetismus besonders erwähnenswerth, es ist mir auch nicht bekannt, ob irgend ein ähnlicher Versuch mit Spiralen durchgeführt wurde, welche einen Kupferdraht von über 6 Mm. Dicke hatten; die Vortheile, welche ich durch solche Vorsichtsmaſsregel erhielt, werden sich bald aus den Resultaten ergeben.

§ 9. Eintheilung der magnetisirenden Kraft.

Ich begann für die kleinste in Anwendung gebrachte Stromintensität mit einer Spiegelablenkung, welche 20 Scalentheile zeigte, und erhöhte jede folgende Intensität abermals um 20, so daſs ich für den Lauf einer ganzen Versuchsreihe folgende Ablenkungen erhielt: 20 (1, 2, 3, 4, 5 bis 30), wofür ich als berechnete Stromintensitäten nach absolutem Maſse:

56,85 (1, 2, 3, 4, 5 bis 30)

wie aus den Tabellen § 14 ersichtlich, bestimmt habe.

§ 10. Die Neumann'sche Gleichung für die Induction des Ellipsoides.

Nach diesen Mittheilungen über die Beschaffenheit des Apparates können wir an den theoretischen Theil gehen, zuvor aber noch einige Berechnungen anführen, vermittelst welcher die Werthe, die wir in 11 Rubriken eingetheilt finden, erhalten wurden.

Die Theorie von Poisson hat Neumann (Journal

für reine und angewandte Mathematik (Bd. XXXVII, S. 44) für ein Rotations-Ellipsoid aufgelöst, auf welches in der Richtung seiner Rotationsaxe eine constante magnetisirende Kraft wirkt; es kann hierzu sowohl der Erdmagnetismus als auch der galvanische Strom benutzt werden, wenn derselbe durch die Spirale geleitet wird und der der Magnetisirung unterworfene Körper in die von der Spirale umflossene Fläche gebracht wird. Ist m das magnetische Moment eines gestreckten Rotations-Ellipsoides, so hat Neumann bewiesen, daſs für Eisen bei der äuſseren Kraft X das magnetische Moment des Ellipsoides sey

$$m = \frac{k v X}{1 + k S} \quad \ldots \ldots \quad a,$$

wo v das Volumen ist und S eine aus dem Axen-Verhältniſs des Ellipsoides zu berechnende Zahl bedeutet und zwar

$$S = 4 \pi \sigma (\sigma^2 - 1) \left(\tfrac{1}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma} \right) \quad . \quad b,$$

k ist hierin nothwendig positiv für Eisen, der Werth von k soll von der Natur des Eisens abhängen, und nach Neumann mit dem Namen „*magnetische Constante* des Eisen" bezeichnet werden, σ bedeutet die reciproke Excentricität des Ellipsoides und wird ausgedrückt durch: $\sigma^2 = \frac{l^2}{l^2 - d^2}$ wo l und d die Axen des Ellipsoides sind. Sämmtliche Werthe für S muſsten direct aus der Formel berechnet werden, denn bei einer Entwickelung der Reihe nach Potenzen von σ erhalten wir:

$$\log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} = 2 \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sigma^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{\sigma^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{\sigma_0^7} + \ldots \right].$$

Die Werthe von σ sind für Ellipsoid I = 1,000172
- - - - - - - II = 1,000355
- - - - - - - III = 1,000560
- - - - - - - IV = 1,000256
- - - - - - - V = 1,000531
- - - - - - - VI = 1,000413

wir sehen, dafs für diese Werthe von σ die Reihe nur sehr langsam convergirt und deshalb zur Berechnung von S unter Vernachlässigung höherer Potenzen nicht geeignet war.

Die Theorie setzt nun voraus, dafs wenn auf eine Eisenmasse die magnetisirende Kraft einer Spirale wirkt, dafs dann jeder bestimmten Kraft auch ein bestimmtes magnetisches Moment entsprechen werde, dieses Moment wird als Function der magnetisirenden Kraft dargestellt und der Werth des Verhältnisses zur magnetisirenden Kraft dürfe demnach als Magnetisirungsfunction ausgedrückt werden.

§ 11. Berechnung der magnetisirenden Kraft.

Zur Berechnung der magnetisirenden Kraft der Spirale H haben wir zuerst die Stromintensität zu bestimmen, welche in dieser Spirale allein gewirkt hatte; aus der Aufstellung meiner Apparate ging deutlich hervor, dafs ich dasselbe Magnetometer, welches zur Bestimmung der magnetischen Momente gedient hatte, zugleich an demselben Orte zur Beobachtung der Stromintensität angewandt habe, und durch die Anwendung zweier Spiralen, die eine der Magnetisirung, die andere der Compensation dienend, wurde der magnetische Spiegel von beiden Spiralen in gleichem Sinne abgelenkt, und zwar zu gleicher Zeit um die Gröfse φ_m nur durch die Magnetisirungsspirale, und um die Gröfse φ_e allein durch die Compensationsspirale, oder durch beide Spiralen im Ganzen um φ_t. Bezeichnen wir jetzt die zur Bestimmung der Intensität nöthigen Constanten, welche sich aus den Dimensionen der Spiralen und den Entfernungen vom Magnetometerspiegel zusammensetzen mit R_m und R_e, so können wir die Gröfse der Ablenkung φ_m berechnen, welche die Spirale H allein bei gleicher Intensität des Stromes hervorgerufen hat und zwar aus der Relation:

$$\frac{R_m + R_e}{R_m} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_t}{\operatorname{tg}\varphi_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Die einzelnen Werthangaben zur Berechnung der Intensität gehen aus Folgendem hervor:

Die Länge der Magnetisirungsspirale war 160 Mm., der von der Spirale umwundene Flächenraum S betrug 300032 Quadratmillimeter, welcher sich aus den vier Lagen der Spirale berechnet, deren jede 22 Windungen hatte, die vier verschiedenen mittleren Durchmesser betrugen 38, 52, 74 und 88 Mm., für die horizontale Intensität habe ich 1,83 gesetzt, die Ablenkung beider Spiralen betrug 20 Scalentheile, demnach ist die Tangente des Ablenkungswinkels = 0,00692. Die westliche Entfernung der Magnetisirungsspirale von dem Magnetometer ist wie bereits im § 3 angeführt mit 925 Mm. und die Gröfse des östlichen Abstandes der Compensationsspirale mit 897 Mm. in Rechnung gezogen worden. Die Länge der Compensationsspirale war 150 Mm. lang, der Flächenraum S war = 280318 Quadratmillimeter, welcher sich aus 4 Lagen berechnet, deren äufserste aus 20 Windungen und deren drei inneren Lagen je 21 Windungen hatten, die Durchmesser der Windungen waren dieselben, welche oben für die Magnetisirungsspirale angegeben sind. Eine Zusammensetzung dieser Werthe zur Berechnung der Stromintensität nach absolutem Mafse ergiebt:

$$i = \left[\frac{160}{300032} \cdot \frac{1,83}{\frac{1}{(925 - \frac{1}{2} . 160)^2} - \frac{1}{(925 + \frac{1}{2} . 160)^2}} + \frac{150}{280318} \cdot \frac{1,83}{\frac{1}{(897 - \frac{1}{2} . 150)^2} - \frac{1}{(897 + \frac{1}{2} . 150)^2}}\right] 0,00672.$$

Wir erhalten nach der Proportion 1, für die Intensität der Magetisirungsspirale 8,32, woraus die magnetisirende Kraft für die Ablenkung von 20 Theilstrichen

$$X = \frac{4,22 . 2\pi\, 8,32}{80,9} = 56,85.$$

Die Reihenfolge der gleichmäfsig aufsteigenden Intensitäten, wie ich dieselben im § 9 angegeben habe, erhielt ich durch genaue Regulirung eines in dem Stromkreis be-

findlichen Widerstandes aus Neusilberdraht, den ich zur Seite des Fernrohrs für den ganzen Umfang meiner Untersuchung (in der Figur bei *a* angedeutet), mit großer Leichtigkeit und Sicherheit benutzte; bei *b* hing die Drahtrolle, aus welcher ich die erforderliche Länge des Widerstandes entnehmen konnte.

§ 12. Das Ausglühen der Ellipsoide.

Die vollständige Aufstelluug der Werthe für die elektromagnetischen Kräfte, welche in Richtung der Spiralaxe wirkten, befindet sich in der ersten Rubrik jeder Tabelle; ich habe die Anzahl der Tabellen durch das Ausglühen der Ellipsoides vergrößert; die ersten 6 Tabellen gelten für die Eisenqualität, wie solche käuflich vorkommt, die weiteren 6 Tabellen habe ich erhalten, nachdem die Ellipsoide einem besonders sorgfältigen Glühen ausgesetzt waren: In ein Stück Eisenrohr wurden die 6 Ellipsoide hineingeschoben, wovon jedes besonders mit einer Platinhülle umgeben war, um ein Anschweißen der glühenden Eisenmassen untereinander zu verhindern; das Eisenrohr wurde nun an beiden Enden mit Eisenschrauben vollkommen luftdicht abgeschlossen und in eine Kohlengluth gebracht, welche ich ungefähr 6¼ Stuuden ununterbrochen durch Gebläse unterhalten habe. Während etwa 4 Stunden befand sich das Eisenrohr mit den Ellipsoiden in einer nahezu blendenden Weißgluth, wodurch ich einen sehr hohen Grad der Weichheit des Eisens und Stahles erreicht hatte, da ich bis zum andern Tage die Ellipsoide noch unter der Einwirkung eines allmäligen Erlöschens in dem Ofen aufbewahrte.

Nach diesem Glühproceß wurden die ausgeschiedenen, dem Eisen beigemengten Stoffe, welche während der hohen Gluth wahrscheinlich in Oxyde übergingen und in pulveriger Masse mit dem Glühspan oder dem Oxyduloxyd des Eisens auf den Ellipsoiden lagerten, entfernt, und dann von Neuem die specifischen Gewichte bestimmt, worauf sich folgende Unterschiede ergaben:

		Gewichte in der Luft:		Specif. Gewichte:	
		Vor dem Glühen	Nach dem Glühen	Vor dem Glühen	Nach dem Glühen
harter Stahl	1,	3972,5	3937	7,832	7,972
	2,	8161	8104,7	7,827	8,248
Eisendraht	3,	12448,7	12384,5	7,657	7,695
	4,	5792,7	5754	7,787	7,856
weicher Stahl	5,	11461,3	11400	7,856	7,894
	6,	8945,9	8892	7,872	7,920

§ 13. Ableitung der Functionen k und p.

Wir können jetzt zu den Gleichungen übergehen, welche aus der Poisson-Neumann'schen Theorie sich ergeben, indem wir die Entwickelung benutzen, welche Hr. Riecke in der angeführten Untersuchung S. 434 angiebt.

Es sey das inducirte magnetische Moment eines Eisenellipsoides, wenn die Richtung der magnetisirenden Kraft mit der Rotationsaxe zusammenfällt

$$m = \frac{k v X}{1 + k S} \quad \ldots\ldots . \quad 2)$$

für eine Kugel wird $S = \frac{4}{3}\pi$, also

$$m = \frac{k v X}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \quad \ldots\ldots . \quad 3)$$

für ein unendlich langgestrecktes Ellipsoid wird

$$m_{,} = k v X \quad \ldots\ldots . \quad 4)$$

Setzen wir das magnetische Moment eines unendlich langgestreckten Ellipsoides, dessen Volumen = 1, gleich dem Momente unseres Ellipsoides, so entsteht die Gleichung

$$m = m_{,} = G X = \frac{v k X}{1 + k S} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

woraus sich für

$$k = \frac{G}{v - G S} \quad \ldots\ldots . \quad 6)$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die innere constante magnetisirende Kraft, welche auf das Ellipsoid wirkt, mit K, und die äufsere Kraft, wie in § 11 berechnet, mit X, so dürfen wir setzen:

$$k K = \frac{k X}{1 + k S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$K = \frac{X}{1 + k S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7a)$$

Aus diesen Gleichungen entwickelt Hr. **Riecke** die Magnetisirungsfunction p, indem das Ellipsoid den unendlich langen Cylinder sowohl als auch die Kugel umfafst; drücken wir die Magnetisirungsfunction der Kugel durch p aus, so erhalten wir aus der Relation:

$$p = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

$$k = \frac{p}{1 + \frac{4}{3}\pi p} = \frac{G}{v - G S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

$$p = \frac{G}{v + (\frac{4}{3}\pi - S) G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$P = \frac{X}{1 - (\frac{4}{3}\pi - S) p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Diese Gleichungen erhalten wir nur unter der Bedingung, dafs das magnetische Moment des unendlich langen Cylinders für die Volumeneinheit dasselbe ist, wie bei der Kugel, und welche in Folge der Beziehung zwischen K und P ausgedrückt wird durch folgende Gleichung:

$$m = k K = p P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

§ 14. Erläuterungen der 11 Rubriken nachstehender 12 Tabellen.

In den nach diesen Gleichungen ausgerechneten Tabellen, welche wir in diesem Theile der Untersuchung aufstellen werden, haben die Werthe der verschiedenen Rubriken folgende Bedeutung:

1) X bedeutet die inducirende, elektromagnetische Kraft,

2) tang α - die Tangente des Ablenkungswinkels zur Berechnung der temporären magnetischen Momente,

3) tang β - die Tangente des Ableitungswinkels zur Berechnung der permanenten magnetischen Magnete,

4) G bedeutet Stoletow's Magnetisirungsfunction in dem nach § 10 angedeutetem Sinne,

5) $\frac{M_p}{v}$ - das permanente Moment auf die Volumeneinheit reducirt,

6) $\frac{M_t}{v}$ - die Differenz des temporären und des permanenten magnetischen Momentes, also derjenige Theil Magnetismus, welcher nach Entfernung der magnetisirenden Kraft verschwindet,

7) k - Neumann's Magnetisirungsfunction des Ellipsoides,

8) K - die im Innern des Ellipsoides wirkende Kraft,

9) p - Riecke's Magnetisirungsfunction der Kugel,

10) P - die im Innern der Kugel wirkende Kraft, nach denselben Einheiten gemessen wie p,

11) $\frac{M}{v}$ - das totale inducirte magnetische Moment auf die Volumen - Einheit berechnet $= k\,K = p\,P$.

Die oberhalb jeder Tabelle stattgefundenen Abkürzungen bedeuten: S_r: das specifische Gewicht, S: die Constante aus den Dimensionen des Ellipsoides nach § 10 Gleichung b berechnet, l: die Länge, d: der Durchmesser und V: das Volumen des Ellipsoides.

Allen Berechnungen ist für die Gewichtseinheit das Milligramm, für die Längeneinheit das Millimeter und für die Zeiteinheit die Secunde zu Grunde gelegt; wir dürfen deshalb die aus allen meinen Untersuchungen berechneten Krafteinheiten denjenigen Einheiten gleich setzen, welche Gauss in seiner Abhandlung *„Intensitas vis magneticae* etc.“ angenommen und diese Krafteinheit definirt als diejenige Kraft, die auf die Masse eines Milligramms wirkend, in einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Millimeter hervorbringt.

I.

Stübbstahl von Sanderson Brothers in Sheffield. Specif. Gew. 7,832
Durchmesser 2,618 Mm. Länge 141,25 Mm. $S = 0,01591557$ $V = 507,21$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_p}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00029	0,00009	3694,146	15,8033	398,74	8,238137	50,26016	0,23201	1781,758	414,54
113,70	0,00104	0,00242	6623,985	424,9346	1059,99	16,48619	90,06748	0,2353248	6310,076	1484,92
170,55	0,00208	0,00934	8831,980	1640,037	1329,747	24,08897	123,2841	0,23639	12562,82	2969,784
227,40	0,00303	0,01298	9649,362	2279,195	2046,952	27,28660	158,5463	0,236662	18279,75	4326,147
284,25	0,00376	0,01626	9579,300	2855,139	2513,28	27,00296	198,8090	0,236640	22685,92	5368,42
341,10	0,00490	0,01817	10403,06	3190,521	3805,6	30,45034	229,7540	0,2368758	28310,34	6996,1
397,95	0,00554	0,02032	10081,56	3569,802	4340,05	29,07860	272,0611	0,236788	33403,86	7909,85
454,80	0,00592	0,02189	9426,435	3843,726	4608,7	26,39129	320,2744	0,2365922	35727,19	8452,4
511,65	0,00612	0,02344	8662,134	4115,895	4622,067	23,452	372,5812	0,2363268	36974,28	8737,962
568,50	0,00640	0,02370	8152,598	4161,55	4976,19	21,59858	423,0687	0,2361232	38709,54	9137,74
625,35	0,00657	0,02448	7608,319	4298,512	5081,95	19,70455	476,0549	0,2358746	39768,14	9380,46
682,20	0,00700	0,02448	7430,758	4298,512	5695,9	19,10465	523,1349	0,2357862	42389,0	9994,4
739,05	0,00722	0,025087	7074,731	4542,584	5765,93	17,92841	574,9837	0,235592	43753,29	10308,51
795,90	0,00722	0,02548	6569,392	4526,782	5781,78	16,81539	631,8329	0,235289	43812,5	10308,51

II.

Stübbstahl von Sanderson Brothers in Sheffield. $S_{,} = 7{,}827$
$S = 0{,}02962574$ $V = 1042{,}67$ $l = 141$ Mm. $d = 3{,}758$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_p}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00051	0,00035	6496,601	29,8962	324,3212	7,641261	46,35602	0,231496	1533,612	354,2174
113,70	0,00169	0,00320	10763,980	273,3366	900,44	14,87189	78,92596	0,2349605	4995,475	1173,78
170,55	0,00225	0,00701	9553,826	598,778	963,94	12,57695	124,2531	0,2342852	6670,16	1562,72
227,40	0,00424	0,01324	13439,05	1130,67	1800,354	20,85093	140,4442	0,23603	12417,68	2931,024
284,25	0,00596	0,02042	15184,21	1744,228	2395,29	25,61310	161,6152	0,2365278	17500,92	4139,52
341,10	0,00735	0,02370	15604,58	2024,4	3080,5	26,88729	189,8632	0,2366314	21573,59	5104,9
397,95	0,00813	0,02699	14776,58	2303,423	3334,3	24,42814	230,8694	0,2364218	23853,91	5639,7
454,80	0,01079	0,02976	17180,96	2542,03	4952,10	32,19398	232,7807	0,236975	31624,4	7494,13
511,65	0,01107	0,03209	15668,27	2741,052	4947,6	27,11571	283,7262	0,2366463	32482,15	7688,7
568,50	0,01164	0,03382	14827,53	2888,825	5196,1	24,57372	328,9903	0,2364352	34191,79	8084,9
625,35	0,01211	0,03547	14023,85	3029,765	5381,16	22,35946	376,1695	0,2362104	35609,15	8410,926
682,20	0,01270	0,03642	13481,51	3110,91	5708,8	20,95778	420,8800	0,2360434	37367,93	8820,7
739,05	0,01325	0,03720	12983,40	3177,537	6025,169	19,73072	466,4138	0,2364222	39014,82	9202,706
795,90	0,01388	0,03754	12629,25	3206,58	6433,69	18,89136	510,3001	0,2362966	40895,9	9640,27
852,75	0,014533	0,03824	12339,30	3266,371	6825,35	18,22347	553,7754	0,2356454	42825,94	10091,72
909,60	0,014533	0,03849	11568,09	3287,726	6803,99	16,52679	610,6263	0,235333	42883,21	10091,72

III.

Eisen aus der Westphäl. Union. $S_{,} = 7,657$

$S = 0,04354117$ $V = 1625,79$ $l = 140,5$ Mm. $d = 4,701$ Mm.

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_e}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = k\,K = p\,P$
56,85	0,00147	0,00346	18725,49	189,5422	465,244	23,10477	28,33986	0,2362908	2771,0	654,786
113,70	0,00402	0,01073	25604,25	587,8	1202,84	50,11107	35,73343	0,2376004	7536,14	1790,64
170,55	0,00640	0,01695	27175,33	928,538	1922,23	61,40762	46,42383	0,237808	11987,94	2850,77
227,40	0,00869	0,01990	27674,25	1090,143	2780,67	65,76267	58,86033	0,237869	16273,08	3870,81
284,25	0,010467	0,02266	26674,28	1241,338	3422,34	57,44311	81,18791	0,2377444	19617,25	4663,68
341,10	0,01280	0,02491	27323,94	1364,6	4368,12	62,65952	91,49017	0,2378264	24107,2	5732,72
397,95	0,014616	0,02586	26605,13	1416,637	5095,590	56,92521	114,3998	0,2377354	27392,88	6512,227
454,80	0,016090	0,02673	25620,17	1464,3	5702,71	50,21003	142,7404	0,2376025	30162,16	7167,01
511,65	0,017474	0,02751	24726,71	1507,024	6274,69	45,02643	172,8253	0,2374734	32769,11	7781,71
568,50	0,018599	0,02768	23693,48	1516,34	6768,714	39,87794	207,7599	0,2373118	34912,0	8285,054
625,35	0,019678	0,02855	22790,21	1564,0	7202,116	35,97622	243,6637	0,2371588	36962,94	8766,116
682,20	0,020891	0,02924	22186,11	1596,867	7712,677	33,62653	276,8514	0,2370495	39272,35	9309,544
739,05	0,021549		21106,61		7997,75	29,86305	321,1881	0,2368391	40511,42	9594,62
795,90	0,022275		20263,21		8322,920	27,25344	363,9819	0,2366594	41920,7	9919,787
852,75	0,02288		19430,36		8594,6	24,91806	409,0002	0,236467	43091,95	10191,5
909,60	0,02353		18733,46		8884,1	23,12458	453,2430	0,236293	44356,02	10481,0
966,45	0,02370		17758,87		8959,88	20,83029	506,7973	0,2360274	44726,48	10556,75
1023,30	0,024222		17140,27		9191,46	19,48887	553,5636	0,2358435	45744,71	10788,33
1080,15	0,024740		16586,78		9423,1	18,35674	600,3256	0,2356685	46761,16	11020,0
1137,00	0,024823		15808,40		9458,77	16,86283	655,6235	0,23540	46965,42	11055,64
1193,85	0,025087		15219,40		9578,88	15,80218	707,2382	0,2351795	47520,96	11175,9

IV.

Eisen aus der Westphäl. Union. $S_{s} = 7{,}787$

$S = 0{,}02241212$ $V = 743{,}89$ $l = 140{,}5$ Mm. $d = 3{,}179$ Mm.

X	tang β	tang α	G	$\frac{M_r}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00242	0,00087	11082,44	289,7345	557,2141	22,36572	37,86811	0,2362105	3585,553	846,9486
113,70	0,01107	0,00285	18152,27	1325,36	1449,132	53,85471	51,51795	0,2376678	11671,95	2774,492
170,55	0,01670	0,00458	19447,35	1999,412	2459,24	63,13458	70,62174	0,2378325	18746,86	4458,65
227,40	0,01998	0,00597	19012,11	2392,11	3419,71	59,82601	97,14511	0,2377831	24441,63	5811,82
284,25	0,02171	0,00713	18165,00	2590,235	4341,850	53,93890	128,6848	0,2376799	29203,87	6941,085
341,10	0,02284	0 00809	17175,66	2734,525	5141,122	47,84971	164,5908	0'2375467	33230,58	7875,647
397,95	0,02362	0,00869	15817,13	2827·91	5633,6	40,62029	208,3083	0,237337	35651,26	8461,5
454,80	0,02362	0,00934	14872,12	2827 91	6264,62	36,22311	251,0160	0,2371688	38337,7	9092,53
511,65	0,02362	0,00978	13842,43	2827,91	6692,96	31,92001	298,2695	0,2369596	40178,89	9520,87
568,50	0,02413	0,01038	13222,49	2888,97	7216,00	29,54417	342,0275	0,2368183	42670,26	10104,97
625,35	0,02413	0,01068	12367,86	2888,97	7508,03	26,50066	392,3307	0,2366004	43942,81	10397,0
682,20	0,02431	0,01120	11889,20	2910,521	7992,5	24,90251	437,8191	0,2364659	46110,17	10903,0
739,05		0,01124	11013,85		8031,7	22,15842	493,8136	0,2361872	46327,3	10942,2
795,90		0,01151	10472,81		8295,53	20,56839	544,7708	0,2359927	47485,51	11205,03
852,75		0,01176	9983,993		8538,17	19,20342	596,1664	0,2358027	48548,82	11448,67
909,60		0,01211	9641,400		8878,63	18,26680	645,3821	0,2356521	50024,48	11789,13
966,45		0,01237	9269,083		9131,75	17,28823	691,5577	0,2354801	51138,99	12042,25

V.

Atlasstahl: „Bolten Iron, Steel.“ $S_s = 7,856$

$S = 0,04163910$ $V = 1458,92$ $l = 138$ $d = 4,494$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_r}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00138	0,00175	17579,04	109,32	575,686	24,18224	28,32686	0,2363986	2302,72	685,0055
113,70	0,00324	0,00830	20636,26	506,689	1101,585	34,41441	46,73265	0,230788	6783,808	1608,274
170,55	0,00606	0,01782	25731,64	1087,854	1920,213	66,40936	45,29599	0,2378773	12645,51	3008,067
227,40	0,00830	0,02215	26432,25	1352,156	2767,805	73,77127	55,84785	0,2379623	17314,11	4119,961
284,25	0,01086	0,02690	27667,87	1642,16	3748,535	90,16744	59,78547	0,238102	22640,38	5390,695
341,10	0,01311	0,03028	27833,48	1848,50	4659,05	92,79064	70,13137	0,2381197	27328,44	6507,55
397,95	0,01522	0,03322	27697,00	2027,975	5526,942	90,61967	83,36946	0,238105	31728,63	7554,917
454,80	0,01700	0,03495	27069,17	2129,313	6309,16	81,58769	103,4284	0,2380357	35449,55	8438,47
511,65	0,01842	0,03625	26071,33	2212,947	6930,387	69,83453	130,9286	0,2379189	38427,16	9143,334
568,50	0,01955	0,03725	24903,64	2273,994	7430,253	59,02035	164,4223	0,2377705	40812,67	9704,247
625,35	0,02063	0,03754	23890,35	2291,7	7948,64	51,47229	198,9492	0,2376302	43093,42	10240,34
682,20	0,02132	0,03832	22631,95	2339,314	8243,53	43,81452	241,5379	0,2374387	44570,75	10582,84
739,05	0,02202	0,03849	21576,95	2349,692	8580,6	38,49795	283,9197	0,2372611	46068,83	10930,3
795,90	0,02249	0,03901	20463,39	2381,436	8782,2	33,72122	331,0560	0,2370542	47098,6	11163,6
852,75	0,02301	0,03910	19540,76	2381,441	9040,28	30,28355	377,1590	0,2368652	48220,2	11421,72
909,60	0,02353	0,03945	18733,46	2408,3	9271,54	27,59506	423,2596	0,2366847	49346,82	11679,84
966,45	0,02387	0,03953	17886,26	2413,18	9435,44	25,04552	473,0830	0,2364788	50104,99	11848,62
1023,30	0,02440		17267,65		9698,57	23,38751	518,9793	0,236315	51251,87	12111,7
1080,15	0,02457		16472,0		9782,90	21,80996	572,3167	0,2360873	51657,6	12196,08
1137,00	0,02474		15751,07		9862,32	19,61382	625,8588	0,2358615	52044,24	12275,5
1193,85	0,02491		15110,21		9951,67	18,21077	678,9866	0,2356433	52472,89	12364,85
1250,70	0,02517		14573,93		10080,73	17,10414	730,4625	0,2354462	53065,24	12198,91

VI.

Atlasstahl: „Bolten Iron, Steel.“ $S_{,} = 7{,}872$

$S = 0{,}03368388 \quad V = 1136{,}42 \quad l = 138 \quad d = 3{,}966.$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_r}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = k\,K = p\,P$
56,85	0,00156	0,00285	19872,41	223,357	770,770	42,54969	23,36392	0,2374004	4187,507	994,1277
113,70	0,00389	0,00934	24776,82	839,091	1639,857	82,08592	30,19942	0,2380402	10414,28	2478,947
170,55	0,00627	0,01263	26623,93	989,827	3005,80	111,1089	35.96143	0,2382206	16773,05	3995,63
227,40	6,00865	0,01557	27547,49	1220,237	4292,074	132,1159	41,72342	0,2383018	23130,92	5512,311
284,25	0,01060	0,01782	27006,09	1396,572	5358,399	119,1007	56,71643	0,2382549	28353,27	6754,971
341,10	0,01211	0,01851	25710,99	1450,648	6266,586	95,09558	81,15266	0,2381346	32406,7	7717,234
397,95	0,01349	0,02059	24549,34	1613,626	6983,028	79,31935	108,3806	0,2380161	36118,17	8596,654
454,80	0,01436	0,02111	22866,01	1654,413	7496,558	62,44131	146,5553	0,2378231	38477,82	9151,072
511,65	0,01545	0,02137	21868,14	1674,790	8170,899	54,69497	180,0102	0,237695	41421,45	9845,689
568,50	0,01600	0,02240	20381,96	1755,512	8440,67	45,30532	225,0542	0,237481	42931,5	10196,18
625,35	0,01674	0,02284	19386,02	1789,995	8877,77	40,10182	266,0175	0,2373196	44950,4	10667,76
682,20	0,01700	0,02309	18046,53	1809,588	9023,86	34,14410	317,2866	0,2370743	45689,86	10833,44
739,05	0,01747	0,02327	17118,89	1827,900	9305,05	30,58090	364,0490	0,2368831	47004,09	11132,95
795,90	0,01790	0,02344	16287,37	1837,017	9570,0	27,70903	411,6693	0,2366932	48199,18	11407,02
852,75	0,01847	0,02370	15185,62	1857,394	9912,83	25,79574	456,2842	0,236441	48200,3	11770,22
909,60	0,01851	0,02370	14737,11	1857,394	9938,32	23,02602	512,2760	0,2362828	49923,16	11795,71
966,45	0,01869		14005,10		10053,02	21,07076	565,2596	0,2360580	50456,82	11910,41
1023,30	0,01895		13411.04		10218,7	19,58732	616,5286	0,2358577	51200,05	12076,1
1080,15	0,01920		12872,81		10378,03	18,31621	668,0123	0,235661	51926,3	12235,42
1137,00	0,01946		12394,78		10543,72	17,24083	719,2843	0,235472	52664,99	12401,11

I g.

Stübbstahl von Sanderson Brothers in Weifsgluth ausgeglüht. $S_{,} = 7{,}972$

$S = 0{,}01559502 \quad V = 493{,}85 \quad l = 141{,}25 \quad d = 2{,}585.$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_p}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = k\,K = p\,P$
56,85	0,00069	0,00261	8789,518	470,695	541,118	24,63568	41,07084	0,2364412	4279,391	1011,813
113,70	0,00210	0,01176	13375,350	2120,834	958,499	46,88829	65,67609	0,237523	12964,95	3079,433
170,55	0,00337	0,01704	14309,51	3073,045	1868,711	52,86309	93,48274	0,237659	20792,95	4941,756
227,40	0,00424	0,02016	13502,74	3635,714	2581,81	47,66738	130,4368	0,2375428	26174,64	6217,52
284,25	0,00485	0,02163	12356,28	3900,820	3211,203	41,03033	173,3371	0,2373514	29963,63	7112,023
341,10	0,00545	0,02232	11570,74	4025,180	3966,682	36,92005	216,4657	0,2371986	33692,22	7991,862
397,95	0,00606	0,02310	11027,84	4165,925	4720,437	34,26179	259,3668	0,2369805	37484,62	8886,362
454,80	0,00614	0,02362	9776,748	4259,700	4743,975	28,63890	314,3871	0,2367588	38028,98	9003,675
511,65	0,00649	0,02388	9185,826	4306,600	5210,312	26,20030	363,2345	0,236577	40228,8	9516,912
568,50	0,00675	0,02405	8598,443	4342,247	5555,930	23,90049	414,1387	0,2363713	41874,45	9898,177
625,35	0,00709	0,02405	8210,494	4342,247	6054,50	22,44470	463,2135	0,2362198	44013,01	10396,75
682,20	0,00727		7717,368		6318,45	20,66229	515,94	0,2360056	45171,03	10660,7
739,05	0,00744		7290,303		6567,75	19,17693	568,9092	0,235797	46268,7	10910,0
795,90	0,00761		6924,249		6817,03	17,94451	621,87	0,235598	47370,48	11159,28
852,75	0,00770		6539,063		6949,00	16,68682	676,6614	0,235365	47972,53	11291,25
909,60	0,00779		6202,024		7080,98	15,61712	731,45	0,235138	48581,18	11423,23
966,45	0,00787		5897,145		7198,29	14,67389	786,47	0,2349105	49126,7	11540,54
1023,30	0,00805		5696,911		7462,25	14,06610	839,21	0,2347483	50286,75	11804,5
1080,15	0,00813		5450,758		7579,55	13,38193	894,22	0,2345327	50832,27	11921,8

IIg.

Stübbstahl von Sanderson Brothers in Weifsgluth ausgeglüht. $S_{,} = 8,248$

$S = 02819988$ $V = 982,63$ $l = 141$ $d = 3,648$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_p}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00108	0,00536	13757,51	485,813	310,13	23,13469	34,404	0,236294	3368,429	795,94
113,70	0,00294	0,01410	18725,49	1277,979	888,746	41,19386	52,598	0,2373568	9128,28	2166,725
170,55	0,00445	0,02119	18895,34	1920,594	1358,973	42,01019	78,066	0,2373844	13820,01	3279,567
227,40	0,00601	0,02629	19139,49	2383,747	2045,511	43,21403	102,49	0,2374208	18655,71	4429,258
284,25	0,00718	0,02950	18292,39	2673,785	2617,741	39,18762	135,03	0,2372869	22300,59	5291,526
341,10	0,00826	0,03131	17536,58	2844,380	3243,086	35,92825	169,43	0,2371565	25668,62	6087,466
397,95	0,00934	0,03270	16996,71	2963,824	3919,579	33,76919	203,38	0,2370565	29037,27	6883,403
454,80	0,01047	0,03330	16671,42	3018,205	4697,990	32,52960	237,20	0,2369932	32559,44	7716,195
511,65	0,01107	0,03382	15668,27	3065,336	5093,048	28,79293	281,58	0,2367813	34454,54	8158,384
568,50	0,01163	0,03425	14814,79	3104,31	5466,782	26,22784	326,79	0,236579	36229,12	8571,092
625,35	0,01246	0,03425	14429,17	3104,31	6078,476	25,06239	366,39	0,2364798	38830,53	9182,786
682,20	0,01289	0,03442	13683,20	3112,543	6387,15	22,92877	414,31	0,2362723	40205,56	9499,69
739,05	0,01327		13003,00		6667,202	21,11048	463,26	0,236063	41428,03	9779,742
795,90	0,01400		12738,43		7204,20	20,43347	504,94	0,2359753	43728,5	10316,74
852,75	0,01419		12050,56		7345,21	18,74669	557,84	0,2357304	44362,54	10457,77
909,60	0,01436		11432,74		7470,51	17,31629	611,16	0,2354858	44940,72	10583,05
966,45	0,01453		10887,61		7595,80	16,11547	664,47	0,2352474	45519,42	10708,34
1023,30	0,01488		10530,44		7853,74	15,35788	714,05	0,2350776	46645,85	10966,28
1080,15	0,01514		10150,52		8045,36	14,57574	765,50	0,2348853	47502,92	11157,9

Eisen aus der Westphäl. Union in Weifsgluth ausgeglüht. $S_{,} = 7{,}695$ IIIg.

$S = 0{,}04321462 \quad V = 1609{,}41 \quad l = 140{,}5 \quad d = 4{,}678$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_{r}}{v}$	$\frac{M_{t}}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00294	0,00355	37450,99	196,452	1126,4	-4151,995	- 0,3186179	0,2387461	5541,044	1322,9
113,70	0,00627	0,00588	39934,98	325,397	2495,88	- 343,1725	- 8,221217	0,2388986	11809,55	2821,287
170,55	0,00934	0,00666	39658,99	368,555	3834,129	- 379,7299	- 11,06758	0,2388824	17591,9	4202,684
227,40	0,01263	0,00718	40221,60	397,331	5285,743	- 312,4009	- 18,19160	0,238915	23786,61	5683,073
284,25	0,01514	0,00753	38571,97	416,699	6395,789	- 671,2840	- 10,14842	0,2388174	28526,27	6812,488
341,10	0,01726	0,00761	36644,23	421,117	7345,297	1418,120	5,476567	0,2386922	32537,46	7766,414
397,95	0,01890	0,00796	34393,77	440,495	8063,863	279,3970	30,43820	0,2385286	35654,45	8504,358
454,80	0,02016	0,00804	32100,85	444,922	8626,394	144,4813	62,78557	0,2383386	38060,48	9071,316
511,65	0,02093	0,00856	29623,93	473,698	8944,09	89,9822	104,6630	0,2381007	39553,64	9417,79
568,50	0,02180	0,00900	27769,78	498,047	9311,215	67,83873	144,5967	0,2378952	41235,1	9809,262
625,35	0,02232	0,00943	25847,44	521,843	9521,40	52,49063	191,3343	0,2376515	42260,51	10043,24
682,20	0,02292		24330,41		9791,38	43,60445	236,5177	0,2374324	43436,18	10313,22
739,05	0,02344		22968,38		10025,36	37,23555	283,2564	0,2372115	44463,23	10547,2
795,90	0,02396		21800,92		10259,35	32,67083	329,9946	0,2370005	45494,75	10781,19
852,75	0,02457		20865,55		10533,83	29,48320	374,9825	0,2368148	46684,33	11055,67
909,60	0,02513		20006,29		10785,81	26,86265	420,9437	0,2366292	47783,65	11307,65
966,45	0,02517		18860,31		10803,81	23,74256	477,0176	0,2363558	47917,59	11325,65
1023,30	0,02552		18060,27		10961,29	21,78719	527,0599	0,2361448	48627,61	11483,13
1080,15	0,02587		17344,38		11118,78	20,17070	577,1052	0,23594	49337,69	11640,62
1137,00	0,02621		16693,72		11271,77	18,79923	627,3443	0,2357387	50028,17	11793,61
1193,85	0,02656		16111,11		11429,3	17,64284	677,3892	0,2355451	50757,36	11951,1
1250,70	0,02688		15581,42		11586,75	16,64575	727,4303	0,2353569	51447,96	12108,59

IV g.

Eisen aus der Westphäl. Union in Weifsgluth ausgeglüht. $S_{,} = 7{,}856$
$S = 0{,}02211152$ $V = 732{,}43$ $l = 140{,}5$ $d = 3{,}155$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_r}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00234	0,00415	29807,94	509,303	1804,340	406,4903	5,691763	0,2385923	9697,227	2313,643
113,70	0,00493	0,00597	31400,24	725,942	4148,53	823,7208	5,917647	0,2386632	20423,93	4874,47
170,55	0,00710	0,00666	30147,625	809,846	6210,180	458,0314	15,32652	0,2386205	29423,93	7020,026
227,40	0,00852	0,00666	27132,86	809,846	7614,186	204,8072	41,13158	0,2384546	35330,86	8424,032
284,25	0,00947	0,00700	24126,59	851,190	8512,142	121,2696	77,21130	0,2382634	39299,05	9363,332
341,10	0,01003	0,00709	21294,42	862,134	9054,888	81,40689	121,8201	0,2380343	41660,56	9917,022
397,95	0,01047	0,00779	19053,06	947,253	9404,820	61,23629	169,0506	0,2378052	43539,91	10352,07
454,80	0,01073	0,00822	17085,42	999,540	9609,50	48,17544	220,2174	0,2375552	44659,16	10609,14
511,65	0,01116	0,00839	15795,66	1020,223	10014,1	41,22469	267,6636	0,2373579	46488,28	11034,3
568,50	0,01129	0,00925	14381,69	1124,786	10038,044	34,702	321,6782	0,2371013	47080,75	11162,83
625,35	0,01151		13329,03		10255,564	30,45244	373,7116	0,2368754	48043,61	11380,35
682,20	0,01177		12494,28		10512,664	27,38953	424,8815	0,236671	49171,82	11637,45
739,05	0,01185		11611,57		10591,734	24,41047	479,9798	0,2364202	49558,09	11716,52
795,90	0,01194		10864,06		10680,724	22,07201	534,8626	0,2361779	49990,58	11805,51
852,75	0,01202		10207,73		10759,824	20,14472	589,9600	0,2359364	50372,15	11884,61
909,60	0,01219		9713,05		10937,794	18,76339	642,7784	0,2357331	51170,12	12062,58
966,45	0,01237		9269,09		11105,874	17,57239	696,01	0,2355326	51928,14	12230,66
1023,30	0,01254		8874,44		11273,964	16,55062	749,1438	0,2353378	52684,96	12398,75
1080,15	0,01254		8407,365		11273,964	15,38317	805,99	0,235084	52730,1	12398,75
1137,00	0,01263		8044,32		11362,954	14,60577	860,88	0,234867	53168,61	12487,74
1193,85	0,01280		7411,453		11531,084	13,08571	970,86	0,2344335	53983,7	12655,82

Vg.

Atlasstahl: „Bolten Iron, Steel“ in Weifsgluth ausgeglüht. $S_{,} = 7,894$
$S = 0,04124324$ $V = 1444,14$ $l = 138$ $d = 4,471$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_r}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00234	0,00424	29807,94	207,707	965,713	138,7965	8,45427	0,2383226	4923,783	1173,42
113,70	0,00510	0,00588	32483,01	362,629	2194,822	311,0207	8,22275	0,2385493	10720,85	2557,451
170,55	0,00800	0,00822	33969,16	506,941	3504,75	787,4169	5,09475	0,2386601	16809,41	4011,69
227,40	0,01038	0,00926	33056,24	571,079	4634,088	409,1625	12,72155	0,2385932	21816,51	5205,167
284,25	0,01315	0,00926	33502,08	571,079	6023,134	536,8063	12,28412	0,2386263	27633,84	6594,213
341,10	0,01531	0,01047	32504,24	645,701	7031,668	313,8687	24,46045	0,2385509	32182,28	7677,369
397,95	0,01721	0,01125	31318,35	693,853	7937,293	205,4067	42,01492	0,2384553	36192,08	8631,146
454,80	0,01864	0,01142	29680,55	704,290	8642,944	134,8993	69,29037	0,2383107	39222,78	9347,234
511,65	0,01990	0,01159	28166,09	714,774	9264,300	99,71358	100,0780	0,2381622	41900,4	9979,074
568,50	0,02085	0,01202	26559,63	741,293	9714,17	76,16104	137,2815	0,2379864	43932,5	10455,46
625,35	0,02176	0,01202	25198,94	741,293	10170,51	62,24266	175,3111	0,2378202	45882,09	10911,8
682,20	0,02232		23693,49		10451,32	50,74204	220,5793	0,2376145	47105,13	11192,61
739,05	0,02284		22380,45		10712,08	42,94847	266,6767	0,2374127	48241,49	11453,37
795,90	0,02327		21173,09		10927,71	37,08788	314,6317	0,2372055	49199,57	11669,0
852,75	0,02379		20203,15		11188,47	33,07114	360,7293	0,2370208	50324,58	11929,76
909,60	0,02422		19282,80		11404,07	29,71843	408,6834	0,236883	51283,21	12145,36
966,45	0,02465		18470,73		11619,72	27,06929	456,6426	0,236655	52234,05	12361,01
1023,30	0,02517		17812,57		11880,48	25,10617	502,7367	0,2364837	53372,49	12621,77
1080,15	0,02535		16995,75		11970,75	23,01949	554,0941	0,2362661	53804,11	12712,04
1137,00	0,02535		16145,97		11970,75	20,74703	612,7151	0,2360167	53860,6	12712,04
1193,85	0,02543		15425,64		12010,87	19,09255	667,91	0,2357842	54084,0	12752,16
1250,70	0,02586		14973,45		12226,49	18,20901	714,2782	0,2356271	55034,36	12967,78
1307,55	0,02604		14422,12		12316,75	16,98062	768,9952	0,2354225	55466,24	13058,04
1364,40	0,02621		13911,43		12402,01	15,98299	822,3290	0,235219	55876,81	13143,5
1421,25	0,02638		13441,59		12487,87	15,10682	875,6640	0,2350185	56287,56	13228,54
1478,10	0,02656		13012,80		12577,52	14,39899	924,9817	0,234823	56718,45	13318,81
1534,95										

Atlasstahl: „Bolten Iron, Steel“ in Weißgluth ausgeglüht. $S_v = 7{,}920$
$S = 0{,}03333826$ $V = 1122{,}51$ $l = 138$ $d = 3{,}942$

X	tang α	tang β	G	$\frac{M_e}{v}$	$\frac{M_t}{v}$	k	K	p	P	$\frac{M}{v} = kK = pP$
56,85	0,00186	0,00311	23693,48	246,754	953,213	71,23503	16,84519	0,237935	5043,202	1199,967
113,70	0,00489	0,00753	31145,47	597,447	2557,304	370,0306	8,52568	0,2385839	13222,78	3154,751
170,55	0,00735	0,00839	31209,16	665,681	4076,112	380,3678	12,46639	0,2385887	19873,0	4741,793
227,40	0,00978	0,00952	31145,47	755,338	5554,166	370,0306	17,05137	0,2385839	26439,47	6309,504
284,25	0,01198	0,01073	30521,28	851,342	6877,475	290,7343	26,58387	0,2385365	32401,3	7728,817
341,10	0,01362	0,01133	28916,25	898,947	7887,907	182,4484	48,16088	0,2384204	36854,16	8786,854
397,95	0,01479	0,01220	26914,49	967,975	8573,697	119,4978	79,8479	0,2382565	40050,12	9541,672
454,80	0,01596	0,01211	25413,18	960,834	9335,66	92,31753	111,5333	0,2381166	42256,7	10296,49
511,65	0,01704	0,01228	24118,10	974,822	10018,93	75,73590	145,1571	0,2379823	46193,22	10993,25
568,50	0,01739	0,01280	22152,14	1015,58	10203,47	57,68785	194,4779	0,237748	47180,4	11219,05
625,35	0,01791		20740,48		10538,94	48,11508	240,1430	0,2375537	48638,9	11554,52
682,20	0,01838		19511,04		10842,19	41,33256	286,8850	0,2373615	49956,68	11857,77
739,05	0,01869		18313,95		11042,15	35,77293	337,0645	0,2371492	50845,17	12057,73
795,90	0,01929		17551,74		11429,24	32,66230	381,0132	0,2370002	52515,29	12444,82
852,75	0,01938		16458,06		11487,34	28,68107	435,9267	0,2367617	52808,09	12502,92
909,60	0,01972		15700,12		11706,65	26,20617	485,4648	0,2365772	53775,41	12722,23
966,45	0,01972		14776,58		11706,65	23,45936	542,3114	0,2363722	53833,72	12722,23
1023,30	0,02007		14203,35		11932,45	21,88532	591,6334	0,2361563	54828,06	12948,03
1080,15	0,02016		13516,15		11990,52	20,11601	646,5515	0,2359324	55127,13	13006,1
1137,00	0,02050		13056,91		12209,85	18,99959	696,0885	0,235770	56094,7	13225,44
1193,85	0,02059		12489,73		12267,92	17,68783	750,9996	0,2355531	56391,9	13283,5
1250,70	0,02076		12020,45		12377,60	16,65413	804,1950	0,235359	56910,0	13393,18
1307,55	0,02102		11641,82		12545,34	15,85236	855,4522	0,2351899	57653,38	13560,92
1364,40	0,02111		11204,51		12603,39	14,95990	910,3666	0,2349819	57950,9	13618,97
1421,25	0,02154		10975,43		12880,81	14,50606	957,1696	0,2348671	59167,0	13896,39
1478,10	0,02180		10680,69		13048,55	13,93963	1009,225	0,2347115	59920,7	14064,13

§. 15. Prüfung der Funktionen k und p.

Die vollständige Ausführlichkeit der hier vorgelegten Tabellen wird uns jederzeit gestatten, durch alle wesentlichen Stufen der Beobachtungen hindurch die strengsten Vergleiche mit ähnlichen Resultaten vornehmen zu können, um dieselben in allen Einzelheiten zu vergleichen.

Eine leichtere Uebersicht der vielen vorstehenden Zahlen zu gewähren, scheint es zweckmäſsig zu seyn, diejenigen in Folgendem abgekürzt zusammenzufassen, auf welche wir uns beziehen müssen. Wir stellen zunächst die erheblichsten Werthe für p und k so nebeneinander, daſs wir dadurch den ganzen Verlauf der Funktionen des Ellipsoides und der Kugel werden übersehen können; die Werthe unter v bedeuten diejenigen, welche ich für die betreffenden Ellipsoide *vor* dem Glühen, und diejenigen Werthe unter n, welche ich *nach* dem Glühen erhielt:

I.				II.			
k		p		k		p	
v	n	v	n	v	n	v	n
8	24	0,23201	0,23644	7	23	0,23149	0,23629
16	46	0,23532	0,23752	14	41	0,23496	0,23735
24	52	0,23639	0,23765	12	42	0,23428	0,23738
27	47	0,23666	0,23751	20	43	0,23603	0,23742
27	41	0,23664	0,23735	25	39	0,23652	0,23728
30	36	9,23687	0,23719	26	35	0,23663	0,23715
29	34	0,23678	0,23698	24	33	0,23642	0,23705
26	28	0,23659	0,23675	32	32	0,23697	0,23699
23	26	0,23632	0,23657	27	28	0,23664	0,23678
21	23	0,23612	0,23637	24	26	0,23643	0,23657

III.

k v	k n	p v	p n
—4151	23	0,23629	
— 343	50	0,23760	0,23889
— 379	61	0,23780	0,23888
— 312	65	0,23786	0,23891
— 671	57	0,23774	0,23881
+1418	62	0,23782	0,23869
279	56	0,23773	0,23852
144	50	0,23760	0,23833
89	45	0,23747	0,23810
67	39	0,23731	0,23789

IV.

k v	k n	p v	p n
22	406	0,23621	0,23589
53	823	0,23766	0,23866
63	458	0,23783	0,23862
59	204	0,23778	0,23845
53	121	0,23767	0,23826
47	81	0,23754	0,23803
40	61	0,23733	0,23780
36	48	0,23716	0,23755
31	41	0,23695	0,23735
29	34	0,23681	0,23710

V.

k v	k n	p v	p n
24	138	0,23639	0,23832
34	311	0,23708	0,23854
66	787	0,23787	0,23866
73	409	0,23796	0,23859
90	536	0,23810	0,23862
92	313	0,23811	0,23855
90	205	0,23810	0,23845
81	134	0,23808	0,23831
69	99	0,23791	0,32816
59	76	0,23777	0,23798

VI.

k v	k n	p v	p n
42	71	0,23740	0,23793
82	370	0,23804	0,238583
111	380	0,23822	0,238588
132	370	0,23830	0,238583
119	290	0,23825	0,23853
95	182	0,23813	0,23842
79	119	0,23801	0,23825
62	92	0,23782	0,23811
54	75	0,23769	0,23798
45	57	0,23748	0,23774

Betrachten wir jetzt den Verlauf der beiden Werthe k und p und bringen wir die Gleichungen 9) und 10) auf die Form:

$$k = \frac{1}{\frac{v}{G} - S}, \quad p = \frac{1}{\frac{v}{G} - S + \frac{4}{3}\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c,$$

so unterscheidet sich k von p dadurch, dass der Nenner von p um ein constantes Glied: $\frac{4}{3}\pi$ vergröfsert ist, während alle Werthe von k und p sich zu gleicher Zeit mit G ändern.

§ 16. *k* **erscheint in fünf Fällen negativ.**

Wir haben, bevor wir diesen letzterwähnten Umstand erörtern, noch einen weitaus wichtigen Fall zu erwähnen, welcher den Umfang desjenigen Gränzbezirkes betrifft, für welchen k positiv bleiben soll, da k nur für diamagnetische Substanzen negativ werden darf, während k der Theorie gemäfs, für starkmagnetische, sowohl auch schwachmagnetische Körper unbedingt positiv bleiben mufs. In unseren Berechnungen tritt nun der ganz merkwürdige Umstand ein, dafs in Tabelle IIIg. für *k fünf aufeinanderfolgende Werthe, von der ersten bis fünften Beobachtung, negativ werden*, demnach also $v > GS$ stattfindet, während die Theorie die Werthe für $v = GS$ und $v < GS$ als nicht zulässig erklären darf.

Bis hier habe ich ein genaues Protokoll eines Beobachtungssatzes aufgeschoben; dieser sonderbare Fall darf aber wohl die genaueste Kontrolle beanspruchen, und die Herleitung der negativen Werthe aus den Beobachtungen verlangen, die durch folgende Aufstellung, wie dieselben aus den Versuchsreihen hervorgegangen, ausführlich stattfinden kann. Um die Sicherheit, mit welcher meine Ablesungen stattgefunden haben, zu beurtheilen, theile ich noch mit, dafs jede Ablenkung des Magnetspiegels, die durch den galvanischen Strom erfolgte, sobald derselbe durch die Spiralen ging, von der Ruhelage des Spiegels

aus beobachtet und festgestellt wurde; für beide Richtungen des Stromes erhielt ich demnach zwei entgegengesetzte Ablenkungen mit einer regelmäfsig so genauen Uebereinstimmung, dafs ein so fast gleiches Werthepaar schon an und für sich als eine kontrollirte Beobachtung anzusehen wäre; ich habe jedoch bei allen Beobachtungen durch möglichst rasch aufeinanderfolgende Wiederholung zweier solcher nahezu übereinstimmender Beobachtungssätze das Mittel zur Berechnung gezogen. Bedeutet nun J die Ablenkung in Skalentheilen für die zu bestimmende Intensität nach § 11, T die Ablenkung in Skalentheilen, welche der temporäre Magnetismus des Ellipsoides hervorgerufen und $\operatorname{tg}\alpha$ die Gröfse der Tangente des Ablenkungswinkels, welche aus T berechnet wird, und haben k, G und S dieselbe Bedeutung, wie im § 13 festgesetzt, so erhalten wir:

J	T	$\operatorname{tg}\alpha$	k	G	$v - GS$
20	8,50	0,00294	— 4151	37450	1609,41 — 1618,21
40	18,125	0,00627	— 343	39934	1609,41 — 1726,51
60	27	0,00934	— 379	39658	1609,41 — 1714,62
80	36,5	0,01263	— 312	40221	1609,41 — 1738,94
100	43,75	0,01514	671	38571	1609,41 — 1668

aus Tabelle III g.: $S = 0{,}04321462$.

Erreicht G den Werth 37242, so wird $GS = 1609$ und $k = \infty$; wir wissen aber, dafs in unserem Falle G diesen Werth nicht erreichen darf; dennoch bieten sich fünf Resultate dar, welche diesen Werth von 37242 nicht unerheblich übersteigen. Wenn $v > GS$ und $G = 40221$ ist, so darf S den Werth von 0,04002 nicht erreichen; S ergiebt sich aber aus der Beobachtung $= 0{,}04321$, wonach der Beobachtungsfehler so bedeutend wäre, dafs ich ihn kaum genügend zu erklären vermag.

Am Schlusse dieser Abhandlung befinden sich 2 Tafeln,

auf welche ich Curven aufgetragen, welche die Magnetisirungen und Functionen k und p aus den Tabellen I bis VI und Ig. bis VIg. ergeben; Figur I bis VI enthalten die magnetischen Momente als Ordinaten und die elektromagnetische Kraft X als Abscisse angenommen, Figur VII und VIII zeigen den Verlauf der Function k für die Ellipsoide sowohl für den Zustand *vor* als auch *nach* dem Glühen; besonders bemerkenswerth ist die Figur VIII. welche für das Ellipsoid IIIg. eine fast vollkommen regelmäſsige Curve für die positiven Werthe zeigt.

Ferner enthalten die Tafeln unter No. IX und X die Curven der Function p; bei der letzteren, wie bei der Function k sind p und k als Ordinaten und P und K als Abscissen genommen.

§ 17. Fortsetzung der Prüfung der Funktion k und p und Vergleich der Riecke-Stoletow'schen Sätze.

Nach dem Vorschlage des Herrn Wiedemann habe ich den totalen Magnetismus, um Irrthümer zu vermeiden, ebenfalls als *temporären* bezeichnet, und denjenigen, welcher im Stabe zurückblieb als die magnetisirende Kraft entfernt war, den *permanenten* Magnetismus genannt; die Differenz beider Magnetismen werde ich demnach den *verschwindenden* Magnetismus nennen, derselbe ist aus den Tafeln I bis VI zu ersehen; die Linien d bedeuten die verschwindenden Magnetismen *vor* und die mit c bezeichneten die verschwindenden Magnetismen *nach* dem Glühen, zur klaren Uebersicht trägt jede Curve noch besondere Zeichen, welche bestimmen, aus welcher Tabelle und welchen Rubriken die betreffenden Werthe gezogen sind.

Es ist uns jetzt möglich, die vorliegenden Resultate dieser Beobachtungen mit denen des Herrn Riecke zu vergleichen, welche ich im Eingange dieser Abhandlung mitgetheilt habe.

In Bezug auf Satz I, Seite 8 soll nach Herrn Riecke die Magnetisirungsfunktion der Kugel für Werthe der mag-

netisirenden Kraft von 8 bis 40,000 bis auf 1 Procent constant seyn, und zwar für sämmtliche zu den angeführten Versuchen benutzten Eisensorten; diesen Satz kann ich aus sämmtlichen Versuchsreihen nahezu bestätigen. Was die Uebereinstimmung des zweiten Satzes betrifft, „dafs der Verlauf der Funktion p anfangs bei wachsendem Argument zunimmt, zwischen den Werthen $P = 20000$ und $P = 30000$ ein Maximum erreicht und bei noch weiter zunehmendem Argument wieder abnimmt", das läfst sich wohl deutlicher durch die Aufstellung der bestimmten Maxima entscheiden:

I	p	X_n	P	K	k	G	G_n
I	0,236875	6	28310	229	30,45	10403	G 6
II	0,236975	8	31624	232	32,19	17180	„ 8
III	0,237869	4	16273	58	65,76	27674	„ 4
IV	0,237832	3	18746	70	63,13	19447	„ 3
V	0,238119	6	27328	70	92,79	27833	„ 6
VI	0,2383018	4	23130	41	132,11	27547	„ 4
Ig.	0,237659	3	20792	93	52,86	14309	„ 3
IIg.	0,237420	4	18655	102	43,21	19139	„ 4
IIIg.	0,238915	4	23786	negat.	negativ	40221	„ 4
IVg.	0,238663	2	20423	5,9	823,72	31400	„ 2
Vg.	0,238660	3	16809	5	787,41	33969	„ 3
VIg.	0,238588	3	19973	12	380,36	31209	„ 3

Hier bedeuten die Zahlen beider gleichen Rubriken X_n und G_n diejenigen Reihen, auf welchen in den grofsen Tabellen des § 14 p sowohl als k sich befinden, die übrigen Bezeichnungen haben dieselbe Bedeutung, wie bisher.

In vorstehender Tabelle befinden sich die Zahlen sämmtlicher 12 Maxima für *ganz bestimmte Werthe* von P und K

für die Funktion p wie für die Funktion k, so dafs ich genau nur für *einen* Werth von P das Maximum für p zu bestimmen vermag, und nicht innerhalb einer Reihe von Werthen für $P = 20000$ und $P = 30000$, es ist demnach p an keiner Stelle absolut constant, selbst nicht für zwei naheliegende Werthe von P.

Die folgenden Werthe von p, welche Herr Riecke berechnet, zeigen in der That eine gröfsere Reihe vollkommen constanter Zahlen; auf Seite 468 der angeführten Abhandlung finden wir:

II 1.		II 2.		III.	
p	P	p	P	p	P
0,2381	20025	0,2382	15840	0,2381	16133
0,2381	27400	0,2382	19800	0,2381	19450
		0,2382	25200	0.2381	23810
		0,2382	27900		

aus der Art der Ableitung der Funktion p geht jedoch deutlich hervor, dafs die Werthe für p nur in bedeutend verkleinertem Maafse erscheinen können, und wie aus meinen Tabellen ersichtlich ist, wird der wahre Verlauf der Funktion erst durch die fünfte und sechste Decimalstelle bestimmt, hiernach ist die Angabe von vier Decimalstellen, wie Herr Riecke dies gethan, nicht ausreichend und nur geeignet, die Aehnlichkeit beider Functionen p und k zu verringern.

II. Ueber die magnetische Reibungsgröſse.

§ 1. Strukturveränderungen durch Ausglühen des Eisens.

Eine Mittheilung, welche ich für unsere Untersuchung für nicht unerheblich halte, mache ich zunächst über die scharf ausgeprägte Veränderung der Struktur des Eisendrahtes (westphäl. Union) No. III und IV, die ich durch das Ausglühen erhalten habe. Ich legte sämmtliche Ellipsoide, die, wie ich im § 12 mitgetheilt habe, ausgeglüht waren, in verdünnte Salzsäure; dasselbe geschah mit einigen Stücken derselben Qualitäten, von welchen die übrigen Ellipsoide herrührten, und welche noch nicht geglüht waren; nach einigen Tagen erhielt ich aus dem ungeglühten Eisen No. III und IV durch Einwirkung der genannten Säure eine gröſsere Anzahl Fäden als Restbestände; von der Länge fast, welche die zerbrochenen Eisenstücke hatten, während die geglühten Stücke in festen, zusammenhängenden Massen vorhanden waren, und obgleich sich auch von denselben kleine Fäserchen ablösen lieſsen, so war doch eine klar ausgesprochene Verschiedenheit der Struktur vorhanden, die wir für das ungeglühte Eisen als *langfaserige* und für das geglühte als *kurzfaserige* bezeichnen können. Diese durch das Glühen hervorgerufene Verschiedenheit des Materials können wir uns dadurch leicht erklären, daſs während der Weiſsgluth die Eisentheilchen in einen dem Schmelzpunkt nahekommenden Zustand übergehen, und daſs in Folge der stattfindenden Ausdehnung die die Eisenmassen trennenden, beigemengten Bestandtheile, vorzugsweise die kohlenhaltigen Massen, von den glühenden, halbfest-halbflüssigen Eisenmolekülen zum Theil ausgefüllt werden, wodurch die vorhin bezeichnete

kurzfaserige Struktur entstehen kann, zu welcher der chemische Vorgang, der hauptsächlich in der Bildung von Kohleneisen besteht, wesentlich beiträgt.

§ 2. Die freien und gebundenen Krystallflächen.

Irgend eine Krystallgruppe einer Eisenmasse wollen wir auf Veranlassung der eben besprochenen Erscheinung zum Gegenstande näherer Untersuchung wählen und diejenigen Flächen, welche sich in diesen Massentheilchen frei nach aussen kehren, die *freien Krystallflächen* nennen, während wir jene Flächen, die äusseren sowohl als auch die inneren des Moleküles, welche mit einander cohäriren, als die *gebundenen Krystallflächen* bezeichnen wollen.

Auf eine ganz beliebig gewählte Krystallgruppe lassen wir die Wärme einwirken und untersuchen dann die Veränderung der zwei eben bezeichneten allgemeinen Hauptarten von Flächen, welche nach der Ausdehnung der Eisenmoleküle stattgefunden haben wird.

Wir denken uns, dafs die Ausdehnung der Eisentheilchen nach allen ihnen dargebotenen Räumen stattfindet, und dafs sie nach einem freien, leeren Raume hin mit viel weniger Widerstand begleitet seyn wird, als gegen eine feste Krystallwand oder gegen sonst irgend welche feste körperliche Kante; es wird deshalb die Wirkung der Wärme innerhalb der Moleküle die Theilchen weiter nach den leeren Räumen hinbewegen, welche von den freien Krystallwänden gebildet werden, als nach denjenigen Räumen, die durch die Festigkeit, Elasticität und Viscosität der Massentheilchen einen relativ grofsen Widerstand bieten. Wir müssen nun ferner annehmen, dafs eine solche Krystallgruppe von einer ebenfalls unter denselben Bedingungen sich ausdehnenden Masse umgeben ist, und dafs nun alle Räume in der ganzen Eisenmasse *zur Ausdehnung dienen*, welche von den *freien Krystallflächen*, wie eben angedeutet, eingehüllt sind und als *Krystallhöhlen* auftreten, während sich die von den ge-

bundenen Flächen gebildeten engeren Zwischenräume durch Einwirkung der Wärme auf Kosten der Gröfse der Krystallhöhlen erweitern.

Lassen wir nun auf die Eisenmasse diejenige Temperatur einwirken, in welcher sie dem Schmelzpunkt nahe ist, so können wir bei einer solchen alsdann eintretenden Beweglichkeit der Eisenmoleküle diejenige Grenze erreichen, in welcher die Gröfsen aller Zwischenräume, der Krystallhöhlen sowohl als derjenigen, welche die gebundenen Krystallflächen einschliefsen, eine gröfsere Annäherung der Gleichheit erlangen, als dies vorher der Fall gewesen. Wir fügen hier noch hinzu, dafs Alles was wir in Bezug auf die Krystallflächen angenommen haben, wir auch auf ihre kleinsten Theile ausdehnen können, auf das Molekül sowohl als auf das Elementatom.

§ 3. Die Veränderung der Härte des Eisens.

Beabsichtigen wir den höchsten Grad der Weichheit des Eisenmoleküls zu erhalten, d. h. die gröfste Erweiterung der gebundenen Krystallflächen zu erreichen, dann wählen wir den Weg der möglichst langsamen Entweichung der Wärme, um die Theilchen so viel wie möglich in denjenigen Lagen zu erhalten, welche sie während der Einwirkung der gröfsten Hitze eingenommen hatten.

Wollen wir aber der ursprünglichen Härte so viel als möglich nahe kommen, so müssen wir eine plötzliche, schnelle Abkühlung stattfinden lassen, um die ausgedehnten Theilchen zurückzuführen durch die zusammenziehende, zurücktreibende Kraft einer möglichst grofsen Kälte. Wir müfsten hier die ganz bekannte Thatsache erwähnen, dafs die Wärme der Cohäsion entgegenwirkt. Wie weit aber das plötzliche Zusammenziehen der Moleküle und die Erzielung einer innigeren Verbindung der kleinsten Theilchen unter Erzeugung gröfserer Krystallhöhlen möglich ist, wie wir dies bei den recht harten Stahlsorten finden, das wird von der Art der krystallinischen Beschaffenheit sowohl als auch noch ganz besonders von dem Kohlen-

gehalte des Stahles abhängen; bei galvanischem Eisen habe ich eine erhebliche Härtung durch plötzliches Abkühlen nicht wahrgenommen.

In einigen Lehrbüchern finden wir über diesen Gegenstand noch manchen Irrthum; man glaubt, daſs die plötzliche Entweichung der Wärme den ausgedehnten Zustand zu erhalten strebt und man hält die durch die Wärme ausgedehnten Theilchen für eine künstliche Ausdehnung der Moleküle, welche in einer Spannung hervortritt, die sich als bedeutende Härte äuſsert. Diese Hypothese stimmt nicht mit der Erfahrung überein, denn in Folge schnellerer Abkühlung der äuſseren Schichten tritt eine Verschiedenheit des Härtezustandes eines und desselben Körpers ein, die äuſsere Rinde erhält die gröſste Festigkeit, nach der Mitte hin nimmt dieselbe successive ab. Wir wissen aber, daſs durch die Ausdehnung einer Eisenmasse zugleich ein entsprechender Grad von Weichheit und durch Einwirkung einer Schweiſshitze sogar ein halbfest-halbflüssiger Zustand erreicht wird, und können deshalb nicht annehmen, daſs dieser Zustand der einer Spannung wäre, welcher sich als bedeutende Härte äuſsert; diese Annahme würde sonst den Satz in sich schlieſsen, daſs durch Wärme die Cohäsion unterstützt und erhöht werde.

Wir haben in unserm Versuche nur zwei verschiedene Räume vorausgesetzt, möchten aber, um keine Veranlassung zum Miſsverständniſs zu geben, nur im Allgemeinen annehmen, daſs die Erweiterung gewisser Räume, die wir durch die gebundenen Flächen bildeten, sich auf Kosten gröſserer Räume vollziehen, welche wir mit Krystallhöhlen bezeichneten. Diesen allgemeinen Begriff von Raumveränderung zwischen den Krystallflächen resp. den Atomelementen werden wir im nächsten Paragraphen mit der Veränderung der Magnetisirbarkeit vergleichen.

§ 4. Der magnetische Reibungswiderstand.

Wir wollen nun weiter annehmen, daſs der Grad der Bewegungsfreiheit für die magnetische Verschiebung inner-

halb der gebundenen Flächen, also innerhalb derjenigen Elementargrenzen, welche die gröfste chemische Affinität geäufsert haben, ein geringerer sein wird, als derjenige, welcher innerhalb der von den freien Krystallflächen umgrenzten Krystallhöhle stattfinden würde, und dass ferner die Bewegung innerhalb der gebundenen Flächen einen gröfseren Reibungswiderstand erzeugen wird, um die elektromagnetische Verschiebung in einer von der magnetisirenden Kraft abhängigen Richtung vollziehen zu lassen, als solches bei gleicher Gröfse und Richtung der einwirkenden Kraft innerhalb der Krystallhöhlen stattfinden würde; dann könnten wir vielleicht aus diesen Annahmen durch einige Modifikationen eine Relation zu dem Ohm'schen Gesetze finden und ein Analogon behufs Vorstellung eines elektromagnetischen Reibungswiderstandes ableiten, wenn wir statt des Querschnittes der ponderablen Masse, den Querschnitt der molekularen Zwischenräume beachten.

Betrachten wir jetzt zwei Eisenstäbe einer und derselben Qualität, etwa die beiden aus unserm experimentellen Theile, welche mit III und IV und IIIg. und IVg. bezeichnet wurden, also im ungeglühten und geglühten Zustande, dann würden wir a priori feststellen können, dafs 1) *durch Erweiterung der gebundenen Krystallflächen in dem ausgeglühten Eisenstabe durch magnetisirende Kräfte die elektromagnetische Verschiebung mit gröfserer Freiheit und mit weniger magnetischer Reibung in der bestimmten Richtung auftreten wird*, *als dies vorher innerhalb der gebundenen Flächen in dem ungeglühten Eisenstabe stattgefunden hätte*, und dafs 2) *der Grad der Bewegungsfreiheit irgend einer möglichen*, *elektromagnetischen Verschiebung in Richtung desselben vorhergehenden Sinnes*, *innerhalb der Krystallhöhlen ein geringerer werden würde*, *als in dem ungeglühten Eisen.*

Ich glaube, wir finden, wenn wir die kurzfaserige und langfaserige Struktur betrachten für die Veränderung der Magnetisirbarkeit keine wichtigeren Ursachen und dürfen mit einiger Sicherheit behaupten, dafs die Resultate, welche wir aus dem Experiment erhielten und in den Tafeln

I bis VI finden, in guter Uebereinstimmung mit diesen Erläuterungen stehen. Durch Beobachtung der Struktur der Stäbe III und IV, aus welchen wir die porösen Fäden, nach dem Abätzen als Restbestände erhielten, gelangten wir zu der Annahme, dafs *vor* dem Glühen wohl gröfsere Krystallhöhlen, aber bedeutend enger gebundene Molekularflächen als *nach* dem Ausglühen vorhanden gewesen seyen; eine magnetisirende Kraft, welche nicht diejenige Gröfse übersteigt, die erforderlich ist, um das Maximum der Magnetisirbarkeit zu erreichen, würde demnach in den ausgeglühten Eisenstäben III g. und IV g. nicht so viel Reibung in Wärme verwandeln und deshalb einen gröfseren Betrag zur elektromagnetischen Verschiebung in bestimmter Richtung verwenden können, als es in den Stäben III und IV der Fall wäre. Bedenken wir nun noch, dafs das krystallinische Gefüge nach den drei Dimensionen des Eisenkörpers in unserm angedeuteten Sinne verschieden seyn kann, so ist aus Vorhergehendem auch klar, *dafs der innere magnetische Reibungswiderstand auch nach diesen Richtungen verschieden seyn wird, und wir erhalten dann für die verschiedenen Axen des krystallinischen Gefüges verschiedene Gröfsen der Magnetisirbarkeit.* Im § 16 des ersten Theiles finden wir eine so starke Abweichung von der Theorie ($v < GS$) an einem Ellipsoide, welches die gröfste Magnetisirbarkeit zeigte, dafs wir wohl annehmen dürfen, diejenige Axe, in deren Richtung die Magnetisirung stattfand, sey eine *bevorzugte* für die Magnetisirung gewesen, woraus eine der wichtigsten Ursachen sich erklären läfst, die die erwähnte Erscheinung hervorrief. Von besonderem, erwähnenswerthen Einflufs, war wohl noch der relativ geringe Durchmesser des Ellipsoides, wodurch die Magnetisirung wesentlich erhöht wurde.

Nach allen vorangehenden Erläuterungen wird der inducirte, temporäre Magnetismus in dem ausgeglühten Eisen stärker hervortreten und wir können dann die Ursache des magnetischen Reibungswiderstandes zusammensetzen:

1) *aus der Gröfse der magnetisirenden Kraft und aus der Richtung, die sie der elektromagnetischen Verschiebung ertheilt,*

2) *aus der Gröfse der Bewegungsfreiheit, mit welcher die magnetische Verschiebung vor sich gehen kann, diese Gröfse wird eine Funktion des krystallinischen Gefüges seyn.*

Wir haben hier die porösen Kohleneisenmassen nur als speciellen Fall angedeutet für die Möglichkeit gröfserer und kleinerer krystallinischer Zwischenräume im gewöhnlichen Stahl und Eisen; es bedarf jedoch, um die Veränderlichkeit des Magnetismus durch geglühte und ungeglühte Eisenmassen zu zeigen, dieser Kohlenbestandtheile durchaus nicht, wie wir aus den Eigenschaften des kohlenfreien, galvanischen Eisens wissen;[1]) es geht also deutlich hervor, dafs nicht besondere kohlenhaltige Theilchen nothwendig sind, um etwa den permanenten Magnetismus zu erzeugen.

Wir sind jetzt im Stande uns ein Bild über die Veränderlichkeit der magnetischen Reibung zu machen und sehen nun, dafs ein Zusammenhang unserer Voraussetzungen mit den Erfahrungen besteht, welche wir durch die wichtigen Untersuchungen von Wiedemann, Joule u. s. w. über Wärmeentwickelung durch Magnetisirung und Deformation des magnetisirten Eisens bis jetzt gemacht haben.

§. 5. Das stabile Gleichgewicht der magnetischen Fluida.

Den hier ganz elementar entwickelten elektromagnetischen Reibungswiderstand können wir mit einem Widerstande vergleichen, den wir durch einen biegsamen Faden erhalten, welcher über einen rauhen Cylinder gespannt wird und auf den eine Kraft wirkt, welche die Richtung einer an die Oberfläche gezogenen Normalen hat; befindet sich in diesem Falle das System in Ruhe, so kann Be-

1) Poggend. Ann. Bd. CLIV, S. 67.

wegung nur dann eintreten, wenn die Reibung der berührenden Flächen überwunden ist. Lassen wir nun durch zwei verticale und tangentialwirkende Endkräfte den Faden um einen unendlich kleinen Betrag aus seiner Gleichgewichtslage entfernen, so wird das System im stabilen Gleichgewicht sich befinden; das System wird aber auch dann noch im stabilen Gleichgewicht seyn, wenn wir den Faden über den Cylinder gleiten lassen, es muſs aber für diesen Fall das ganze System so gestaltet seyn, daſs die gleitende Bewegung des Seiles innerhalb des angeführten, ursprünglichen Rahmens fortgesetzt werden kann, welches etwa durch Aufsetzen von Haken in zwei beliebigen Punkten[1]) zu erreichen wäre. In demselben Sinne dürfen wir das Gleichgewicht bei einem Systeme betrachten, das aus der magnetisirenden Kraft einer Spirale und eines zu magnetisirenden Cylinders besteht; ein Vergleich der Reibungswiderstände in beiden Systemen lehrt, daſs in dem einen Falle die Reibung vermehrt wird durch den Grad der Rauhigkeit der Flächen des sich berührenden Seiles und Cylinders, im andern Falle scheint der Grad der Bewegungsfreiheit behufs elektromagnetischer Verschiebung von derjenigen Art der Krystallflächen abzuhängen, wie wir ihn in § 2 angenommen haben; in beiden Fällen aber sehen wir, daſs die aus Reibung hervorgegangene Wärme als eine Kraft wirkt, welche gegen die Cohäsion gerichtet ist, und daſs bei fortgesetzter, äuſserer Krafteinwirkung *die Reibungsgröſse durch die Molekularveränderung alterirt wird.*

§ 6. Die Einbiegungen aller Curven.

Zum Beweise dieser Behauptung gehen wir auf die Resultate zurück, welche durch die Curven Figur I. und II. dargestellt werden, für die härteste Stahlqualität treten in auffallender Weise die Krümmungen und Einbiegungen in wiederholtem Maaſse auf, und glauben wir wohl nicht

1) Handbuch der theoretischen Physik von Thomson u. Tait § 584.

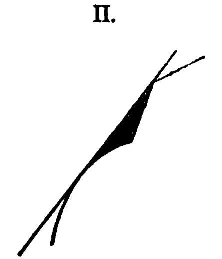
mit dem wirklichen Vorgange im Widerspruche zu seyn, wenn wir die Gröſse der Einbiegungen, welche nach der horizontalen Coordinatenaxe gerichtet ist, abhängig machen von der elektromagnetischen Reibung, die bei Einwirkung der diesen Punkten entsprechenden magnetisirenden Kraft erzeugt wurde; erst nach Einwirkung gröſserer magnetisirender Kräfte wurde der eben bezeichnete Reibungswiderstand überall dadurch vermindert, daſs gegen die Molekularkraft eine gröſsere Wirkung auftrat, um einen gewissen Betrag der Cohäsion zu überwinden, *welcher der Magnetisirung im härtesten Stahl in auffallendster Weise entgegengesetzt gerichtet war.*

Diejenigen Curven, welche wir für die magnetischen Momente nach dem Glühen erhalten, erscheinen regelmäſsiger; hier hatte ganz übereinstimmend mit unseren Voraussetzungen die Glühhitze die Rolle, *die Cohäsion zu überwinden*, übernommen und zwar in einem der hohen Temperatur entsprechenden Grade.

§ 7. Die magnetische Reibungsgröſse.

Verbinden wir, wie in Figur II. punktirt, die beiden Maximalpunkte der Curve des harten Stahles, so werden wir wahrscheinlich experimentell bestimmen können, daſs

II.



der hier in vorstehender Figur schraffirte Zwischenraum diejenige magnetische Reibungsgröſse darstellt, welche in Wärme umgewandelt wurde und zu derjenigen erzeugten Reibung noch hinzutritt, die längs einer vollkommen regel-

mäfsigen Curve stattgefunden hat; betrachten wir für jeden Stab die Differenz der beiden von den Curven eingeschlossenen Räume, welche die Tafeln I bis VI enthalten, so können wir solche durch die Gleichung

$$F = \int_{x=0}^{x=n} y_{\prime\prime}\, dx - \int_{x=0}^{x=n} y_{\prime}\, dx$$

darstellen, wenn sich durch $y_{\prime}$ und $y_{\prime\prime}$ die Gleichungen der Curven vor und nach dem Glühen ausdrücken liefsen und F diejenige magnetische Reibungsgröfse bedeutet, um welche sich in Folge des Ausglühens die Magnetisirbarkeit verändert hatte.

§ 8. Versuch einer Hypothese.

Nach diesen Voraussetzungen läfst sich mit Hilfe der Helmholtz'schen Gesetze [1]), welchen eine wirbelnde Flüssigkeit unterworfen ist, so wie nach Thomson's [2]) und Maxwell's [3]) Theorien eine Reihe der wichtigsten Erscheinungen erklären, welche die Magnetisirung darbietet:

Das elastische Medium des Lichtäthers wird in den der Magnetisirung unterworfenen Körpern in Wirbelbewegungen versetzt, deren Axen die Richtung der magnetischen Kraftlinien haben. Betrachtet man einen Eisenstab als ein Bündel unendlich dünner Fäden, deren jeder als eine Kette einander cohärirender Moleküle angesehen werden darf, dann wird unter der Einwirkung einer magnetisirenden Kraft innerhalb der Moleküle dieses Fadens in Folge elektrischer Verschiebung eine Wirbelbewegung erzeugt, welche von einem Molekül nach dem andern Molekül in Richtung der Resultante der magnetisirenden Kraft sich fortpflanzt: die Centrifugalkraft dieser Rotationsbewegung mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe hängt dann ab 1) *von der Art des krystallinischen Gefüges*,

1) **Helmholtz**, Crelle's Journal Bd. LV, 1859.
2) **Thomson**, Proceeding of the Royal Society, June 1856.
3) **Maxwell**, l. c.

2) *von der einwirkenden Kraft und* 3) *von der Gröfse der Räume, innerhalb welcher die Kraft wirkt.* Sobald diese einfache Molekularreihe durch Fäden derselben Masse in Folge Cohäsion eingeschlossen wird, verursacht jeder angrenzende Faden in Folge der nicht stattfindenden vollkommenen Homogenität und des selbst gegen den ersten Faden erzeugenden Widerstandes, sowie in Folge gegenseitiger Wirkungen der Zähigkeit der Massen und der Induktions-Wirkungen der magnetischen Theile auf sich selbst, unter Einwirkung derselben magnetisirenden Kraft eine Störung der Rotationsbewegung in dem zuerst betrachteten Faden. Wäre es möglich die Gröfse dieser Bewegung für die Masseneinheit des einfachen Fadens anzugeben, und würde man alsdann die Anzahl der Fäden bis zu einem beliebigen Durchmesser des ganzen Bündels vermehren, so würde klar hervorgehen, dafs mit der Zunahme des Durchmessers des magnetisirten Körpers die Gröfse der Rotationsbewegung in der Masseneinheit sich vermindern müsse.

Um eine Abhängigkeit der permanenten Maximal-Magnetisirung von der temporären zu bestimmen, gebe ich in folgender Tabelle die Maxima der permanenten Magnetisirung genau in denselben Einheiten an, durch welche die temporären Maximalwerthe in §. 14. ausgedrückt sind, und zwar das Moment in der Einheit der elektromagnetischen Kraft:

I.		II.		IV.		V.		VI.	
v	*n*	*v*	*n*	*v*	*n*	*v*	*n*	*v*	*n*
0,28	8,28	0,49	8,54	5,09	8,94	1,92	3,65	3,93	4,16
3,73	18,66	2,40	11,28	11,65	6,38	4,45	3,10	7,38	5,25
9,62	18,02	3,51	11,26	11,72	4,74	6,39	2,98	5,80	3,90
10,02	15,99	4,97	10,48	10,52	3,61	5,94	2,51	5,36	3,32
10,04	13,72	6,14	9,41	9,19	3,74	5,78	2,51	4,91	2,99
9,35	11,8	5,93	8,34	8,02	3,03	5,42	2,23	4,25	2,63

v bedeutet wieder vor dem Glühen, und *n* nach dem Glühen. *Die Maxima der permanenten Magnetisirungen liegen in der Nähe der Maxima der temporären, und werden wie bei den temporären Magnetisirungen für weiche Eisen- und Stahlqualitäten früher erreicht, als für harte.*

§. 9. Bouty's Theorie aus meinen Resultaten.

Wir haben eine Veränderung des inducirten Magnetismus aus der molekularen Veränderung der Eisenmasse hergeleitet, und sind nur durch die Annahme der Wechselwirkung der Reibungswiderstände hierzu gelangt, haben jedoch nirgend die Krystallhöhlen allein als die Träger des temporären Magnetismus angesehen, sondern in allen Theilen der ganzen magnetischen Substanz diese Eigenschaft gefunden. Auf Grund meiner Abhandlung[1]), dafs die porösen Kohleneisenmassen erhebliche Coercitivkraft äufsern, hat Hr. Bouty in seiner Dissertation[2]) eine Theorie aufgebaut, welche auf einem offenbaren Mifsverständnisse beruht. Hr. Bouty schliefst aus meinen Ergebnissen:

„*Les éléments A, doués de pouvoir coercitif, sont tels qu'ils conservent tout le magnétisme qu'ils acquièrent; les éléments B sont au contraire absolument dépourvus de pouvoir coercitif.*"

Ich glaube, dafs aus meinen Beobachtungen die Unzulässigkeit dieser Annahmen hinreichend hervorgeht, da unzweifelhaft in den angenommenen Krystallhöhlen nach gegebener Definition der temporäre Magnetismus vorhanden ist, welcher beide Arten, den verschwindenden und permanenten einschliefst; wir wissen aber auch, dafs im weichen Eisen das Maximum des permanenten Momentes viel früher erreicht wird als das Maximum des temporären Momentes, und dafs defshalb nach dem Erreichen des permanenten magnetischen Momentes von hier ab aller Mag-

1) Poggend. Ann. Bd. CLI, S. 76.

2) *Thèses de docteur No. d'ordre* 360 *Paris* 1874.

netismus nur verschwindender — temporärer Magnetismus ist, und welcher der porösen Kohleneisenmasse sowohl als den übrigen Theilen zugeschrieben werden muſs.

Es ist auch schon von Hrn. Wiedemann in seinen „Bemerkungen zu einigen Abhandlungen aus dem Gebiete des Magnetismus“, Poggend. Annal. Bd. CLVII, S. 275, klar auseinandergesetzt, daſs Hrn. Bouty's Voraussetzungen unzulässig seyen und daſs solche Annahmen aus meinen Resultaten durchaus nicht hervorgingen; es ist Hrn. Wiedemann's Einwand mit meinen hier entwickelten Gründen übereinstimmend, daſs den temporären und permanenten Magnetismus anzunehmen, eine vollkommen homogene Masse diese Eigenschaften besitzen könne, wie eine unhomogene Masse.

§. 10. Chwolson's Theorie.

Eine andere Theorie ist von Hrn. Chwolson[1]) über die Abhängigkeit des Magnetismus von den Kohlenatomen gegeben, welche ich noch erwähne, da sie einige der von mir erhaltenen Resultate erklären könne. Hr. Chwolson gründet seine Theorie des permanenten Magnetismus auf folgenden Satz: „Die Kohlenatome sind der freien Drehung der Eisenatome hinderlich“. „Dieser ist der einzige wohl kaum „hypothetische“ Satz, von dem ich ausgehe, und die gesammte weitere Entwickelung ist lediglich eine Folge dieses Satzes. Die Nähe oder gar Berührung der Kohlenatome kann auf sehr verschiedene Weise der Drehung hinderlich seyn u. s. w.“ —

Auf Grund dieser Annahme ist Hr. Chwolson im Stande einige Sätze von Hrn. Wiedemann als „*unbefriedigend*“ und „*ungenügend*“ zu erklären, die er aus seiner Theorie *hinreichend* zu erklären versucht. Hr. Chwolson hat aber wohl übersehen, daſs für galvanisches Eisen, welches dieselben magnetischen Eigenschaften zeigt, wegen der nicht vorhandenen Kohlenatome seine Theorie nicht

1) Poggend. Ann. Ergänzungsband VII, S. 535.

anwendbar ist, ebenso sind Hrn. Chwolson die Arbeiten des Hrn. Rowland[1]) unbekannt geblieben; es lautet ein Satz einer gröſseren Reihe wichtiger Resultate:

> *„Iron, nickel and cobalt, in their magnetic properties at ordinary temperatures, differ from each other only in the quantity of those properties and not in the quality.“*

Hr. Chwolson bemerkt noch, es wird sich zeigen, daſs die Rechnung uns zu Resultaten führt, welche zufällig den Maxwell'schen Annahmen auf das Genaueste entgegengesetzt sind, „daſs wenn ein Stahltheilchen durch die äuſsere Kraft um einen Winkel β gedreht wird, der kleiner ist als ein gewisser Winkel β_0, so kehrt das Theilchen völlig in seine frühere Lage zurück, ist dagegen $\beta > \beta_0$, so kehrt das Theilchen nicht völlig in die frühere Lage zurück, sondern bleibt um einen Winkel $\beta - \beta_0$ abgelenkt.“ Hr. Chwolson hat den Zusatz von Maxwell[2]) über diese Theorie wahrscheinlich auch nicht beachtet, ich möchte ihn wörtlich wiedergeben, da ich ihn für sehr wichtig halte:

> „Der wissenschaftliche Werth einer Theorie dieser Art, in der wir so viele Voraussetzungen machen und in welche wir so viele noch zu berichtigende Constanten einführen, kann nicht allein geachtet seyn durch ihre numerische Uebereinstimmung mit einer gewissen Reihe von Experimenten. Wenn die Theorie irgend einen Werth hat, so ist es der, daſs sie uns befähigt ein Bild von dem zu entwerfen, was in dem Eisen stattfindet, während der Dauer der Magnetisirung.“

Was die Molekularveränderung in Folge der Magnetisirung anbetrifft, so läſst sich recht gut erklären, daſs in Richtung der Axe der wirbelnden Bewegung der Aethermasse eine Drehung eines Theiles derjenigen Moleküle

1) *Philosophical Magazine, November* 1874.

2) Maxwell's *Electricity and Magnetism* 1873.

hervorgebracht werden kann, deren magnetische Axen nicht die Richtung der Rotationsaxe haben; diese Drehung kann jedoch nur unter Aufheben des Reibungswiderstandes stattfinden. Wollte man die in vorliegender Abhandlung ausgedehnte Hypothese zur Erklärung der übrigen magnetischen Erscheinungen anwenden, so glaube ich, daſs wir nirgend mit derselben in einen Widerspruch gerathen, dennoch erscheint es mir jetzt wohl erst recht wichtig, unter einem neuen Gesichtspunkte die Arbeiten fortzuführen, um die wichtigsten Naturerscheinungen, welche der Magnetismus verursacht, in ihren unabänderlichen Gesetzen sicherer und bestimmter auszudrücken, als es die Art meiner Untersuchung über die Abhängigkeit der Magnetisirung von der magnetisirenden Kraft gestattete.

Die vorliegende Untersuchung ergiebt folgende Sätze:

Erster Abschnitt.

I. *Der Verlauf der Funktion k hat dasselbe Verhalten, wie Riecke's Funktion p.*

Ia. *Die Funktion p zeigt in allen Fällen dieselbe Abhängigkeit von der Stoffbeschaffenheit, wie die Funktion k.*

II. *Ein Unterschied der Funktionen k und p ist nur der, daſs die Funktionen p in viel verkleinertem Maaſsstabe erscheint, als die Funktion k, und daſs zur Darstellung des wahren Verlaufes der Funktion p eine Angabe von 5—6 Decimalstellen erforderlich ist.*

IIa. *Eine annähernde Uebereinstimmung mit den Resultaten des Hrn. Riecke würde erhalten werden, wenn man nur die ersten vier Decimalstellen der Werthe von p aus meinen Tabellen in Anwendung bringen würde.*

Zweiter Abschnitt.

I. *Die Unregelmäſsigkeit des Verlaufes einer Magnetisirungsfunktion in Bezug auf seinen temporären Magne-*

tismus findet am stärksten beim harten Stahl statt; bei allen ausgeglühten Eisen- und Stahlsorten erscheinen die zur Darstellung der Funktion gezeichneten Curven regelmäfsiger, fast regelmäfsig erscheint aber überall der Verlauf der Curven der permanenten, magnetischen Momente.

II. *Die Curven für den permanenten Magnetismus vor dem Glühen zeigen für relativ schwache magnetisirende Kräfte auf den Tafeln I. bis IV. eine charakteristische Einbiegung, welche nach der horizontalen Coordinatenaxe gerichtet ist. Diese Einbiegung erscheint überall vor dem Glühen im gröfseren Maafsstabe, als nach dem Glühen; sie ist im weichsten Eisen kaum wahrnehmbar.*

III. *Die Wechselwirkung des temporären und permanenten Magnetismus im Eisen- oder Stahlstabe wird durch eine Veränderung des krystallinischen Gefüges erzeugt.*

IV. *Die Differenz des temporären Magnetismus zweier Eisenstäbe, die in Form und Gröfse einander gleich, aber in ihrem krystallinischen Gefüge verschieden sind, ist gleich der Differenz der vorhandenen, magnetischen Reibungsgröfse.*

V. *Nach starkem Ausglühen des Eisens oder Stahles nach erfolgter Maximal-Magnetisirung erreicht der permanente Magnetismus nicht seine vorherige Gröfse, obgleich der Magnetismus bis zur Einwirkung einer gewissen Höhe wachsender magnetisirender Kräfte ebenfalls gröfser ist im weichen Eisen und Stahl als im härteren Zustande; es scheint diese Wirkung abzuhängen von der Verkleinerung gewisser Krystallräume in Folge des Ausglühens, denn hierdureh wird der früher erreichten Bewegungsgröfse nur ein verminderter Grad der Bewegungsfreiheit gestattet.*

VI. *Die Gröfse der Einbiegungen, welche die meisten Curven der Tafel I. bis VI. zeigen, hängt von der Gröfse des magnetischen Reibungswiderstandes ab.*

VII. *Die Maxima der permanenten Magnetisirungen werden*

stets innerhalb der Gröfsen magnetisirender Kräfte erreicht, welche die Maxima der temporären Magnetisirung erzeugen, und werden für weiche Eisen- und Stahlqualitäten früher erreicht, als für harte.

Auf Grund dieser experimentellen Resultate und unter Berücksichtigung der bisher gemachten Voraussetzungen möchte ich folgende Hypothese aufstellen:

a) *Die Coercitivkraft wird mit der Ausdehnung der gebundenen Krystallflächen oder mit Erweiterung des Innern der Moleküle, wo die elektrische Verschiebung erzeugt wird, verringert, wobei die Centrifugalkraft der Rotationsbewegungen der Aetheratome nach Entfernung der äufseren einwirkenden Kraft kleiner wird, und zwar in dem Maafse, wie die Räume sich vermindern, durch welche hindurch die Fortpflanzung der Rotation der Wirbel stattfindet.*

b) *Eine Deformation der magnetisirten Masse wird von der Centrifugalkraft der magnetischen Wirbel erzeugt.*

Bei allen vorstehenden Resultaten sind die Wirkungen der neutralen und diamagnetischen Körper ausgeschlossen, welche dem magnetischen Eisen oft beigemengt sind.

II. *Einige wesentliche Verbesserungen an einfachen und zusammengesetzten Influenzmaschinen; von W. Holtz.*

(Aus den Göttinger Akademieberichten vom 15. März v. J., nebst einem Nachtrag für diese Annalen.)

---

1. Die einfache Maschine.

Unter den verschiedenen Formen, welche ich der einfachen Maschine gab, hat sich die letzte vom Jahre 1869 mit einseitiger Unterstützung der Axe bis heute ohne we-

sentliche Verbesserungen erhalten. Dieselbe verdankt ihre Entstehung theilweise einem Versuch des Hrn. Professor Poggendorff, welcher zeigte, dafs die Benutzung zweier Hilfsconductoren in directer Verbindung, welche ich früher nur flüchtig erwähnt [1]), bei einer gewissen schrägen Lage derselben dem Gebrauche eines Hilfsconductors vorzuziehen sey, sowie der Anregung des verstorbenen Geh. Raths Magnus, welcher wiederholt die Nothwendigkeit hervor hob, die Uebersichtlichkeit der Maschine für Schulen durch Entfernung aller nicht unumgänglich nöthigen Stücke aus dem vorderen Bereich der Scheiben zu erleichtern. So geschah es, dafs ich den beweglichen Isolator um einen Stahlzapfen schwingen liefs, welcher aus einer hinter den Scheiben befindlichen Holzsäule hervorragte, dafs ich die Hilfsconductoren in eine einzige Metallröhre vereinigte, welche mittelst eines kleineren Zapfens in dem vorderen Ende jenes Zapfens befestigt war, dafs ich die Träger der Hauptconductoren seitlich von der rotirenden Scheibe aufstellte und an letzteren zugleich die Leiter anbrachte, in welcher sich die Entlastungsstangen verschoben. Die Isolirung der Axe vom Holzständer wurde durch ein eigens geformtes Ebonitstück, bestehend aus einem cylindrischen und einem scheibenartigen Theile bewirkt. Zur Haltung des festen Isolators diente eine von letzterem ausgehende Strebe, zur Regulirung seiner Stellung ein auf der Holzplatte verschiebbares Ebonitscheibchen mit einer dem Glasrande angepafsten Nute, sowie zwei durch die Stützen der Hauptconductoren reichende Schräubchen. Um diese Conductoren selbst der rotirenden Scheibe mehr oder weniger nähern, und um sie nach Bedürfnifs auch ganz entfernen zu können, waren die Ebonitsäulen nicht fest in der Holzplatte befestigt, vielmehr conisch, und somit innerhalb gewisser Gränzen drehbar, in eine Metallfassung gesetzt, welche sich ihrerseits mittelst einer von Hrn. Borchardt erdachten Vorrichtung auf der Unterlage verschieben und feststellen liefs. Um den Hilfscon-

1) Pogg. Annal. Bd. 127, S. 323.

ductoren bei jeder gewünschten Lage eine sichere Haltung zu geben, war der Zapfen, durch welchen sie befestigt wurden, mit einem längern Schlitz versehen, auf dafs er mit Federkraft und der nöthigen Reibung in der betreffenden Oeffnung beweglich sey. Die Kurbelwelle drehte sich in einer längeren Metallröhre, welche im Kopfe eines niederen Ständers safs, welcher seinerseits, um die Schnur bequemer zu spannen, auf einer verschiebbaren Leiste befestigt war.

Bei einer solchen Einrichtung nun, wie ich sie hier zum bessern Verständnifs des Folgenden genauer beschreiben mufste, konnte bereits vor Jahren eine Funkenlänge, welche dem Radius der rotirenden Scheibe gleich kam, erreicht werden. Ich habe mich seitdem vielfach mit Versuchen beschäftigt, welche eine günstigere Einrichtung der Conductoren sowohl, als der influenzirenden Flächen, zum Ziele hatten, bin aber fast immer auf negative Resultate gestofsen. Erst in neuester Zeit ist es mir durch verhältnifsmäfsig einfache Mittel gelungen, und zwar ohne dafs ich die Rotationsgeschwindigkeit beschleunigt, oder die quantitative Wirkung verringert hätte, die Funkenlänge weit über das bisherige Maximum d. h. fast bis zu $\frac{2}{3}$ des Scheibendurchmessers zu vergröfsern. Die hierfür nöthigen Abänderungen in der Construction sind theilweise der Art, dafs sie sich leicht auch an bereits vorhandenen Exemplaren anbringen lassen.

Die Hauptconductoren bestanden bisher aus cylindrischen Röhren mit einander zugekehrten halbkugelförmigen Enden. Es wird schwerlich Jemandem, welcher oft mit der Maschine experimentirt hat, entgangen seyn, dafs an diesen Enden leicht elektrische Verluste, sey es in Form von Glimmlicht oder Büschel, sey es in Form von Funken erfolgen, und ersteres namentlich an demjenigen Conductor, welcher jedesmal der negativ elektrischen Papierfläche gegenüber steht. Verkürzt man die Conductoren, so verringert man die quantitative Leistung. Dasselbe geschieht, wenn man den Umfang der Röhren vergröfsert,

ohne gleichzeitig die Spitzen zu verlängern, weil man damit die Wirkung der letzteren schwächt. Verlängert man die Spitzen gleichzeitig, so finden nun leicht Verluste an diesen statt, an demjenigen Theile nämlich, welcher der Scheibe am fernsten ist und welchen die Elektricität gleichsam nicht mehr vollkommen umhüllt. Es liegt nun der Gedanke nahe, die Conductoren, soweit die Spitzen reichen, unverändert zu lassen, und nur das halbrunde Ende zu erweitern, d. h. mit einer gröſseren Kugel zu versehen. Kugeln aus einem Isolator wären hierfür unbrauchbar, weil dort, wo das Metall aus ihnen hervortritt, gewissermaſsen eine Kante entsteht, welche die Ausströmung besonders begünstigen würde. Kugeln aus festem Holz, geschliffen, aber unpolirt, wie ich sie vor Jahren bereits flüchtig empfohlen habe [1]), wirken nur so lange günstig, als sie nicht rissig geworden, oder als sie nicht von der Elektricität durchbrochen sind. Durch Metallkugeln läſst sich die Ausströmung vollkommen vermeiden, zumal, wenn sie gar nicht, oder nur äuſserst schwach lackirt sind, aber die Conductoren werden hierdurch einander bedeutend genähert, so daſs nunmehr leicht Ausgleichungen in Funkenform erfolgen. Es bleibt nur noch ein Mittel übrig, nämlich die Kugeln soweit über die Conductoren zu schieben, daſs die innere Kugelfläche das halbrunde Ende berührt, und die letzten Spitzen entweder mit der nöthigen Verkürzung in der Kugel selbst zu befestigen, oder diese mit einem Schlitz zu versehen, um jenen den Eintritt zu gestatten. Solche verkürzten Spitzen wirken dann freilich nicht ganz, wie die andern, allein trotz dieser verringerten Wirkung wird doch die quantitative Leistung der Maschine nicht geschwächt, weil die innere Organisation der Art, daſs eine erhöhte intensive auch mittelbar eine erhöhte quantitative Wirkung zur Folge hat, eine Eigenthümlichkeit, auf welche ich weiter unten noch mehrfach zurückkommen werde.

Schon in früheren Arbeiten wies ich wiederholt dar-

1) Pogg. Annal. Bd. 130, S. 302.

auf hin, dafs die Gröfse der Oeffnungen in der festen Scheibe von wesentlichster Bedeutung sey. Ohne solche Oeffnungen würde die Ladung der rotirenden Scheibe entweder gar nicht, oder nur unvollkommen frei und könnte weder in die Papierspitzen, noch in die Hauptconductoren strömen. Aber es genügt nicht, dafs die Ladung frei wird, sondern sie soll auch womöglich bereits in gröfserer Entfernung auf die eben erwähnten Stücke wirken, was unmittelbar eine gröfsere intensive, mittelbar eine gröfsere quantitative Wirkung zur Folge hat. Hiernach müfste man die betreffenden Oeffnungen so viel wie möglich erweitern; aber diese Erweiterung hat ihre Gränze in dem Umstande, dafs die Oeffnungen den Belegungen nicht zu nahe treten dürfen, weil letztere die entgegengesetzte Elektricität von derjenigen haben, welche an ersteren frei wird, und dafs gleichzeitig die Belegungen nicht zu kurz seyn dürfen, weil sonst die Hilfsconductoren den Hauptconductoren zu nahe treten würden. Ich glaubte lange, dafs das beste Verhältnifs ein solches sey, wo die Kanten der Belegung einen doppelt so grofsen Winkel einschliefsen, als die Kanten der Oeffnung. Dies ist jedoch nicht richtig; es ist besser, die Oeffnung weiter zu wählen, und da die feste Scheibe hierdurch an Haltbarkeit verliert, thut man gut, den Durchmesser derselben etwas zu vergröfsern, so dafs sie z. B. bei einer Maschine mit 400^{mm} grofser rotirender Scheibe die letztere etwa rings um 30 bis 35^{mm} überragt.

Die nothwendig horizontale Lage der Entladungsstangen führt den Uebelstand mit sich, dafs die rechte Belegung der Holzplatte viel näher liegt, als die linke. Dies hat zur Folge, dafs jene ihre Elektricität leichter verliert, als diese, weshalb der linke Pol allemal eine höhere Dichtigkeit zu erkennen giebt, und die Spannungsdifferenz zwischen beiden Polen überhaupt keine so grofse ist, als sie bei besserer Isolirung der rechten Belegung seyn könnte. Um diesem Uebelstande möglichst vorzubeugen, mufs der ganze mittlere Theil der Holzplatte, soweit es die ver-

schiedenen Ständer erlauben, mit einer Ebonitplatte bedeckt werden und das Scheibchen, auf welchem der feste Isolator ruht, muſs auf dieser, ohne daſs sie jedoch durchbohrt würde, verstellbar seyn. Solches geschieht am besten mit Hilfe einer durch den Holzständer laufenden Ebonitschraube, welche in diesem drehbar und in jenem Scheibchen verschraubbar ist. Um aber auch andere leitende Theile möglichst aus der Nähe der Belegung zu entfernen, ist es rathsam, die erwähnten Metallfassungen am Fuſse der Ebonitsäulen durch solche aus eben dieser Masse zu ersetzen, desgleichen die Schnur anstatt aus Hanf, aus Seide bestehen zu lassen.

Da sich nun die Funkenlänge durch die erwähnten Mittel soweit vergröſsern läſst, daſs die bisherige Entfernung der beiden Kugeln, zwischen welchen sich die Elektroden bewegen, nicht mehr ausreicht, so sind die Röhren, welche jene Kugeln mit den Hauptconductoren verbinden, möglichst nach auſsen zu rücken, so daſs sie also nicht mehr der Mitte, sondern dem Ende der Conductoren und zwar unmittelbar neben der Ebonitsäule entspringen. Auch ist es gut, diesen Röhren eine gröſsere, als die bisher gebräuchliche, Länge zu geben, damit die Elektroden weiter von den mit ihnen ungleichnamig elektrischen Conductorenden entfernt werden. Diese Veränderungen bedingen aber eine gröſsere Breite der Unterlage, um die Condensatoren noch ferner unterhalb der Kugeln, durch welche die Entladungsstangen gehen, placiren zu können. Damit man bei der vergröſserten Schlagweite nicht Gefahr laufe, daſs sich die rechte Entladungsstange nach der Hand, welche die Kurbel dreht, entlade, sind die Füſse der Unterlage etwas zu erhöhen und der Ständer, welcher die Kurbelwelle trägt, soweit zu verkürzen, daſs sich das Schnurrad fast unmittelbar über der Tischfläche bewegt. Dies hat zugleich eine gröſsere Entfernung der beiden Schnurräder zur Folge, weil die Schnur sonst die rechte Kante der Holzplatte berührte, und diese gröſsere Entfernung, wenn sie auch einen gröſseren Raum beansprucht, bietet

doch zugleich den Vortheil, dafs das kleinere Schnurrad weiter umspannt und desto sicherer getrieben wird.

Dies wäre etwa die Anordnung, welche der neuen Wirkungsweise der Maschine entspräche. Ich lasse es jedoch dahingestellt, ob es nicht für die mechanische Ausführung bequemer wäre, auch die Träger der Hauptconductoren in soweit zu verändern, dafs man die Ebonitsäulen weiter nach vorne gerückt fest in die Unterlage setzte und durch ihre Köpfe die Röhren führte, welche vorne die Kugeln mit den Entladungsstangen, hinten die auf ihnen verschiebbaren und zugleich drehbaren Conductoren trügen — eine Anordnung, wie ich sie bei der weiter unten erwähnten Doppelmaschine benutzt.

Noch mufs ich erwähnen, dafs auch die Gröfse der Elektroden, diejenige Gröfse nämlich, welche nöthig ist, um mit einer bestimmten Maschine das Maximum der Funkenlänge zu erreichen, nicht ganz unverändert blieb, weil die quantitative Wirkung nicht in demselben Verhältnisse, wie die intensive verbessert ist, und eine einseitige Verbesserung der letzteren nothwendig ein Wachsen jener Gröfse zur Folge hat. Uebrigens ist bei Bestimmung der Quantität die Stromstärke niederer Spannung von derjenigen höherer Spannung wesentlich zu trennen, da bei zwei Maschinen verschiedener Construction die eine gleich, die andere sehr ungleich ausfallen kann — eine Folge der bereits wiederholt erwähnten diesem Elektromotor eigenthümlichen Wechselwirkung zwischen Quantität und Dichtigkeit.

2. Die Doppelmaschine.

Die erste wirkliche Doppelmaschine wurde im Jahre 1870 von Hrn. Professor Poggendorff construirt und beschrieben[1]). Sie ist eine Doppelmaschine im vollsten Sinne des Worts, weil in ihr fast alle für eine einfache Maschine nöthigen Stücke verdoppelt sind. Zwei einfache Maschinen sind nämlich in der Weise mit einander ver-

1) Pogg. Annal. Bd. 141.

bunden, daſs man die eine als das Spiegelbild der andern betrachten kann. Aber an Stelle der vier Ebonitsäulen, welche die Hauptconductoren tragen, erheben sich nur zwei solcher Säulen in der Mitte der etwa 300^{mm} von einander entfernten Scheibenpaare. Ihre Verlängerung bilden zwei weite Metallröhren, welche mit den Conductoren in Verbindung stehen und oberhalb der Scheiben zwei groſse Kugeln tragen, in welchen sich die Entladungsstangen verschieben. Da jeder der beweglichen Isolatoren um eine gesonderte Axe rotirt, so bedarf es natürlich auch zweier groſser Schnurräder, welche durch ein und dieselbe Welle in Bewegung gesetzt werden. Diese Anordnung gewährt den Vortheil, daſs die Axen geringeren Schwankungen ausgesetzt sind, daſs die Schnüre sicherer ziehn, und daſs man jedes der Scheibenpaare nach Belieben ausschalten kann. Etwas unbequem freilich ist die hohe Lage der Entladungsstangen, jedoch nur dann, wenn man sich der Maschine zu längern Untersuchungen bedient. Die quantitative Leistung ist wie sich voraussehen lieſs, gleich der doppelten einer einfachen Maschine. Auch die Funkenlänge ist ein wenig gröſser, als sie sonst eine einfache Maschine zu liefern pflegt, und zwar deshalb, weil eine stärkere Elektricitätserregung die an den Conductoren oder an den Elektroden selbst durch Ausströmung entstehenden Verluste schneller ersetzt. Die in Rede stehende Maschine hat übrigens solchen Beifall gefunden, daſs Hr. Borchardt allein mehr als 50 Exemplare derselben versandt hat.

Aber bereits ein Jahr früher wurde von Hrn. Dr. P. Kaiser in Leyden eine Maschine construirt, welche ich zwar deshalb nur eine halbe Doppelmaschine nennen möchte, weil sie die für eine einfache Maschine nöthigsten Stücke nur theilweise verdoppelt[1]), welche jedoch an Wirkung, namentlich in der vor Kurzem von Dr. L. Bleekrode beschriebenen vereinfachten Construction[2]), der Pog-

1) *Les Mondes* 1869, *t. XX p.* 665.
2) Pogg. Annal. Bd. 156, S. 278.

gendorff'schen Maschine wenig nachgeben dürfte und theoretisch von gröfstem Interesse ist. Die Kaiser'sche Anordnung charakterisirt sich kurz dadurch, dafs zwei rotirende Scheiben, zwischen denen sich eine feste befindet, auf eine und dieselbe Axe gesetzt sind. Die feste, mit den betreffenden Oeffnungen versehen, ist an beiden Seiten belegt, und den Belegungen stehen die nöthigen Conductoren gegenüber. Bleekrode hat diese Anordnung mit meiner letzten Construction der einfachen Maschine verbunden, indem er derselben die einseitige Befestigung der Axe und der vorderen Hilfsconductoren entnahm, während seine Befestigung der hintern Hilfsconductoren derjenigen meiner Maschine mit zwei entgegengesetzt rotirenden Scheiben entspricht. Die Hauptconductoren werden durch Ebonitsäulen, welche seitlich von der festen Scheibe stehn, an einer durch den Kopf der Säule laufenden kurzen Metallröhre getragen, so dafs sich also zu jeder Seite der Säule ein solcher Conductor befindet. Die Säulen dienen zugleich mit Hilfe kleiner verschraubbarer Vorrichtungen zur Haltung der festen Scheibe. Die Röhren mit den Kugeln, in denen sich die Entladungsstangen verschieben, sind, wie bisher bei der einfachen Maschine, in der Mitte der vorderen Hauptconductoren befestigt. Bleekrode wendet nebenbei Ebonitscheiben an Stelle von Glasscheiben an, weil er jene aus verschiedenen Gründen für geeigneter hält.

Ich habe oben bemerkt, dafs in der Kaiser'schen Anordnung die für eine einfache Maschine nöthigsten Stücke nur theilweise verdoppelt sind, weil ich allerdings der Ansicht bin, dafs zu einer vollkommnen einfachen Maschine aufser zwei Belegungen mit den nöthigen Conductoren auch noch diejenigen Glasflächen gehören, welche einmal zwischen den Belegungen und der rotirenden Scheibe befindlich den Uebergang der Elektricität von jenen zu dieser hindern, dann die Fortsetzung der Belegungen bildend in ähnlicher Weise, wie die seidenen Flügel an Reibzeugmaschinen, einen schützenden Einflufs auf die Ladung

der rotirenden Scheibe üben. Ich erlaubte mir in früheren Arbeiten wiederholt darauf hinzuweisen, daſs Belegungen an der innern Seite der festen Scheibe wohl zur Vermeidung von Stromumkehrungen dienen, aber so groſse Verluste erzeugen, daſs man sie nicht gut verwerthen kann. Und wer die feste Scheibe entfernt und zwei lose Papierstücke nach Art der Belegungen durch isolirende Handhaben an oder in der Nähe der rotirenden Scheibe hält, wird wohl unter günstigen Verhältnissen d. h. wenn er die Endkante der Stücke rund nach auſsen biegt, eine elektrische Strömung erzeugen, aber solche, welche mit der Wirkung einer vollkommnen Maschine nicht zu vergleichen ist. Bei der Kaiser'schen Anordnung nun müssen solche Verluste nothwendig stattfinden und doch heiſst es, daſs sich mit derselben die doppelte Quantität einer einfachen Maschine erreichen läſst.

Ich muſs erwähnen, daſs ich zu der Zeit, wo Kaiser seine Construction veröffentlichte, grade in eine längere Krankheit verfiel, welche mich Jahre lang an der Fortsetzung meiner Studien hinderte, und daſs mir später nur wenig von der neuen Entdeckung bekannt wurde. Sonst würde mir der eben hervorgehobene Widerspruch ohne Zweifel schon früher aufgefallen seyn und mich zu weiteren Versuchen über diesen Gegenstand angeregt haben. Die Arbeit Bleekrode's, welche Hr. Prof. Poggendorff die Güte hatte mir zu übersenden, hat meine Aufmerksamkeit erst in neuester Zeit auf die vorliegende Frage gelenkt, und wenn es mir in Folge dessen gelungen ist, die Construction der Doppelmaschine zu vervollkommnen, so habe ich es einerseits dieser Anregung, andrerseits der Unterstützung des Hrn. Borchardt zu verdanken, welcher nicht nur die mechanische Ausführung leitete, sondern mir auch häufig mit seinen Ideen zu Hilfe kam und übrigens seit längerer Zeit den Wunsch hegte, eine neue Doppelmaschine zu construiren.

Da ich keineswegs an der Richtigkeit der Bleekrode'schen Angaben zweifelte, daſs mit einer festen und zwei

rotirenden Scheiben die doppelte Quantität einer einfachen Maschine zu erzielen sey, und da ich ebensowenig an meinen eignen Erfahrungen zweifeln konnte, wonach bei einem derartigen Arrangement grofse elektrische Verluste entstehn müssen, so schlofs ich, dafs hier noch ein bisher unbekannter, die elektromotorische Kraft begünstigender Factor mitwirken müsse, und glaubte denselben in der gröfsern Annäherung der rotirenden Scheiben zu erkennen. Es ist klar, dafs die vier Flächen zweier Franklin'schen Tafeln an Capacität verlieren, je mehr man dieselben nähert. In gleicher Weise wird die quantitative Wirkung zweier Influenzmaschinen ohne selbstständige elektromotorische Kraft, d. h. solcher, deren influenzirende Flächen durch eine andre Elektricitätsquelle constant elektrisch erhalten werden, bei gröfserer Annäherung der beiden Scheibenpaare eine geringere seyn. Ganz anders aber verhält es sich mit der intensiven Wirkung, derjenigen nämlich, welche die frei gewordene Elektricität der rotirenden Scheiben auf einen ihrer Fläche zugekehrten Leiter übt. Diese wächst mit der Annäherung und — was wohl zu beachten — sie wächst in gröfserem Maafse, als die Ladung der Scheiben wegen eben dieser Annäherung abnimmt, und zwar deshalb, weil bei der Ladung der gröfsere Theil der Elektricitäten gebunden ist. Da nun die Influenzmaschine mit selbstständiger elektromotorischer Kraft vermöge der vermittelnden Papierspitze eine solche Organisation hat, dafs mit der intensiven Wirkung nothwendig zugleich die quantitative wächst, so ist klar, welcher Erfolg hier von der gröfsern Annäherung der Scheiben zu erwarten ist. Hiermit ist aber zugleich der Weg zur weitern Vervollkommnung der Doppelmaschine gezeigt. Denn, wenn zwei rotirende Scheiben unter Benutzung einer festen, welche an beiden Seiten belegt ist, trotz der hier stattfindenden Verluste bereits die doppelte Quantität einer einfachen Maschine liefern, so mufs sich diese Wirkung unter Benutzung zweier festen Scheiben, welche nur

an den einander zugekehrten Flächen belegt sind, noch bedeutend verstärken.

Zur Ausführung dieser Idee wurde im Wesentlichen die Construction der einfachen Maschine benutzt. Die rotirenden Scheiben, auf derselben Axe sitzend, wurden durch ein Ebonitscheibchen von einander getrennt, welches, um den Abstand für die verschiedenen Versuche zu variiren, durch andere von verschiedener Dicke ersetzt werden konnte. Vor, aber zugleich seitlich von den Glasscheiben erhoben sich zwei isolirende Säulen, durch deren Köpfe zwei mit der Axe parallele Messingröhren liefen. Diese Röhren traten den festen Scheiben bis auf 10^{mm} nahe und waren zur Haltung derselben und zur Regulirung ihrer Lage mit schwer verschiebbaren Ringen aus Gummi oder Ebonit versehen, in deren Peripherie kleine Nuten eingedreht waren. Die Röhren dienten zugleich zur Haltung der Hauptconductoren, welche sich mit ihren kugelförmigen Enden auf denselben drehen und zugleich verschieben liefsen. Das vordere Ende der Röhren endlich trug die Kugeln für die Entladungsstangen. Die Hilfsconductoren waren entweder vor oder hinter den Scheiben, oder an beiden Seiten zugleich an den bereits früher angedeuteten Punkten befestigt. In der Organisation der Maschine aber war eine doppelte Anordnung möglich, je nachdem die festen Scheiben nämlich innerhalb oder aufserhalb der rotirenden ihre Stellung erhielten. Im ersteren Falle waren 4 vollkommne Haupt- und ebenso viele Hilfsconductoren nöthig, welche, wie in der Kaiser'schen Construction, aufserhalb der Scheibenpaare lagen. Im letztern Falle, welcher mehr der Poggendorff'schen Anordnung entspricht, waren die 8 Conductoren in halb so viele Doppelconductoren verwandelt, d. h. in enge Röhren, welche nach beiden Seiten mit Spitzen besetzt waren, um sie innerhalb der beiden Scheibenpaare bei möglichster Annäherung der letzteren placiren zu können. Hierbei waren natürlich die Belegungen der festen Scheiben einander abgekehrt; und zur Befestigung der Hilfsconductoren war

eine Umführung um eins der beiden Scheibenpaare nöthig. Um einen Vergleich mit der Kaiser'schen Maschine zu ermöglichen, wurde eine besondere feste Scheibe an beiden Seiten belegt. Für den Vergleich mit der einfachen Maschine konnten die hinteren Enden der in den Ebonitsäulen befestigten Messingröhren, wie es übrigens auch für die zuletzt genannte Anordnung nöthig war, mit Kugeln verdeckt werden. Die einander zugekehrten Enden der Hauptconductoren waren stets mit solchen Kugeln, wie ich sie oben für die einfache Maschine empfohlen habe, geschlossen. Folgendes sind die Resultate der mit dem im Rede stehenden Apparat von Hrn. Borchardt und mir gemeinsam angestellten Versuche, wobei die quantitative Leistung der einfachen Maschine = 1 gesetzt und die Schlagweite in Millimetern ausgedrückt ist:

	Quantität	Schlagweite
Ein Scheibenpaar	1	250
Eine feste und 2 rot. Scheiben	2	260
2 feste und 2 rot. Scheiben mit innen liegenden Conductoren	$2\frac{3}{4}$	290
2 feste und 2 rot. Scheiben mit aufsen liegenden Conductoren	3	300

Zum bessern Verständnifs und zum Vergleich mit anderen Maschinen sey noch erwähnt, dafs die rotirenden Scheiben einen Durchmesser von 400^{mm}, die Spitzenreihen eine Länge von 92^{mm} und die Elektroden eine Gröfse von 28^{mm} hatten, dafs ferner die Bestimmung der Quantität bei einer Schlagweite von 100^{mm} durch einfaches Zählen der Condensatorentladungen innerhalb einer bestimmten Anzahl von Kurbelumdrehungen erfolgte.

Im theoretischen Interesse habe ich noch einige andere Versuche angestellt, über die ich in aller Kürze berichten möchte.

Wurde nur eine feste Scheibe angewandt, aber eine solche, welche nur einseitig belegt war, so zeigte sich ein interessantes Verhalten in der Anwendung der Hilfscon-

ductoren. Befanden sich nämlich die Belegungen an der hinteren Fläche, so durften nur die vorderen Hilfsconductoren benutzt werden, und umgekehrt nur die hinteren, wenn die Belegungen an der vorderen Fläche waren. Aehnlich verhielt es sich, wenn die Scheibe zwar an beiden Seiten belegt, die Belegungen der einen Seite aber länger waren, so daſs sie in circulärer Richtung diejenigen der anderen überragten, und hatte selbst ein Unterschied von 5^{mm} auf die besprochene Wirkung schon den gröſsten Einfluſs. In allen diesen Fällen wirkte die Maschine fast wie bei einer regelrecht belegten Scheibe, aber nur bis zu einer gewissen Schlagweite. Darüber hinaus pflegte die Wirkung plötzlich abzunehmen und war dann selbst durch gröſsere Annäherung der Elektroden nicht leicht wieder zu erneuern. Eine Umkehrung der Polarität fand bei einer regelrecht belegten festen Scheibe niemals statt. Aber auch bei zwei festen Scheiben fanden Umkehrungen viel seltener statt, als bei der einfachen Maschine, und zwar um so seltener, je näher einander die Scheibenpaare waren. Hiermit stimmt auch die Beobachtung, daſs die Schlagweite, welche sich ohne Hilfsconductoren erreichen lieſs, bei gröſserer Annäherung der Scheiben unverhältniſsmäſsig gröſser war. Eine sich aufhebende Wirkung der Scheibenpaare, wie sie leicht erfolgt, wenn man je zwei Conductoren zweier gesonderten Maschinen mit einander verbindet, und wären sie auch mit Hilfsconductoren der einen oder der andern Art armirt, habe ich im vorliegenden Falle niemals bemerkt. Ueber die Abhängigkeit der quantitativen und intensiven Wirkung von der Entfernung der Scheiben konnten nur beschränkte Versuche angestellt werden, da der Spielraum kaum 20^{mm} betrug, und lagen die Conductoren innen, überhaupt keine Variirung möglich war. Innerhalb dieser Gränzen konnte wohl in jedem Falle mit Zunahme der Entfernung eine Abnahme beider Wirkungen constatirt werden, die indessen nicht so bedeutend war, daſs man nicht, um andere Vortheile zu erreichen, die festen Scheiben um einige Milli-

meter von einander trennen dürfte. Dies würde nämlich die Erregungsweise der Maschine erleichtern und zugleich eine bessere Verstellung der Scheiben gestatten.

Ich bemerke noch, daſs man die Schlagweite einer jeden Maschine durch Schrägstellung der Hauptconductoren in demjenigen Sinne, daſs sie sich von den Hilfsconductoren entfernen, um Einiges vergröſsern kann. Dies Mittel, welches die zuletzt besprochene Befestigung derselben unmittelbar gestattet, wirkt natürlich nicht anders, als eine Verkürzung, und hat somit eine verhältniſsmäſsige Abnahme der Quantität zur Folge. An Maschinen, wo eine Schrägstellung nicht möglich, müſste man für den angedeuteten Zweck die Conductoren aus zwei in einander verschiebbaren Röhren bestehen lassen, um sie je nach Bedürfniſs verkürzen oder verlängern zu können.

3. Die Maschine mit zwei entgegengesetzt rotirenden Scheiben.

Die Maschine mit zwei entgegengesetzt rotirenden Scheiben in ihrer neuen Gestalt, wie ich sie zuletzt im Jahre 1869 gleichzeitig mit der einfachen Maschine durch eine Abbildung veranschaulichte, ist seitdem Gegenstand verschiedener Untersuchungen gewesen, von denen ich die beiden gröſseren Arbeiten Poggendorff's [1]), welche vorzugsweise der näheren Beleuchtung der Theorie dieser Maschine gewidmet waren, hier nur kurz erwähnen will. Etwas ausführlicher muſs ich mich über die angeblichen Verbesserungen verbreiten, welche Hr. Musäus in der Construction dieses Apparates vornehmen zu müssen glaubte [2]). Es war damals, als ich die Abbildungen der beiden Maschinen gab, meine Absicht, Construction, Gebrauch und Theorie derselben in einer gröſseren gemeinsamen Abhandlung zu besprechen; ich wurde jedoch, wie bereits erwähnt, durch Krankheit an der Ausführung dieser Aufgabe verhindert. In jener Absicht aber geschah es, daſs ich beide Maschinen möglichst ähnlich organisirte,

1) Pogg. Annal. Bd. 150 und Jahrgang 1874.

2) Pogg. Annal. Bd. 143, S. 282 und 285 und Bd. 146, S. 288.

damit dieselbe Construction zur Zusammenstellung beider Maschinen zu gebrauchen sey, um hierdurch zugleich die Anschaffung sowohl, als das theoretische Verständniſs derselben zu erleichtern. Der einzige Unterschied bestand nämlich darin, daſs die feste Scheibe der einen Maschine in der andern durch eine entgegengesetzt rotirende und durch ein hinteres Conductorenpaar vertreten wurde, was sich mittelst eines sehr einfachen von Hrn. Borchardt und mir gemeinsam erdachten Schnurlaufes bewerkstelligen lieſs. In der That hatte das erwähnte Conductorenpaar im Wesentlichen nur den Zweck, die hintere Scheibe an zwei Stellen constant entgegengesetzt elektrisch zu erhalten, so daſs diese Stellen auf die vorderen Hilfsconductoren ganz ähnlich wie zwei elektrische Papierstücke wirkten. Die vordere Scheibe muſste sich also hier gleichfalls mit entgegengesetzten Elektricitäten laden, und das Freiwerden dieser Ladung wurde durch den Umstand vermittelt, daſs die hintere Scheibe den Hauptconductoren gegenüber mit der vorderen gleichnamig elektrisch war. Dieser Umstand vertrat also gewissermaaſsen die Oeffnungen der festen Scheibe. Ich will hier gleich bemerken, daſs diese Anordnung zugleich diejenige ist, mit welcher sich die gröſste Funkenlänge erzielen läſst, und daſs diese Funkenlänge derjenigen der einfachen Maschine gleich kommt. Etwas anders verhält es sich mit der quantitativen Wirkung.

Es ist eine Täuschung, wenn man glaubt, daſs im Schlieſsungsbogen bei dem fraglichen Arrangement ganz allein die Elektricität der vorderen Scheibe zur Geltung gelangt, so wenig, als bei der Reibzeugmaschine unter Benutzung einseitiger Aufsauger nur die Elektricität der einen Glasfläche ihre Wirkung äuſsert; vielmehr kommt durch Influenz auch die Ladung der hintern Fläche dem betreffenden Conductor mehr oder weniger zu Gute, und zwar um so mehr, je dünner die trennende Schicht des Isolators respective der Isolatoren ist. Ist also die Construction der Maschine regelrecht d. h. sind beide rotirende

Scheiben möglichst dünn und einander möglichst nahe, so kann die Anwendung von 4 Hauptconductoren oder die Hinzufügung von 2 hinteren, welche nach Musäus' Angabe den vordern gegenüberstehen und mit denselben leitend verbunden sind, wohl die Quantität in Etwas erhöhen, aber keineswegs wie Derselbe anfangs meinte, verdoppeln. Ich hätte jedoch mit Rücksicht auf diese mir wohl bekannte Wirkung gewiſs schon damals die Hinzufügung jener beiden hintern Conductoren empfohlen, wenn die besprochene, beiden Maschinen angepaſste Form dies ohne groſse Umständlichkeiten gestattet hätte, und wenn ich nicht, wie bemerkt, aus theoretischen Gründen die vordere Scheibe möglichst unabhängig von der hinteren wirken lassen wollte. Herr Musäus hat später die 4 Hauptconductoren gegen einander verschoben und die Bemerkung gemacht, daſs hierdurch die Quantität noch viel bedeutender, diesmal aber auf Kosten der Intensität verstärkt werden könne. Aber auch diese Entdeckung war gewissermaſsen eine Täuschung, insofern durch diese Anordnung keine andere Form geschaffen wurde, als diejenige, welche ich bereits in meinem ersten Aufsatz über die vorstehende Maschine als für den quantitativen Effect am meisten geeignet empfahl[1]), wie Herr Prof. Poggendorff dies auch in seiner Kritik der Musäus'schen Anordnung, wenn auch nur kurz, anzudeuten scheint[2]). Es ist klar, daſs, wenn man 4 Conductoren in den Schlieſsungsbogen schaltet, welche gleichzeitig Ladungs- und Entladungsconductoren sind, die Stromstärke viel bedeutender ist, als wenn nur 2 solcher Conductoren wirken, oder 4, welche jedoch nur Entladungsconductoren sind. Sollen jedoch 4 Conductoren gleichzeitig als Ladungs- und Entladungsconductoren benutzt werden, was neben einer verhältniſsmäſsig geringen Schlagweite noch den Uebelstand mit sich führt, daſs sich der Strom leicht ganz verliert, so ist es jedenfalls richtiger, wie ich es in jener meiner

1) Pogg. Annal. Bd. 130, S. 168.
2) Pogg. Annal. Bd. 150, S. 14.

ersten Arbeit vorschlug, sie in abwechselnder Reihenfolge vor und hinter den Scheiben in gleichen Intervallen zu vertheilen und alle übrigen Conductoren als überflüssig zu entfernen. Denn mit 8 Conductoren in der zuletzt besprochenen Musäus'schen Anordnung kann keine gröfsere Quantität erreicht werden, als wenn nur 4 in der angedeuteten Weise vertheilt und ordnungsmäfsig combinirt sind. Wohl aber läfst sich mit 8 Conductoren noch eine viel gröfsere Stromstärke erzielen, wenn man alle zugleich als Ladungs- und Entladungsconductoren wirken läfst, wenn man sie nämlich in abwechselnder Reihenfolge vor und hinter den Scheiben vertheilt, immer je zwei auf einanderfolgende verbindet, von diesen 4 Verbindungen wieder je zwei gegenüberliegende combinirt und von hier aus Leitungen nach den Polen führt.

Für die besprochenen verschiedenen Anordnungen, welche sich, wenn auch ohne praktischen Vortheil noch bedeutend vervielfältigen lassen, ist die horizontale Lage der Scheiben viel geeigneter, als die verticale, wie man z. B. bei jener ersten Maschine nur die beiden den Schnurscheiben zunächst befindlichen Conductoren einfach zu verbinden braucht, um die beiden andern nur als Entladungsconductoren d. h. mit verringerter quantitativer, aber erhöhter intensiver Kraft wirken zu lassen. Wenn ich trotzdem von der horizontalen Lage abging, so geschah es vorzugsweise der Raumersparnifs, der gröferen Uebersichtlichkeit und der bequemeren Handhabung der Entladungsstangen wegen, und da diese Gründe allerdings wesentlich sind, so habe ich mich bemüht, eine Construction zu ersinnen, welche auch bei vertikaler Lage der Scheiben alle nur möglichen Combinationen leicht gestattet.

Diese Construction ist darauf basirt, dafs an der vorderen Seite des Holzständers zwei grofse unabhängig von einander mit der nöthigen Reibung drehbare Ebonitscheiben sitzen, deren jede an ihrer Peripherie 4 gleichmäfsig vertheilte in radialer Richtung laufende Messingröhren trägt, welche so lang sind, dafs ihre freien mit Kugeln besetzten

Enden den Durchmesser der Glasscheiben etwas überragen. Von diesen Kugeln gehen nach vorne ebensoviele horizontal und parallel gerichtete Röhren aus, welche lang genug sind, um an ihnen die nöthigen Conductoren, sowohl vor, als hinter den Scheiben, drehbar und zugleich verschiebbar befestigen zu können. Auf diese Weise sind nicht nur alle möglichen Verstellungen der Conductoren gestattet, sondern sie lassen sich auch nach Wunsch, sey es für sich allein, sey es sammt ihren Trägern durch Umdrehen oder Abziehen völlig eliminiren. Die nöthigen Verbindungen aber können unmittelbar an oder in der Nähe der Ebonitscheiben bewirkt werden und stören somit den Ueberblick über die in Action befindlichen Stücke nicht. Damit ferner der Schnurlauf für die Verstellung der Conductoren in keiner Weise hinderlich sey, befinden sich die kleinen Schnurräder hinter dem Ständer, was nur dadurch möglich ist, daſs die rotirenden Axen respective Hülsen nicht auf einem Zapfen, sondern selbst in einer den Ständer durchbrechenden Hülse laufen, welche vor demselben eben jene erwähnten Ebonitscheiben trägt. Die Kugeln aber, in welchen sich die Entladungsstangen verschieben, haben ihre besondern Ständer, welche mittelst einer geeigneten Vorrichtung auf der Unterlage dergestalt zu verrücken sind, daſs man sie behufs bequemer Verbindung mit den betreffenden Conductoren einander nähern oder von einander entfernen kann.

Da die vorstehende Einrichtung, welche ich nur flüchtig skizzirt, jedoch Manchem zu complicirt, vielleicht auch in ihrer Anschaffung zu theuer erscheinen möchte, so habe ich die frühere Maschine mit verticaler Scheibenlage ein wenig dadurch modificirt, daſs ich die Einrichtung getroffen habe, sie mit leichter Mühe sowohl mit 6 als mit 8 Conductoren gebrauchen zu können, jedoch nur so, daſs die 4 stromgebenden Conductoren, Entladungsconductoren sind. Dies ist einfach dadurch bewirkt, daſs ich die Ebonitsäulen, genau, wie bei der oben beschriebenen Doppelmaschine, einwenig nach vorne und zugleich soweit

nach aufsen rückte, dafs die durch ihre Köpfe laufenden Röhren, welche vorne die Entladungsstangen, hinten die Conductoren tragen, noch etwa 15^{mm} vom Glasrande abstehen. Die Conductoren sind drehbar und gleichzeitig verschiebbar, und sollen die hintern entfernt werden, was die Funkenlänge einwenig erhöht, die Quantität einwenig verringert, so braucht man nur das freigewordene Rohrende mit einer Kugel zu verdecken. Etwas umständlicher ist es, 4 Conductoren, welche zugleich Ladungs- und Entladungsconductoren sind, in den Schliefsungsbogen zu schalten. Für diesen Zweck besteht das hintere Conductorenpaar aus zwei wohl von einander isolirten Stücken. Die hinteren Hauptconductoren werden entfernt, desgleichen die vorderen Nebenconductoren. Die vorderen Hauptconductoren aber werden dergestalt mit jenen getrennten Stücken verbunden, dafs je nach der Rotationsrichtung der Scheiben die Wirkung sich nicht in diesen Verbindungen aufhebt. Letztere sind mit Hülfe der als Verschlufsstück dienenden, entsprechend durchbohrten Kugel sehr leicht zu gewinnen. Andere Combinationen aber sind bei der vorstehenden Construction nicht gut anwendbar. Herr Musäus benutzt zur Haltung der Hauptconductoren ein längliches Ebonitstück, welches zugleich die Kugeln mit den Entladungsstangen trägt und welches, wie sonst die Hilfsconductoren, mittelst eines Stifts in dem vorderen Ende des mittleren Stahlzapfens befestigt wird. Dies mag insofern einfacher scheinen, als es die Ebonitsäulen entbehrlich macht, ich meine jedoch, dafs diese Art der Befestigung nicht stabil genug ist.

Eine dritte angebliche Verbesserung des Hrn. Musäus endlich betrifft die Erregung der Maschine mittelst eines kleinen durch eine isolirende Handhabe an eine der Glasflächen zu haltenden amalgamirten Kissens, welches nach Analogie der Kundt'schen Reibzeug-Influenzmaschine wirkt. Für unlackirte Scheiben mag dies ganz zweckmäfsig sein, wenn die Amalgamirung derart, dafs sich weder Fett noch leitende Theile an die Glasfläche setzen. Lackirte

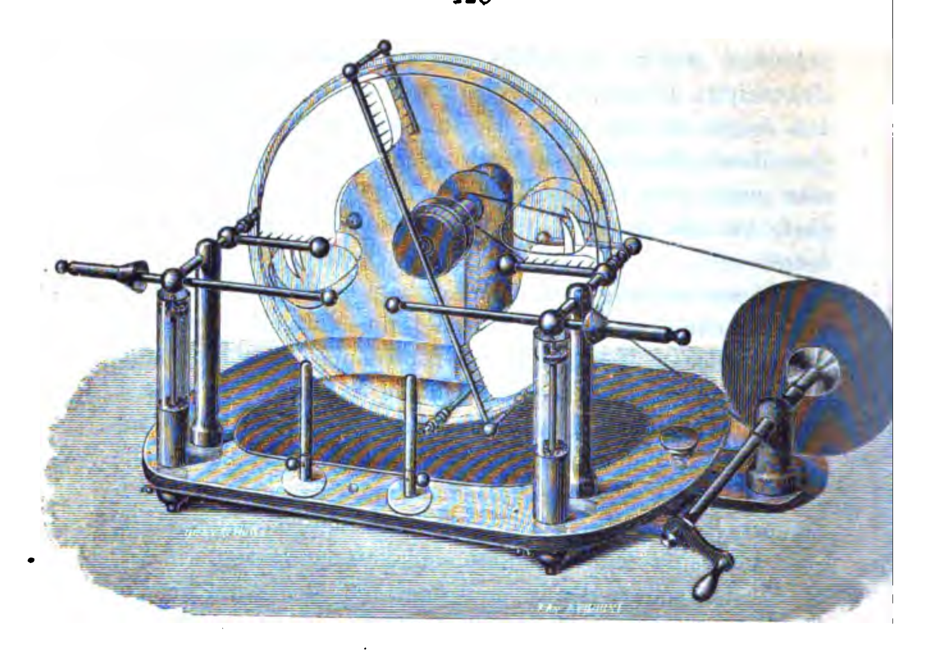
Scheiben werden jedenfalls besser mittelst einer vorher elektrisirten Ebonitplatte erregt, und meine ich überhaupt, dafs es für die Erklärung der Influenzmaschinen, von welcher Beschaffenheit diese auch seien, instructiver ist, wenn man zeigt, dafs es nur einer momentanen Einwirkung bedarf, um sie dauernd in elektromotorische Thätigkeit zu setzen.

Es sei beiläufig erwähnt, dafs man auch der vorstehenden Maschine, wie jeder andern Influenzmaschine, ein der ursprünglichen Töpler'schen Anordnung entsprechendes Gewand geben kann, wenn man die Scheiben mit schmalen, radial laufenden Stanniolstreifen belegt und die Conductoren durch schleifende Federn ersetzt. Auch für diese Maschine bedarf es alsdann keines Erregers, sondern sie erregt sich nach wenigen Umdrehungen von selbst, aber Intensität und Quantität sind äufserst gering.

Es ist selbstredend, dafs auch bei der vorstehenden Maschine, wenn man das Maximum der Funkenlänge erreichen will, die Holzplatte mit einem möglichst grofsen Ebonitstück zu bedecken und die einander zugekehrten Enden der Hauptconductoren mit ähnlichen Kugeln zu versehen sind, wie ich sie für die einfache und für die Doppelmaschine empfohlen habe.

Nachtrag.

Indem ich der vorstehenden Mittheilung hier nachträglich die Abbildung einer von mir construirten Doppelmaschine mit aufsen liegenden Conductoren und innen liegenden festen Scheiben (die Abbildung einer eben solchen Maschine mit innen liegenden Conductoren und aufsen liegenden festen Scheiben soll an einer späteren Stelle folgen) hinzufüge, welche im Wesentlichen nach den zur Sprache gebrachten Principien vollkommen verständlich sein wird, möchte ich nur noch einige Worte über die Haltung der festen Scheiben und der Hülfsconductoren sagen.



Zur Haltung und Verstellung der festen Scheiben dienten ursprünglich, wie angegeben ist, verschiebbare Rollen, an ihrer Peripherie mit Nuten zur Aufnahme des Glasrandes versehen. An einer Stelle war jede Rolle bis auf den Grund der Nute abgefeilt, um die Scheiben leichter einsetzen und herausnehmen zu können. Die Rollen bestanden aus Ebonit oder einer im Handel gangbaren zwischen Ebonit und Weichgummi stehenden festen Gummimasse. Man kann solche mit Nuten versehene Rollen aber auch durch die doppelte Zahl von einfachen Gummiringen ersetzen, wenn die Röhren, auf welchen sich dieselben verschieben, den Scheiben hinreichend nahe gerückt werden, indem man den Glasrand nämlich zwischen zwei solche Ringe einklemmt. Solche Ringe sind in Form eines runden in sich zurückkehrenden Stabes aus vulkanisirtem Gummi im Handel vertreten, und diese Methode der Befestigung ist daher, ich will nicht sagen die beste, aber die einfachste, und aus diesem Grunde habe ich sie für die Abbildung gewählt.

Die Haltung der Nebenconductoren läſst sich auf 4 verschiedene Weisen bewirken.

1) Sie können hinter und vor den Scheiben befestigt, die hinteren aber von den vorderen getrennt seyn. Diese Methode entspricht derjenigen, welche ich zuerst für die Maschine mit zwei entgegengesetzt rotirenden Scheiben in Anwendung brachte, und sie ist die geeignetste, wenn man die Theorie der Doppelmaschine studiren will, weil sie jede beliebige Stellung der betreffenden Conductoren gestattet.

2) Sie können hinter und vor den Scheiben befestigt, die hinteren aber mit den vorderen vereint seyn.

3) Sie können nur hinter den Scheiben befestigt und müssen dann mit einander vereint seyn.

4) Sie können nur vor den Scheiben befestigt und müssen dann gleichfalls mit einander vereint seyn.

In den drei letzten Fällen geschieht die Vereinigung beider durch horizontale Messingröhren, welche über den Rand der festen Scheiben laufen und aus zwei in einander verschiebbaren Theilen bestehen, um die einen unabhängig von den andern der betreffenden Glasfläche nähern oder von derselben entfernen oder ganz von einander trennen zu können, wenn man die Scheiben herausnehmen will.

Ich habe für die Abbildung von allen Methoden die letzte gewählt, weil sie die einfachste ist und sich zugleich am meisten der Einrichtung der einfachen Maschine nähert. Sie ist aber auch für den praktischen Gebrauch insofern die günstigste, als sie am besten die Isolirung der betreffenden Conductoren gestattet. Daſs diese Isolirung nur für den Fall Bedeutung hat, wo der eine der Hauptconductoren abgeleitet wird, ist selbstverständlich; wie nothwendig dieselbe aber alsdann ist, davon kann man sich leicht an jeder einfachen Maschine überzeugen, wenn man unter constanter Ableitung des einen Pols die Schlagweiten mit einander vergleicht, welche man erhält, wenn man den diametralen Conductor entweder gleichzeitig ableitet, oder isolirt läſst.

Dafs die Isolirung eine gröfsere Schlagweite liefern mufs, folgt übrigens unmittelbar aus der Thatsache (von der sich Jeder leicht mit Hilfe eines Probirstäbchens und eines Elektroskops überzeugen kann), dafs bei Ableitung des einen Pols an dem diametralen Conductor sofort freie Elektricität auftritt, welche mit derjenigen des nicht abgeleiteten Pols gleichnamig ist. Denn so lange diese Elektricität dem diametralen Conductor erhalten bleibt, wird eine Ausgleichung zwischen diesem und dem gleichnamig elektrischen Pole ungleich schwieriger seyn, als wenn dieselbe abgeleitet wird.

Um Mifsverständnissen vorzubeugen, möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dafs alle hinter den Scheiben befindlichen Kugeln genau so grofs seyn sollen, wie die entsprechend gelegenen vor den Scheiben; dafs ferner die beiden Scheibenpaare nicht ganz soweit von einander getrennt sind, als dies die Abbildung der bessern Uebersicht wegen zeigt.

Auch mag bemerkt werden, dafs die Doppelzahl der Papierspitzen keine Nothwendigkeit ist, wenn die Scheibenpaare entweder einander ganz nahe gerückt werden, oder man auf andere Weise dafür sorgt, dafs die sich deckenden Belegungen mit einander in leitender Verbindung sind.

Schliefslich darf ich nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dafs eine Doppelmaschine mit derselben Scheibenzahl und derselben Scheibenlage, wie sie die vor stehende Abbildung zeigt, aber mit durchgehender Axe und ohne die diametralen Conductoren bereits im Jahre 1870 von Hrn. Prof. Carl in München zur Ausführung gebracht und in dessen Repertorium für Experimental-Physik. Bd. 6, S. 129 beschrieben ist. Bei Abfassung der obigen Mittheilung war mir dies nicht bekannt, da mir das genannte Werk erst seit Kurzem zugänglich geworden ist. Andernfalls würde ich jene Construction natürlicher Weise berücksichtigt, trotzdem aber keinen Anstand genommen haben, meine Erfahrungen zu veröffentlichen, da der Schwerpunkt derselben weniger in der Zahl und Lage

der Scheiben, als vielmehr in der Constatirung und Begründung der Thatsache liegt, daſs gerade durch die Annäherung der Scheibenpaare in Folge ihrer gegenseitigen Einwirkung ein ganz neues Moment der Verstärkung zur Geltung gelangt, und daſs Doppelmaschinen bei geeigneter Construction nicht nur die doppelte, sondern die dreifache Elektricitätsmenge einer einfachen Maschine liefern können — eine Thatsache, welche Hrn. Prof. Carl sowohl, als anderen Physikern bisher entging, und welche auch nur durch vergleichende Versuche mit Maschinen derselben Gröſse, aber variabler Scheibenzahl und Scheibenlage constatirt werden konnte. Uebrigens weicht bereits diejenige meiner Constructionen, welche die Abbildung veranschaulicht, in so vielen und wesentlichen Punkten von derjenigen des Hrn. Prof. Carl ab, daſs ich sie füglich als eine neue bezeichnen kann; noch mehr aber dürfte dies von jener zweiten Construction mit auſsen liegenden festen Scheiben und innen liegenden Conductoren gelten.

III. *Ueber die neueste Form der einfachen Influenzmaschine und ihren Gebrauch; von W. Holtz.*

In meiner letzten Mittheilung über Influenzmaschinen habe ich einiger Neuerungen gedacht, durch welche die Schlagweite der einfachen Maschine nicht unwesentlich verbessert ist. Ich erwähnte, daſs ich die innern Enden der horizontalen Einsauger mit Kugeln versehen, daſs ich die Oeffnungen der festen Scheibe und diese selbst vergröſsert, daſs ich das Ebonitstück, welches jener zur Unterlage dient, im Holzständer verstellbar gemacht, daſs ich das Brett mit einer gröſsern Ebonitplatte bedeckt, daſs ich die Pole weiter nach vorne und gleichzeitig weiter von einander gerückt, daſs ich die Kurbelwelle tiefer gelegt

und mehr von der Maschine entfernt hätte. Ich bemerkte jedoch zugleich, daſs ich, um die mechanische Ausführung zu vereinfachen, vermuthlich auch die bisherige Befestigung der Hauptconductoren verändern würde. Dies ist inzwischen geschehen, auch habe ich für den experimentellen Gebrauch einige Erleichterungen getroffen, desgleichen der Maschine einige Nebenapparate hinzugefügt. Diese letzten Verbesserungen möchte ich nun ausführlicher beschreiben und hieran eine kurze Gebrauchsanweisung reihen. Die beigegebene Figurentafel (II) aber mag dieser und zugleich der früheren Mittheilung zur Erläuterung dienen.

Fig. 5 zeigt die Maschine in ihrer neuen Gestalt und zugleich in ihrer gebräuchlichsten Form der Anwendung.

Die Hauptconductoren werden von Ebonitsäulen getragen, welche nicht drehbar, wie früher, sondern mittelst eines verschraubbaren Stücks und zweier Stifte, wie Fig. 12 deutlicher zeigt, befestigt sind. Dafür ist, um die rotirende Scheibe leicht einsetzen und entfernen zu können, ein Theil der Conductoren selber drehbar gemacht. Dieser Theil ist nicht etwa die im Kopf der Ebonitsäulen steckende Röhre, vielmehr eine andere, welche sich in letzterer verschiebt, und sie ist es, welche an ihrem hintern Ende den von Kugeln begrenzten Einsauger trägt. Der Einsauger läſst sich also der rotirenden Scheibe beliebig nähern, aber auch (siehe Fig. 3 und 12) beliebig um seinen Befestigungspunkt drehen, und diese Drehung ist nicht nur für die Herausnahme der Scheiben, sondern, wie ich am Schlusse zeigen werde, auch für die Wirkung der Maschine von Bedeutung. Um die feste Scheibe nach vorne zu stützen und gleichzeitig ihre Entfernung von der beweglichen zu regeln, ist die Kugel, um welche sich der Einsauger dreht, an ihrer inneren, hinteren Wandung verstärkt, und in dieser Verstärkung ist ein Ebonitstift (Fig. 7) durch Drehung eines auf demselben festgesetzten Scheibchens verschraubbar. Dasselbe Ziel könnte auch noch auf andere Weise erreicht werden. Wollte man nämlich die verschiebbare Röhre ausschlieſsen, so könnte man die Kugel

selbst aut der festen Röhre verschiebbar und den Ebonitstift (Fig. 8 Taf. VI) in eben dieser Röhre verschraubbar machen. Wollte man den verschraubbaren Ebonitstift ausschliessen, so könnte man bei Anwendung einer verschiebbaren Röhre die Kugel auf dieser verschiebbar machen. Beides scheint wohl einfacher, ist es jedoch in Wirklichkeit nicht, da es einer sehr exacten Arbeit bedarf, wenn die Kugel bei ihrer Beweglichkeit zugleich dem Uebergewicht des Einsaugers Widerstand bieten soll.

Der groſse Abstand der beiden Pole von einander ist einerseits mit Rücksicht auf die verbesserte Schlagweite, andrerseits mit Rücksicht auf die Anwendung gewisser Elektroden geboten. Ein gröſserer scheint mir vor der Hand kein Bedürfniſs. Sollte man trotzdem einen solchen wünschen, so könnte man die Ebonitsäulen leicht noch so weit auseinander rücken, daſs die verschiebbare Röhre in ihrer gedachten Verlängerung den Rand der festen Scheibe streifte, und zur Haltung dieser alsdann an Stelle des verschraubbaren Ebonitstifts ein dickeres, längeres Stäbchen mit verschiebbaren Gummiringen versehen, benutzen — eine Anordnung, welche zugleich jene hintere Ebonitstrebe, welche das Rollen der Scheibe hindern soll, entbehrlich machen würde. Ein groſser Abstand der Pole bedingt jedoch eine entsprechende Verlängerung der Entladungsstangen, und diese ist aus verschiedenen Gründen unbequem. Vor allem jedoch müssen die Kugeln, in welchen jene verschiebbar sind, gleichzeitig vergröſsert werden, damit ihre Führung eine sichere bleibt. Deshalb sind diese Kugeln bei der neuen Construction gröſser, als früher, und sie sind es noch mehr, als die Abbildung es erkennen läſst. Sie sind nämlich in Wirklichkeit ein gut Theil gröſser als die Kugeln der Einsauger, welche ihrerseits so groſs sind, daſs sie die rotirende Scheibe fast berühren.

Obwohl die Führung und die Verstellung der Kurbelwelle neuerdings nicht wesentlich verändert ist, so möchte ich doch hierüber einige Worte sagen, weil dies früher von mir versäumt wurde, und der Anblick der Figur die

Einrichtung nicht deutlich erkennen läfst. Die fragliche Welle nämlich dreht sich nicht etwa in dem betreffenden Holzständer selbst, auch nicht in der kurzen Ebonitröhre, welche im Kopfe desselben steckt, sondern in einer von letzterer eingeschlossenen Messingröhre, welche von der Kurbel bis zum Schnurrade reichend an ihren Enden mit eingelötheten Rothgufshülsen versehen ist. Die Ebonitröhre hat den Zweck, das ganze System zu isoliren, weshalb auch die Kurbel, sey es ganz, sey es theilweise aus Ebonit besteht, eine Vorsicht, welche für den Fall wenigstens, wo die Schnur nicht aus Seide, sondern Hanf gewählt wird, geboten erscheint. Die Verstellung der Welle geschieht mit Hilfe einer verschiebbaren Leiste und eines durch den Schlitz dieser und durch das Brett reichenden eisernen Bolzens. Das untere Ende des letzteren ist in einen federnden Metallstreifen verschraubbar, so dafs man durch Drehung diesen und mit diesem zugleich die Leiste heben oder senken kann. Das obere Ende des Bolzens steckt in einem Kopfstück aus Ebonit, welches zur Vermeidung elektrischer Verluste nur bis auf die Hälfte durchbohrt ist. Fig. 13 Taf. VI zeigt die betreffenden Theile im Durchschnitt.

Die leitende Verbindung zwischen den äufsern Belegungen der Condensatoren war bisher eine feste. Ich habe sie, damit man sie nach Bedürfnifs leicht aufheben, oder durch verschiedene Leitungen ersetzen könne, zu einer wandelbaren gemacht. Ist das Verbindungsstück ein Draht (Fig. 14), so liefert die Maschine helle, knallende Funken. Sollen schwach leuchtende, gefärbte, puffende erzeugt werden, so ersetzt man jenen durch eine feuchte Schnur (Fig. 15) Am einfachsten ist es, diese ein für alle Mal an ihrer Stelle zu lassen und den Draht nur abzuheben, wenn die verzögerte Entladungsform eintreten soll. Will man aber büschelartige, knarrende, oder sogenannte todte Funken hervorbringen, so läfst man beide Verbindungsstücke fehlen, so dafs nur das Brett die fragliche Leitung vermittelt. Vielleicht interessirt es Manchen,

an Stelle der bezeichneten Widerstände auch spiralförmige Drähte, oder eine zwischen Leiter eingeschaltete Flamme, oder eine von solchen begrenzte gewöhnliche Luftstrecke in Anwendung zu bringen. Auf analoge Weise verfährt man, wenn man in andern zwischen die Elektroden eingeschalteten Körpern die Wirkung verschiedener Entladungsformen prüfen will. Sind diese, wie z. B. eine Geifsler'sche Röhre, oder der menschliche Körper bessere Leiter, so darf man dieselben natürlich nicht direct mit den Elektroden verbinden, man mufs sie vielmehr dem Einschaltungsapparate einfügen und die Gröfse der gleichzeitig einzuschaltenden Luftstrecke durch Verschiebung seiner Hülsen variiren. Man kann aber auch in allen diesen Fällen umgekehrt verfahren, d. h. den etwaigen Widerstand dem Einschaltungsapparate, den fraglichen Körper dagegen oder die zu beobachtende Luftstrecke der untern Schliefsung einverleiben, vorausgesetzt, dafs die hier stattfindende alternirende Elektricitätsbewegung nicht stört, oder wenn man vielleicht gerade eine solche untersuchen will. Um aber dem Einschaltungsapparat oder der untern Schliefsung eine variable Luftstrecke einzufügen, ist eine auch sonst verwendbare kleine Entladungsvorrichtung bequem, welche aus einer Ebonitplatte mit zwei senkrecht stehenden Messingsäulchen besteht, die mit kleinen Entladungsstangen und, zur Einschaltung von Drähten, mit den nöthigen Löchern und Klemmschrauben versehen sind.

Als Condensatoren empfehle ich ein paar kleine und ein paar grofse Gläser, d. h. solche von kleinem und von grofsem Umfange, wie in Fig. 5 und 14, und von gleich kurzer metallischer Belegung, um mit beiden das Maximum der Schlagweite zu erreichen. Mehr als ein Paar kann man freilich nicht gleichzeitig placiren, sonst müfste man schon die oben angedeutete, der Doppelmaschine analoge, Stellung der Conductoren wählen, und, diese nach hinten verlängernd, zu beiden Seiten des Holzständers zwei neue Pole schaffen. Für gröfsere Elektricitätsmengen müssen daher regelrechter Leydener Flaschen be-

nutzt, neben der Maschine aufgestellt und entsprechend mit einander und den Polen verbunden werden. Wer sich keine Doppelbatterie anschaffen will, dem empfehle ich für diesen Zweck zwei grofse, d. h. vorzugsweise hohe Flaschen von starkem Glase und so kurzer metallischer Belegung, dafs der unbelegte Theil gleich demjenigen der Condensatoren ist. Es wäre in mancher Beziehung von Interesse, wenn man Verstärkungsapparate besäfse, deren Capacität sich durch Annäherung oder Entfernung der geladenen Flächen variiren liefse. Der bekannte Scheibencondensator, welcher dies gestattet, ist nur bei sehr geringer Dichtigkeit brauchbar. Nach Analogie desselben aber liefse sich vielleicht aus grofsen verstellbaren Hohlscheiben oder Winter'schen Ringen ein Apparat gewinnen, welcher dem vorliegenden Zwecke entspräche. Ich bin mit Versuchen dieser Art beschäftigt und werde seiner Zeit darüber berichten. Wen es jedoch interessirt, die condensirende Wirkung zweier kleineren Hohlscheiben, wie ich solche weiter unten gelegentlich der Elektroden bespreche, zu prüfen, mag dies am einfachsten in folgender Weise anstellen. Man befestigt entweder die Scheiben an Stelle der Elektroden und richtet mit Hilfe des Einschaltungsapparats, oder auf andere Weise eine zweite Schliefsung her, in welcher der Entladungseffect beobachtet werden soll. Oder man ersetzt die linke Entladungsstange durch eine einfache Röhre, deren inneres Ende man, wie gewöhnlich, mit der betreffenden Elektrode versieht, während man das äufsere mit einer der Scheiben armirt und dieser mit Hilfe eines Stativs die andre Scheibe gegenüber stellt. In beiden Fällen läfst sich der Abstand der Scheiben unabhängig von der Funkenstrecke variiren, aber es darf natürlich nur ein solcher gewählt werden, bei welchem keine Ausgleichung zwischen ihnen statt hat.

Der Einschaltungsapparat ist bei der neuen Construction insofern ein wenig verändert, als die Isolirungsstücke der Messingcylinder eine andere Form erhalten haben. Aus den cylindrischen Untersätzen sind flache Scheiben

geworden, welche, wie früher, im Innern des Bretts in kurze cylindrische Stangen endigen. Beide Theile müssen jedoch aus einem Stück geformt und dürfen natürlich nicht vollkommen durchbohrt seyn. Die Scheiben haben die Dicke der gröſsern Ebonitplatte, welche das Brett bedeckt, und sie sind deshalb so dünn gewählt, damit sie nicht hinderlich sind, wenn man unterhalb der Elektroden, nach Entfernung der Messingcylinder, irgend ein Stativ aufstellen will. Der Einschaltungsapparat kann jedoch selbst als Theil eines Stativs benutzt werden, wenn man demselben eine starke Ebonitplatte von beliebiger Form mit für die verschiebbaren Hülsen passenden Vertiefungen hinzufügt und die Platte womöglich noch mit andern conischen Oeffnungen zur Befestigung von Metall- oder Ebonitstangen versieht. Als besonders bequem und stabil jedoch möchte ich ein anderes Stativ empfehlen, für welches die inmitten des Einschaltungsapparats sichtbare Oeffnung im Brett bestimmt ist. Dasselbe besteht aus einer Ebonitröhre, in welcher sich eine Ebonitstange verschieben und mittelst einer Druckschraube feststellen läſst. Die Röhre ist unmittelbar oberhalb des Bretts mit einer ringförmigen Verstärkung, unterhalb desselben mit Gewinde und Mutter versehen. Der Stab hat an seinem obern Ende eine conische Vertiefung, in welcher unter verschiedenen Einsatzstücken auch der Zapfen eines Ebonittellers paſst, der seinerseits wieder zur Befestigung anderer Stücke in verschiedenem Abstande vom Centrum mit conischen Oeffnungen bedacht ist. Diese Oeffnungen müssen unter sich gleich und gleich derjenigen des Stabes seyn, damit etwaige Einsatzstücke hier wie dort zu verwenden sind. Als solche werden ein zugespitzter Stahldraht für Rotationsversuche, zwei gabelförmige Ebonitstützen, um einen Gegenstand horizontal zu befestigen, ein rechtwinklig gebogenes Messing- oder Ebonitstäbchen zum Aufhängen leicht beweglicher Körperchen die gebräuchlichsten seyn. Ein gut zu verwerthendes Einsatzstück aber ist noch eine Messingkugel mit Zapfen, welche seitlich, d. h.

in horizontaler Richtung durchbohrt ist und zwar solcher Gestalt, daſs sich kürzere oder längere Röhren von der Stärke der Entladungsstangen darin verschieben lassen. Die Enden dieser Röhren sind zur Befestigung von Kugeln oder Hohlscheiben bestimmt und müssen deshalb, wie die Entladungsstangen selbst, schwach conisch verjüngt seyn. Damit das Stativ, namentlich mit dem zuletzt genannten Einsatzstücke, auch auſserhalb der Maschine zu gebrauchen sey, gehört zu demselben noch ein Holzfuſs, dessen Dicke so zu wählen ist, daſs man die Kugel bequem in die Höhe der Entladungsstangen bringen kann.

Zur bessern Variirung der verschiedenen Entladungseffecte, vornehmlich der Lichterscheinungen in der Luft ist eine gröſsere Auswahl von Elektroden erforderlich, welche man der Form nach in Spitzen-, Kugel- und Scheibenelektroden sondern kann. Die Entladungsstangen sind an und für sich schon mit Spitzen armirt, die am besten einem Winkel von 60° entsprechen. Wünscht man andere Spitzen, so müssen solche in kurze Röhrenstücke gesetzt werden, welche über jene Stangen verschiebbar sind. Um die Wirkung stumpferer Spitzen nachzuahmen, kann man einem derartigen Röhrenstück ein halbkugelförmiges Ende und diesem eine solche Oeffnung geben, daſs die Spitze der Entladungsstange mehr oder weniger aus derselben hervor tritt. Ein anderes ebenso geformtes Röhrenstück, dem die fragliche Oeffnung fehlt, würde der Wirkung einer sehr kleinen Kugel entsprechen. Die Kugelelektroden werden conisch befestigt. Die kleineren von ihnen sind hohl gegossen mit einer innern Verstärkung an derjenigen Stelle, wo sich die conische Oeffnung befindet, während die gröſseren bekanntlich aus gedrückten Halbkugeln zusammengesetzt und der Stabilität halber mit einer eingelötheten Röhre versehen sind. Man muſs auſser denjenigen, welche dem Maximum der Schlagweite entsprechen, mindestens noch ein Paar gröſsere und noch eine Kugel von dem dreifachen Durchmesser der ersteren besitzen, um die wesentlichsten Erscheinungen hervorrufen zu kön-

nen. Wer sich mehr für die Sache interessirt, mag noch einige andere Gröfsen hinzufügen, namentlich eine kleinere Sorte für den etwaigen Gebrauch einer festen Scheibe mit vier Belegungen. Die Scheibenelektroden sind Hohlscheiben mit halbrundem Rande und von solcher Dicke, dafs an diesem Rande keine elektrische Ausströmung erfolgen kann. Sie werden wie Hohlkugeln gearbeitet, aber ihre Zusammensetzung erfordert um so gröfsere Sorgfalt, als sich die Naht gerade an einer Stelle befindet, wo die Neigung zur Ausströmung am gröfsten ist. Diese Naht darf daher an keiner Stelle irgend welche Unebenheiten zeigen, auch darf sich die axial eingelöthete Röhre nicht an der betreffenden Fläche markiren. Zur besseren Variirung der Erscheinungen möchte ich die Anschaffung zweier Scheiben verschiedenen Durchmessers vorschlagen, von welchen der gröfsere durch die Entfernung zwischen Einsauger und Entladungsstange bedingt ist. Solche Scheiben sind beiläufig bemerkt auch für andere Zwecke brauchbar, z. B. als Deckel eines Elektrophors, oder als Teller für ein isolirendes Stativ. Dafs man zwei Scheiben auch als Verstärkungsapparat benutzen kann, habe ich oben bereits erwähnt; für diesen Zweck aber müssen sie von gleicher Gröfse seyn. Eine Serie verschiedener Elektroden ist in den Figuren 9, 10 und 11 dargestellt; die abgebildete Scheibe jedoch hat zwei Fehler, sie ist einmal verhältnifsmäfsig zu dünn, dann sollte die Röhre, vermittelst deren sie befestigt ist, besser nicht äufserlich hervortreten, um die Entladungsstange möglichst weit zurückziehen zu können. Zur bessern Orientirung möchte ich anführen, dafs eine 400^{mm} grofse rotirende Scheibe mit Kugelelektroden von 25^{mm} Durchmesser die gröfste Funkenlänge liefert, während die dazu gehörigen Scheibenelektroden eine Dicke von 27—30^{mm} beanspruchen, wenn an ihrer Peripherie keine Ausströmung statt haben soll. Für andere Maschinengröfsen müssen natürlich andere Dimensionen gewählt werden. Endlich möchte ich mir erlauben für die Aufbewahrung der verhältnifsmäfsig theuren und leicht zu be-

schädigenden Kugeln eine Art von Etui vorzuschlagen, bestehend aus einem offnen Kästchen aus Holz oder Pappe, in welchem sich ein hoch gelegter Boden mit kleinen und groſsen Löchern, besser mit halbkugelförmigen Vertiefungen befindet.

Ueber den Gebrauch der Elektroden zur Darstellung der namhaftesten Erscheinungen in der Luft sey Folgendes bemerkt. Den positiven Büschel mit langem Stiel und kurzen, geraden, stark divergirenden Aesten erhält man am sichersten, wenn die positive Elektrode eine möglichst kleine Kugel oder stumpfe Spitze, die negative eine Scheibe ist. Hieraus entsteht der gewöhnliche positive Büschel mit langem Stiel und langen, krummen, schwächer divergirenden Aesten, so bald man die Kugel entsprechend vergröſsert. Den gewöhnlichen negativen Büschel mit kurzem Stiel und kurzen, geraden, stark divergirenden Aesten erhält man am besten, wenn die positive Elektrode eine Scheibe, die negative eine kleine Kugel ist. Hieraus entsteht nach und nach der negative Büschel mit langem Stiel und längeren, krummen, schwach divergirenden Aesten in dem Verhältniſs, in welchem man die Kugel vergröſsert. Der Effect der Scheibe kann in allen diesen Fällen zum Theil durch die Ableitung einer anders geformten Elektrode ersetzt werden. Der Doppelbüschel, jene gleichzeitig an beiden Polen auftretende eiförmige Lichterscheinung mit vielen krummen, ineinander greifenden Aesten zeigt sich am schönsten, wenn man zwei kleinere Kugeln von gleicher Gröſse in eine bestimmte Entfernung von einander stellt. Rückt man sie weiter aus einander, so hat anfangs zwar noch an beiden Polen eine ähnliche, jedoch getrennte Büschelbildung statt, bis diese allmählig, zuerst aber am negativen Pole verschwindet, worauf dann bei noch weiterem Abstande der Kugeln wieder die gewöhnlichen einseitigen Lichtformen erscheinen, nämlich entweder der positive Büschel mit dem negativen Glimmlicht, oder das positive Glimmlicht mit dem negativen Büschel, oder endlich eine Glimmerscheinung an

beiden Polen zugleich. Rückt man die Kugeln dagegen näher zusammen, so wird der Hauptstamm des Doppelbüschels, während die Nebenlinien mehr und mehr verschwinden, allmählig zu einem heller leuchtenden, lebhaft hin und her tanzenden Faden, welcher, wenn wir ihn vom positiven nach dem negativen Pole verfolgen, fein beginnend successive dicker wird und anfangs weiſs, dann violett, dann bläulich schwarz gefärbt ist. Noch schöner stellt sich der Uebergang von der Büschel- zur Funkenform zwischen gröſseren Kugeln dar und am schönsten zwischen einer groſsen positiven Kugel und einer negativen Scheibe. Die Erscheinung erleidet jedoch eine neue Umwandlung, so bald man die Elektroden entsprechend ihrer Gröſse in eine noch gröſsere Nähe bringt. Statt eines dickeren Fadens zeigt sich nun eine beträchtliche Zahl verschiedenen Punkten entspringender, schwach bogenförmig gekrümmter, gleichwohl nach dem negativen Pol divergirender Linien, deren jede auch im Uebrigen die oben bezeichneten polaren Unterschiede erkennen läſst. Diese Linien aber sind nicht etwa bündelförmig gruppirt, sie liegen vielmehr gröſstentheils in ein und derselben Ebene, welche meistens vertical und nur zuweilen ein wenig um die centrale Verbindungslinie der Elektroden gedreht ist. Die bogenförmige Krümmung und der Abstand der Linien von einander wird einerseits durch die Entfernung, andererseits durch die Gröſse der Elektroden bedingt. So stellt sich das Bild wenigstens zwischen gleich groſsen Elektroden dar. Wählt man sie ungleich, so treten die polaren Unterschiede, wenn man die positive verkleinert, um so deutlicher hervor, während sie umgekehrt bei Verkleinerung der negativen mehr und mehr verschwinden. Diese Abhängigkeit zeigt sich auch in der Verschiebung der namentlich bei gröſseren oder sehr genäherten Elektroden häufiger auftretenden weiſsen Intermittenzstellen, welche für gewöhnlich in der Nähe des positiven Pols erscheinen, während sie in die Mitte der Funkenbahn fallen, wenn man die negative Elektrode entsprechend verkleinert.

Interessant ist es, dafs auch hierbei zum Theil der Effect einer gröfseren durch die Ableitung einer kleineren ersetzt werden kann.

Wer mit der Behandlung der Maschine selbst noch nicht genügend vertraut seyn sollte, dürfte in den Figuren 1 bis 6 die nöthige Erläuterung finden. Fig. 6 Taf. VI zeigt zunächst, wie sich die Ebonitplatte am besten erregen läfst. Fig. 1 und 2 veranschaulichen die Erregung der Maschine, im ersten Falle ohne, im zweiten mit Hilfsconductoren. Die letztere Figur erläutert zugleich das Verfahren, wenn man den einen Pol ableiten, also die Maschine nach Art der Reibzeugmaschine benutzen will. Aus diesem Grunde ist die linke Entladungsstange, welche die nicht abgeleitete vorstellen soll, umgedreht gezeichnet. Figur 3 zeigt die Stellung der Conductoren oder richtiger der Einsauger, bei welcher sich die Maschine zwar nicht erregen läfst, bei welcher sie jedoch, wenn einmal erregt, fortwirkt und zwar mit geringerer quantitativer, aber um so gröfserer intensiver Kraft. Ich will diese Stellung der Conductoren die anomale nennen und beiläufig bemerken, dafs sie sich bei der früheren Construction nur durch Drehung der festen Scheibe bewirken läfst. Stellt man die Hauptconductoren normal, die Hilfsconductoren anomal, so läfst sich die Maschine gleichfalls nicht erregen, wohl aber, wenn auch schwieriger, wenn man den Hauptconductoren die anomale, den Hilfsconductoren die normale Stellung giebt. Werden bei anomaler Stellung der Hauptconductoren die Hilfsconductoren ganz entfernt, so läfst sich die Maschine nun natürlich auch bei geschlossenen Elektroden nicht mehr erregen. Die anomale Stellung der Hilfsconductoren hat bekanntlich nebenbei den Zweck, den Strom vor unwillkürlichen Umkehrungen zu schützen.

Fig. 4 endlich stellt eine möglichst einfache Einrichtung für den Gebrauch einer festen Scheibe mit vier Belegungen vor. Bei einer solchen Scheibe mögen die birnförmigen Oeffnungen, wo deren Anfertigung auf Schwierigkeiten stofsen sollte, durch kreisrunde ersetzt werden.

Für vier Belegungen sind eben so viele Hauptconductoren erforderlich, und da die Maschine nur vier Conductoren hat, so müssen die Hilfsconductoren fehlen. Der Gebrauch der in Rede stehenden Einrichtung wird also mit dem Uebelstande behaftet seyn, daſs man die Elektroden nicht über eine gewisse Grenze entfernen darf. Sonst müſsten vier neue Conductoren geschaffen, zwischen den andern befestigt und unter sich verbunden werden. Hierdurch würde jedoch die Construction der Maschine so complicirt, daſs sie für den Schulgebrauch wenigstens nicht mehr zu empfehlen wäre. Von vier Hauptconductoren sind die gegenüber liegenden gleichwirkend und müssen daher verbunden werden. Der obere und untere, nämlich die beiden früheren Hilfsconductoren, sind dies ohne Weiteres; für den rechten und linken jedoch ist hierzu ein Verbindungsstück erforderlich, eine Messingröhre, welche behufs ihrer Befestigung mit kleinen Stahlzapfen versehen und, um vom obern und untern Conductor isolirt zu seyn, bis nahe an ihre halbrunden Enden mit Ebonit bekleidet ist. Eben weil der rechte Conductor aber mit dem linken gleichwirkend ist, darf nur die eine Entladungsstange mit ihnen in Verbindung gesetzt werden, während die andere mit dem obern und dem untern communiciren muſs. Aus diesem Grunde ist der rechte Conductor durch eine hinter der Ebonitsäule sitzende starke Ebonitscheibe, welche von beiden Seiten angebohrt, aber nicht durchbohrt ist, in zwei von einander isolirte Stücke getheilt. Andererseits führt ein entsprechend gebogener Draht, mittelst eines kleinen Zapfens in der Verbindungsröhre des obern und untern Conductors befestigt, nach der betreffenden Entladungsstange, sie zur Hälfte umfassend. Bei der früheren Construction, wo die Polconductoren nicht gut in isolirte Stücke zu trennen sind, müſste man für den vorliegenden Zweck die Isolirscheibe auf eine der Entladungsstangen verlegen, was zwar einfach in der Ausführung, aber etwas unbequem beim Experimentiren ist. Am einfachsten, aber auch am unbequemsten ist es, ohne weitere

Umstände die früheren Hilfsconductoren mit dem einen, die zusammengeschobenen Entladungsstangen mit dem andern Ständer einer kleinen besondern Entladungsvorrichtung, wie ich sie oben empfohlen habe, zu verbinden; am unbequemsten, weil diese Anordnung den Gebrauch des Einschaltungsapparats, welcher für gröfsere Elektricitätsmengen vorzugsweise angebracht ist, ausschliefsen würde.

IV. *Zur Theorie der Dispersion und Absorption des Lichtes in doppeltbrechenden Mitteln. Dichroismus und Dispersion der optischen Axen; von E. Ketteler.*

Als der Verfasser dieses Aufsatzes nach vielfachen vergeblichen Bemühungen endlich in einem in der hiesigen Niederrheinischen Gesellschaft gehaltenen Vortrage[1]) seine Gedanken über die Dispersion und Absorption des Lichtes zu einer zusammenhängenden Theorie entwickeln konnte, hat er sich keineswegs verhehlt, dafs der von ihm betretene Weg nicht unbeträchtlich von dem bisher üblichen abweicht. Und wenn insbesondere die dort proponirten Grundsätze ihm auch als wahrscheinlich und selbst höchst plausibel gelten, so entbehren dieselben doch vorderhand einer weiter zurückgehenden dynamischen Begründung. Noch weifs ich daher nicht, ob sie auch anderswo auf Beifall rechnen dürfen, und ob andere tauglichere Kräfte es unternehmen werden, die Mechanik der Aether-Körper-Schwingungen im vorgezeichneten Sinne weiter zu fördern. Sofern man freilich die Güte von Principien nach ihrer

1) Verhandl. des naturhist. Vereins für Rheinland-Westphalen. Jahrg. 1876, S. 196. — Carl's Repertorium Bd. XII, S. 322.

Fruchtbarkeit bemessen kann, so darf ich vielleicht darauf hinweisen, dafs die von mir aufgestellten Bewegungsgleichungen das vermittelnde Band bilden zwischen der Fresnel'schen Modification des Brechungsindex durch Bewegung [1]), den Neumann'schen Reflexionsformeln für Krystalle [2]) und den Cauchy'schen für Metalle [3]), der sogenannten Dispersion der optischen Axen und der Spectrometrie der electiv absorbirenden und dichroitischen Mittel.

Konnte ferner gleich anfangs hervorgehoben werden, dafs die gegebene Dispersionsformel (s. u. Gl. 4*b*) die Dispersionscurve der durchsichtigen Mittel befriedigend darstellt, so habe ich jüngst in diesen Annalen [4]) gezeigt, dafs sie insbesondere auch den Kundt'schen Messungen der anomalen Dispersion des Cyanin in absoluter Weise entspricht, und habe ich bei diesem Anlafs eine erneuerte Darstellung der mich leitenden theoretischen Grundsätze in Aussicht genommen.

Wurden nämlich in vorerwähntem Vortrag die Fortpflanzungs- und Absorptionsverhältnisse der Mittel auf ein Amplitudenverhältnifs der Körper- und Aethertheilchen und auf einen Phasenunterschied zwischen ihnen zurückgeführt, so bot begreiflicher Weise bei der Neuheit des Verfahrens der Uebergang von den isotropen Mitteln zu den anisotropen noch seine besonderen Schwierigkeiten.

Frühere Versuche [5]) sowie ausgedehnte numerische Berechnungen [6]) hatten es wahrscheinlich gemacht, dafs die in Formel 4*b* (s. u. S. 451) vorkommende Constante L bei ihrer Anwendung auf Gase und Flüssigkeiten von der Dichtigkeit derselben unabhängig sey. Und da ebenso auch

1) Vergl. Ketteler, Astron. Undulationstheorie. Bonn 1873, S. 187.
2) Verhandl. d. naturhist. Vereins Jahrg. 1876, S. 226.
3) Verhandl. (1875), S. 67. — Vergl. Wernicke, diese Ann. Bd. 159, S. 226.
4) Diese Ann. Bd. 160, S. 481.
5) Ketteler, Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.
6) Diese Ann. Bd. 140, S. 1 und 177.

für die Hauptbrechungsindices von Kalkspath, Quarz und Arragonit für diese Constante jedesmal identische Werthe erhalten wurden, so war ich geneigt, L als eine die dioptrisch einfache Substanz absolut charakterisirende Gröfse aufzufassen, und legte dann diese Voraussetzung auch meinen Bemerkungen über Doppelbrechung geradezu zu Grunde.

Kürzlich haben indefs weitere experimentelle Bestimmungen die Richtigkeit dieser Ansicht wenigstens für isotrope Mittel ins Wanken gebracht, und es scheint darum bezüglich der Bewegungsgleichungen der doppelt brechenden Mittel eine anderweitige, davon unabhängige Herleitung wünschenswerth, die womöglich selbst die hier aufgeworfene Frage entscheidet. Ohnehin dürfte die bisher gegebene Entwicklung namentlich dort, wo sie gewisse noch unbeweisbare Hypothesen über die Beziehung des Doppelbrechungsvermögens zur linearen Dichte der Körpertheilchen in sich aufnimmt, verhältnifsmäfsig wenig befriedigen.

2. Im Folgenden glaube ich nun eine Aufstellung der Differentialgleichungen der anisotropen Mittel geben zu können, die, wie ich meine, die einfache, streng folgerichtige Erweiterung der bezüglichen Gleichungen der isotropen Mittel ist.

Die ihnen zu Grunde zu legenden Principien sind folgende:

a) Der intermoleculare Aether unterscheidet sich weder nach Elasticität noch Dichtigkeit vom Weltäther.

b) Das Volumen der in der Raumeinheit enthaltenen Körpermasse ist gegen die darin enthaltene Aethermasse so klein, dafs trotz der Coexistenz beider die letztere dieselbe ist wie im Weltraum.

c) Aether- und Körpertheilchen verhalten sich insofern gegen einander indifferent, als bei der Festhaltung einer einmal vorhandenen Molecularverschiebung des Aethers im Innern des Mittels die Deformationskraft des letzteren den nämlichen Gegendruck leistet wie aufserhalb desselben.

d) Werden dann die Theilchen des Mittels sich selber überlassen, so reifst der Aether die Körpertheilchen mit sich fort, und indem die anfängliche Spannung sich in lebendige Kraft umsetzt, die sich auf beide Arten von Molecülen vertheilt, hat sie zugleich an Aether- und Körpertheilchen Arbeit zu leisten.

e) Die an den Körpertheilchen zu leistende Arbeit besteht in der Ueberwindung einer Deformationskraft, sey es des Gefüges oder sey es der einzelnen Moleculgruppen oder auch beider zugleich, sowie ferner einer dem Ausschlag proportionalen Schiebkraft, die wieder hervorgehen mag aus der Gesammtwirkung der Körpertheilchen auf einander oder ihrer Wechselwirkung mit den Aethertheilchen oder aus beiden zugleich.

Die vorstehend bezeichneten Kräfte wecken dann ihrerseits vermöge ihrer Rückwirkung auf den Aether in diesem Bewegungswiderstände, die zum Theil aus einer durch sie bewirkten Deformationsänderung desselben hervorgehen und zum Theil dem augenblicklichen Ausschlage der Aethertheilchen proportional sind.

f) Sämmtliche hier besprochene Kräfte, sofern sie nicht statischen, sondern dynamischen Ursprungs sind, sind einander proportional.

g) Sie sind in krystallinischen Mitteln je nach der Richtung der Verrückung und insbesondere also nach den sogenannten Elasticitätsaxen verschieden.

3. Ich gehe aus von der Erfahrung, dafs sich durch jedes krystallographisch noch so complicirte und unsymmetrische Gefüge von ponderablen Theilchen (die gefärbten Krystalle vorläufig ausgenommen) unendlich viele Ebenen legen lassen, parallel welchen eine gegebene linear polarisirte Schwingungsbewegung sich sozusagen ohne Schwächung erhält und fortpflanzt.

Das beobachtete Mittel werde zunächst der Einfachheit wegen als dioptrisch einfach genommen, d. h. es bestehe nur aus Theilchen einer einzigen optisch-chemischen Mo-

lecularqualität. Die Elasticitätsaxen desselben seyen zugleich die Coordinatenaxen.

Parallel einer solchen Ebene nun mögen die Theilchen des Mittels nach dem Gesetze:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= A_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right) \\
\xi' &= A'_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right) \\
\eta &= A_y \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right) \\
\eta' &= A'_y \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right) \\
\zeta &= A_z \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right) \\
\zeta' &= A'_z \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right), \\
r' &= x \cos L' + y \cos M' + z \cos N'
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mit der Schwingungsdauer T, der Wellenlänge l' und der Periodicitätsrichtung r' irgendwie künstlich, d. h. durch irgendwelche geeignete äufsere Kräfte hin- und hergeführt werden. ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' bedeuten die Componenten der (mittleren) Schwingungsausschläge und A_x, A_y, A_z; A'_x, A'_y, A'_z die der (mittleren) Amplitüden der Aether- resp. Körpertheilchen und zwar sämmtlich nach den Elasticitätsaxen genommen.

Versteht man nun unter ε die Deformationsconstante des reinen Aethers, unter $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varkappa$ die Constanten der in Folge der Bewegung im Innern des Mittels hervorgerufenen Reactionskräfte und unter m die in Bewegung gesetzte Masse der Volumeinheit und bezieht, wie oben, die ungestrichelten Bezeichnungen auf die Aether-, die gestrichelten auf die Körpertheilchen, so müssen, sofern die erwähnten Reactionskräfte für beide Arten von Molecülen einander proportional sind, unseren Grundsätzen zufolge die nachstehenden Gleichungen erfüllt seyn:

$$\left.\begin{aligned}
&m A_x \frac{d^2 \xi}{dt^2} - e A_x \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{d^2 \xi}{dy^2}\right) \\
&\qquad + \Sigma \alpha_x A_x \left\{\varepsilon_x \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{d^2 \xi}{dy^2}\right) + \varkappa_x \xi\right\} \\
&+ m A_y \frac{d^2 \eta}{dt^2} - e A_y \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2}\right) \\
&\qquad + \Sigma \alpha_y A_y \left\{\varepsilon_y \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2}\right) + \varkappa_y \eta\right\} = 0 \\
&m' A'_x \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = \alpha_x A'_x \left\{\varepsilon'_x \left(\frac{d^2 \xi'}{dx^2} + \frac{d^2 \xi'}{dy^2}\right) + \varkappa'_x \xi'\right\} \\
&m' A'_y \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = \alpha_y A'_y \left\{\varepsilon'_y \left(\frac{d^2 \eta'}{dx^2} + \frac{d^2 \eta'}{dy^2}\right) + \varkappa'_y \eta'\right\} \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sie enthalten, sofern die Amplituden A, A' den unendlich kleinen Wegstrecken dA, dA' proportional sind, die Arbeit, welche die eingreifende äufsere Kraft an Aether- und Körpertheilchen zu leisten hat.

Die erste Gleichung bezieht sich ausschliefslich auf die Aethertheilchen, die folgenden auf die Körpertheilchen. Die dritten Coordinaten sind der Kürze wegen und ohne wohl Mifsverständnifs befürchten zu brauchen, fortgelassen, und kommen überdiefs die vorgesetzten Summenzeichen wegen der vorausgesetzten Einfachheit des Mittels nicht in Betracht.

Die beiden links stehenden Glieder der ersten Gleichung geben die Arbeit, gemessen durch die Beschleunigung, welche den Aethertheilchen mitgetheilt wird, die weiter folgenden die nämliche Arbeit, gemessen durch die im System wirksamen Kräfte. Und zwar beziehen sich die zwei nächsten auf denjenigen Widerstand, welchen der Aether der Bewegung entgegenstellen würde, wenn er für sich allein vorhanden wäre, die letzten auf seine durch die Anwesenheit der ponderablen Theilchen hervorgerufene Reaction.

Ganz analog ist die Bedeutung der folgenden Gleichungen, denen natürlich das mittlere Glied fehlt. Und da überhaupt die in der Richtung der einzelnen Coordinatenaxen zu überwindenden Widerstände verschieden sind, so sind folglich ebenso viele Proportionalitätsfactoren α_x, α_y . zu unterscheiden.

Bei den bekannten Eigenschaften des Aethers kann es endlich selbstverständlich keinem Zweifel unterliegen, daſs die hier in Betracht kommenden Verschiebungen wahrhaft transversale sind, so daſs folglich alle Schichten des Mittels, die senkrecht stehen auf der Richtung r', parallel verrückt sind. Bezeichnet man die Winkel, welche diese Verrückungen mit den Axen bilden, durch a, b, c und nennt die resultirende Amplitüde der Aethertheilchen A, die der Körpertheilchen A', so lassen sich demnach die Integralgleichungen (1) in die folgenden zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x\cos L'+y\cos M'+z\cos N'}{l'}-\vartheta\right) \\ \varrho' &= A'\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x\cos L'+y\cos M'+z\cos N'}{l'}-\vartheta\right) \\ &\cos a\cos L'+\cos b\cos M'+\cos c\cos N'=0. \end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen ein und versteht unter σ die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“, so daſs $l'=\sigma T$, so erhält man als Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\,\sigma^2 &= e-\alpha_x(\varepsilon_x-\varkappa_x l'^2)\cos^2 a-\alpha_y(\varepsilon_y-\varkappa_y l'^2)\cos^2 b \\ m'\sigma^2 &= \alpha_x(\varepsilon'_x-\varkappa'_x l'^2)=\alpha_y(\varepsilon'_y-\varkappa'_y l'^2). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die α eliminiren. Beachtet man noch, daſs unserer Annahme zufolge äuſserer und innerer Aether wesentlich gleich sind, so daſs nicht bloſs die Deformationsconstante e, sondern auch die Masse m der Volumeinheit für beide identisch wird, und setzt demgemäſs $\frac{e}{m}=v^2$ und $\frac{v^2}{\sigma^2}=n'^2$, wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Weltraum bedeutet, so schreibt sich:

$$n'^2-1=\frac{m'}{m}\,\frac{\varkappa_x l'^2-\varepsilon_x}{\varkappa'_x l'^2-\varepsilon'_x}\cos^2 a+\frac{m'}{m}\,\frac{\varkappa_y l'^2-\varepsilon_y}{\varkappa'_y l'^2-\varepsilon'_y}\cos^2 b+\ldots \Big\} \quad (4a).$$

4. Insbesondere ergiebt sich hieraus für die Indices n'_∞, n'_0, die einer unendlich groſsen, resp. unendlich kleinen Wellenlänge ($l'=\infty$, $=0$) zukommen:

$$n'^2_\infty-1=\frac{m'\varkappa_x}{m\varkappa'_x}\cos^2 a+\frac{m'\varkappa_y}{m\varkappa'_y}\cos^2 b+\ldots$$

$$n'^2_0-1=\frac{m'\varepsilon_x}{m\varepsilon'_x}\cos^2 a+\frac{m'\varepsilon_y}{m\varepsilon'_y}\cos^2 b+\ldots$$

Oder kürzer:

$$n'^2_\infty = (n^2_\infty)_x \cos^2 a + (n^2_\infty)_y \cos^2 b + \ldots$$
$$n'^2_0 = (n^2_0)_x \cos^2 a + (n^2_0)_y \cos^2 b + \ldots$$

Weiter lassen sich die Quotienten der Gl. 4*a* auf die Form bringen:

$$\frac{m'}{m}\,\frac{\varkappa\, l'^2 - \varepsilon}{\varkappa' l'^2 - \varepsilon'} = \frac{m'\varkappa}{m\varkappa'} + \frac{\frac{m'}{m}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)}{\frac{\varkappa'}{\varepsilon'}\, l'^2 - 1},$$

und es möge jetzt zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\frac{m'}{m}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_x = D'_x, \qquad \frac{m'}{m}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)_y = D'_y \ldots$$
$$\frac{\varepsilon'_x}{\varkappa'_x} = L^2_x, \qquad \frac{\varepsilon'_y}{\varkappa'_y} = L^2_y \ldots$$

Beachtet man indeſs, daſs die zweite der Bedingungsgleichungen (3), nämlich:

$$(\alpha_x \varepsilon'_x - \alpha_y \varepsilon'_y) - (\alpha_x \varkappa'_x - \alpha_y \varkappa'_y)\, l'^2 = 0,$$

sofern sie für alle l' gültig bleiben muſs, in die beiden folgenden zerfällt:

$$\alpha_x \varepsilon'_x = \alpha_y \varepsilon'_y$$
$$\alpha_x \varkappa'_x = \alpha_y \varkappa'_y,$$

so ergiebt die Division dieser letzteren:

$$L_x = L_y = L_z = L,$$

so daſs in der That die Constante L von der Orientirung unabhängig wird. Und setzt man nun schlieſslich:

$$D' = D'_x \cos^2 a + D'_y \cos^2 b + D'_z \cos^2 c,$$

so erhält das Dipersionsgesetz der anisotropen Mittel die nämliche Form wie die der isotropen, nämlich:

$$n'^2 - n'^2_\infty = \frac{D'}{\frac{l'^2}{L^2} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,b).$$

5. Obwohl den bisherigen Entwicklungen ein dioptrisch einfaches Mittel zu Grunde gelegt wurde, so lassen sich dieselben ohne Mühe auf zusammengesetzte Mittel er-

weitern. Es reicht zu dem Ende hin, die zwei resp. drei Summanden der Gleichung (3) successiv auf alle einzelnen Elementarbestandtheile zu beziehen und jedem für sich das Summenzeichen vorzusetzen. Setzt man dann weiter:

$$\left.\begin{aligned} n'^2_\infty - 1 &= \Sigma \frac{m' \varkappa_x}{m \varkappa'_x} \cos^2 a + \Sigma \frac{m' \varkappa_y}{m \varkappa'_y} \cos^2 b + \ldots \\ n'^2_0 - 1 &= \Sigma \frac{m' \varepsilon_x}{m \varepsilon'_x} \cos^2 a + \Sigma \frac{m' \varepsilon_y}{m \varepsilon'_y} \cos^2 b + \ldots \\ D' &= \frac{m'}{m} \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)_x \cos^2 a + \frac{m'}{m} \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)_y \cos^2 b + \ldots \\ L^2 &= \left(\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} \right)_x = \left(\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} \right)_y = \ldots, \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

woraus zugleich folgt:

$$n'^2_\infty - n'^2_0 = \Sigma D' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

so erhält man als das *allgemeingültige Dispersionsgesetz*:

$$\left.\begin{aligned} n'^2 - n'^2_\infty &= \Sigma \frac{D' L^2}{l'^2 - L^2} \\ n'^2 - n'^2_0 &= \Sigma \frac{D' l'^2}{l'^2 - L^2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

6. Um den Beweis desselben anzutreten, unterscheide man die beiden Fälle, daſs nämlich die einzelnen Systeme von Elasticitätsaxen, auf welche die Wirkung einer jeden Molekularqualität zu beziehen ist, gegen einander entweder parallel oder beliebig geneigt sind. Im allgemeinsten Falle werden eben die Elementarbestandtheile eines anisotropen Mittels um divergirende Axen geordnet seyn, und darauf beruht dann ohne Zweifel die Structur derjenigen Krystallsysteme, welche sich durch eine Dispersion der optischen Axen charakterisiren.

Für den einfacheren Fall der regelmäſsigen Anordnung genügen schon die Gleichungen (2), sofern man in der ersten derselben die unterdrückten Summenzeichen wiederherstellt und entsprechend der Zahl der gegebenen Molekularqualitäten die Zahl der weiteren Gleichungen vermehrt.

Was dagegen den allgemeinen Fall betrifft, so wollen wir jetzt die erste der Differentialgleichungen (2) zu sämmtlichen folgenden, deren Zahl m offenbar gleich ist der dop-

pelten resp. dreifachen Zahl der vorhandenen, heterogenen Massen m'_1, $m'_2 \ldots$, addiren. Schreibt man die entstehende Summe (in Uebereinstimmung mit Grundsatz c) so:

$$\left.\begin{array}{l}
m\left(A_x \frac{d^2\xi}{dt^2} + A_y \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + \Sigma m'\left(A'_x \frac{d^2\xi'}{dt^2} + A'_y \frac{d^2\eta'}{dt^2}\right) \\
\qquad = e\left\{A_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right) + A_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2}\right)\right\} \\
A_x\left\{\varepsilon_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right) + \varkappa_x\xi\right\} = A'_x\left\{\varepsilon'_x\left(\frac{d^2\xi'}{dx^2} + \frac{d^2\xi'}{dy^2}\right) + \varkappa'_x\xi'\right\} \\
A_y\left\{\varepsilon_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2}\right) + \varkappa_y\eta\right\} = A'_y\left\{\varepsilon'_y\left(\frac{d^2\eta'}{dx^2} + \frac{d^2\eta'}{dy^2}\right) + \varkappa'_y\eta'\right\}
\end{array}\right\} (8),$$

so läfst sich nicht blofs im Sinne des eben behandelten einfacheren Falles zeigen, dafs die linke Seite der oberen Gleichung dem ersten der weiteren Glieder der Summe gleich ist, dafs also die letzten Glieder — und innerhalb derselben jeder mit einem unbestimmten α multiplicirte Factor — für sich gleich Null sind, sondern es ist die Bedeutung der Gleichungen (8) eine ganz allgemeine.

Setzt man in der That die Integralausdrücke (1) in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{mA^2}{T^2} + \frac{\Sigma m'A'^2}{T^2} = \frac{e}{l^2}A^2$$

oder:

$$n'^2 - 1 = \frac{\Sigma m'A'^2}{mA^2},$$

und diese Beziehung ist völlig unabhängig von der Lage des vorausgesetzten Coordinatensystems. Man kann daher auch rückwärts die Einzelamplitüden A' sowie die allen gemeinsame Amplitude A für die verschiedenen Molekularqualitäten nach beliebig verschiedenen Axen in Componenten zerlegen, folglich schreiben:

$$n'^2 - 1 = \frac{m'_1 A'^2_1 + m'_2 A'^2_2 + \ldots}{mA^2}$$

$$= \frac{m'_1 (A'^2_{x_1} + A'^2_{y_1} + A'^2_{z_1})}{m(A^2_{x_1} + A^2_{y_1} + A^2_{z_1})} + \frac{m'_2 (A'^2_{x_2} + A'^2_{y_2} + A'^2_{z_2})}{m(A^2_{x_2} + A^2_{y_2} + A^2_{z_2})} \cdot$$

$$= \frac{m'_1 A'^2_{x_1}}{mA^2_{x_1}} \frac{A^2_{x_1}}{A_{x_1} + A^2_{y_1} + A^2_{z_1}} + \frac{m'_1 A'^2_{y_1}}{mA^2_{y_1}} \frac{A^2_{y_1}}{A^2_{x_1} + A^2_{y_1} + A^2_{z_1}} + \ldots$$

Und läfst man jetzt das Coordinatensystem der Reihe nach mit den willkürlich im Raume gerichteten Elasticitätsaxen (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) ... zusammenfallen, so geben die weiteren Gleichungen (8) die entsprechenden axialen Amplitüdenverhältnisse als Functionen der Wellenlänge und der Constanten des Mittels.

Sonach erhält man die allgemein gültigen Relationen:

$$\left.\begin{array}{c} n'^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2}{m A^2} \\ \frac{A'^2}{A^2} = \frac{A'^2_x}{A^2_x} \cos^2 a + \frac{A'^2_y}{A^2_y} \cos^2 b + \frac{A'^2_z}{A^2_z} \cos^2 c \\ \frac{A'^2}{A^2} = \frac{\varkappa l'^2 - \varepsilon}{\varkappa' l'^2 - \varepsilon'} \end{array}\right\} \quad (9),$$

die sich offenbar mit dem System der Gleichungen 5—7 decken, sofern man auch in ihnen die Werthe L als constant behandelt.

Die sogenannte brechende Kraft des Mittels ist hiernach gleich der Summe der Verhältnisse der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen.

7. Dem Vorstehenden zufolge ordnet sich sonach einer gegebenen Richtung a, b, c als Schwingungsrichtung eine gewisse Richtung L', M', N' als Periodicitätsrichtung transversaler Wellen zu. Werden in der durch beide bestimmten Ebene die Theilchen des Mittels durch irgend eine äufsere Kraft nach dem Gesetze der Gleichungen (1) parallel hin und her gerückt, so leistet dieselbe an Aether- und Körpertheilchen eine Summe von Arbeit, die für jeden Augenblick durch Gl. (2) bestimmt ist. Dieselben empfangen dafür eine entsprechende lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2}(m A^2 + \Sigma m' A'^2) \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right),$$

deren Maxima um die Strecke l' von einander abstehen, und deren zugehörige Schwingungsdauer $T = \frac{l'}{\sigma}$ vermöge der Gl. (7) mittelst des Verhältnisses $n' = \frac{v}{\sigma}$ aus l' und n'

berechnet werden kann. — Und ebenso umgekehrt. Ertheilt man den Theilchen eine nach vorstehendem Ausdruck auf- und abwogende lebendige Kraft, so leisten dieselben den Widerstand wie oben.

Dachte man sich bisher die Theilchen des schwingenden Aggregates als vollkommen frei, so bleiben die Verhältnisse doch die nämlichen, wenn man die einzelnen Schichten senkrecht zur Richtung r' als durch parallele feste Ebenen getrennt annimmt.

Man stelle sich nun weiter vor, dafs wieder die sämmtlichen Molekularfäden nach der gleichen periodischen Strecke l' parallel verschoben werden, dafs indefs die vorgedachten festen Ebenen um einen Winkel δ gegen die Richtung r' gedreht seyen, so dafs die Theilchen nur mehr in schräger Richtung beweglich sind. Ertheilt dann die eingreifende Kraft den Aether- und Körpertheilchen in jedem Augenblick eine lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2}(m\mathfrak{A}^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2)\cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r'}{l'} - \vartheta\right)$$

und ist zugleich:

$$m\mathfrak{A}^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2 = mA^2 + \Sigma m'A'^2 \quad . \quad . \quad (10),$$

so leistet sie auch jetzt noch mit Hülfe der festen Verbindungen die nämliche Arbeit, wie vorher ohne dieselben, als die schwingenden Theilchen frei waren. Noch immer also wird es gestattet seyn, die Beziehung zwischen T und σ mittelst der früheren Gleichung (7) zu berechnen.

Schreiten wir hiernach zur Untersuchung der thatsächlichen Lichtbewegung fort, so verbreitet sich das Licht im Innern des Mittels um einen Punkt herum nach einer Fläche, die wegen der ungleichen molekularen Anordnung nothwendig von einer Kugel verschieden ist und die man die Wellenfläche nennt. Die obige Richtung r' wird ein *radius vector* derselben, ein sogenannter Strahl, der durch die periodische Länge l' in gleiche Abstände getheilt wird. Dafs nun nicht längs der Richtung r' die Schwingungsbewegung eine transversale seyn kann, ist schon für sich

einleuchtend [1]); ohnehin zwingt die Incompressibilität des Aethers die schwingenden Theilchen, in der Ebene der Welle selbst zu bleiben. Wollte man dieselben senkrecht zum Strahle um A verschieben, so würde kraft jener Eigenschaft, wenn δ der Winkel zwischen Strahl und Normale ist, die longitudinale Componente $A \sin \delta$ unterdrückt werden und nur die transversale:

$$\mathfrak{A} = A \cos \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

zur Ausführung kommen. So erscheint denn diese letztere gegenüber der *„virtuellen“* Amplitüde A als die *„wirkliche“* Amplitüde $\mathfrak{A}$.

Gesetzt nun, dafs längs der Richtung r' ein nach l' und T periodischer Schwingungszustand fortschreitet. Läfst sich dann zeigen, dafs wirklich:

$$m\mathfrak{A} + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2 = mA^2 + \Sigma mA'^2,$$

so ist nach wie vor die Beziehung zwischen T und σ bekannt und σ erscheint dann zugleich als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle längs des Strahles (L', M', N').

8. Der verlangte Beweis läfst sich in folgender Weise führen. Man denke sich zwei Wellebenen, die beide dem Strahle r' entsprechen und zwischen denen etwa die Strahlenlänge $l' = \sigma T$ enthalten sey. Man construire die zugehörige Normale $l = \omega T$, unter ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Normalen verstanden, und denke sich mittelst derselben etwa einen geraden Cylinder von beträchtlicher Basis ausgeschnitten.

Da Aether- und Körpertheilchen nahezu Continua bilden, so lassen sich die Schwingungen beider auch durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \mathfrak{A} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{l} - \vartheta\right) \\ \varrho' &= \mathfrak{A}' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{l} - \vartheta\right) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

1) Dafs nämlich die Schwingungen in der durch Strahl und Normale gegebenen Ebene liegen, läfst sich meines Erachtens mit Beihülfe der Gränzgleichungen bewegter isotroper Mittel mit Sicherheit feststellen. Vergl. Astron. Undulationsth. S. 220.

darstellen, worin sogar die Normale: $r = x\cos L + y\cos M + ..$ als wirkliche Fortpflanzungsrichtung genommen werden kann, so also, als ob ein Theilchen bei r'' seine Bewegung auf das benachbarte $r'' + dr$ direct übertrüge.

Kurz der beschriebene in Schwingung befindliche Cylinder unterscheidet sich in nichts von einem gleich grofsen Cylinder eines isotropen Mittels, in welchem die m, m'; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; T, l dieselben Werthe haben. Wenn daher in beiden der Aether bei gleicher Verschiebung die gleichen maximalen lebendigen Kräfte:

$$mC^2 + \Sigma m' C'^2 = m\frac{\mathfrak{A}^2}{T^2} + \Sigma m' \frac{\mathfrak{A}'^2}{T^2}$$

erzeugt, so wird auch eine identische Verschiebung im Weltäther (bei gleichem $\mathfrak{A}$ und l) eine *gleiche* lebendige Kraft $mC_0^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{T_0^2}$ zuwege bringen. Da aber der Voraussetzung zufolge:

$$vT_0 = \omega T = l, \quad \frac{1}{T_0^2} = \frac{1}{T^2}\,\frac{v^2}{\omega^2} = \frac{e}{l^2}\,\frac{1}{m}$$

seyn mufs, so leitet man ab:

$$m\frac{\mathfrak{A}^2}{T^2} + \Sigma m' \frac{\mathfrak{A}'^2}{T^2} = \frac{e}{l^2}\mathfrak{A}^2,$$

was ganz einer zu Gl. (8 *a*) analog gebildeten Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\mathfrak{A}_x \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathfrak{A}_y \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + \Sigma m' \left(\mathfrak{A}'_x \frac{d^2\xi'}{dt^2} + \mathfrak{A}'_y \frac{d^2\eta'}{dt^2}\right) \\ = e\left\{\mathfrak{A}_x\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2}\right) + \mathfrak{A}_y\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

entsprechen würde. Diese letztere ist übrigens auch für sich einleuchtend.

Die vorhergehende Gleichung schreibt sich daher, wenn man den Brechungsindex der Normalen $\frac{v}{\omega} = n$ bezeichnet, analog zu Gl. (9) auch so:

$$n^2 - 1 = \frac{m'\mathfrak{A}'^2}{m\mathfrak{A}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dies vorausgesetzt, heifse wie früher der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale δ, so dafs:

$$\omega = \sigma \cos \delta, \quad l = l' \cos \delta \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Man erhält alsdann aus (11) und (15):

$$\frac{\mathfrak{A}}{\omega} = \frac{A}{\sigma}, \quad \mathfrak{A}^2 n^2 = A^2 n'^2,$$

und mittelst Zuziehung der Gleichungen (9) und (14) der brechenden Kräfte:

$$m\mathfrak{A}^2 \left(1 + \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2}{m\mathfrak{A}^2}\right) = m\, A^2 \left(1 + \frac{\Sigma m' A'^2}{m A^2}\right),$$

welche Beziehung bewiesen werden sollte. Für δ findet man noch:

$$\operatorname{tang}^2 \delta = \Sigma \frac{m'(\mathfrak{A}'^2 - A'^2)}{m\,\mathfrak{A}^2}.$$

9. Folgerichtig erscheint jetzt σ als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und n' als das Geschwindigkeitsverhältnifs, welches sich bei gegebenem l' einer gegebenen virtuellen Schwingungsrichtung thatsächlich zuordnet. Und was weiter die zu beiden gehörige Strahlrichtung (L', M', N') und Normalrichtung (L, M, N) betrifft, so bestimmen sich dieselben mittelst folgender Erwägung.

Das in Rede stehende Mittel sey zunächst derart aus seinen heterogenen Elementarbestandtheilen aufgebaut, dafs das Aggregat nach einem einzigen Axensystem symmetrisch ist. Alsdann repräsentirt Gleichung (9) ein Ellipsoid, dessen Axen aufser von den Constanten $(n_\infty)_x$, $D'_x \ldots L$ auch von dem gegebenen l' abhängen. Für $l' = \infty$ und $l' = 0$ insbesondere fällt dasselbe mit dem sogenannten directen oder Plücker'schen Ellipsoide zusammen. Doch wie dem auch sey, das Verfahren, von der Schwingungsrichtung (a, b, c) zur Strahlenrichtung (L', M', N') zu gelangen, ist stets das bekannte Plücker-Fresnel'sche.

Indefs selbst dann noch, wenn die einzelnen Molecularqualitäten des Mittels sich um ganz regellos zerstreute Axensysteme gruppiren, stellt, wie sich zeigen läfst, Gl. (9) ein Ellipsoid vor.

Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung den Ausdruck:

$$\frac{m'\varkappa}{m\varkappa'} + \frac{D' L^2}{l^2 - L^2} = \frac{m' A'^2}{m A^2},$$

soweit er sich auf eine einzelne Axe bezieht, durch k und unterscheidet dabei die bezügliche Axe durch ein angehängtes x, y, z, sowie die wirksame Molekularqualität selbst durch ein weiter angehängtes 1, 2, 3 ..., so läſst sich Gleichung (9) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} n'^2 - 1 = & k_{x_1} \cos^2 a_1 + k_{y_1} \cos^2 b_1 + k_{z_1} \cos^2 c_1 \\ & + k_{x_2} \cos^2 a_2 + k_{y_2} \cos^2 b_2 + k_{z_2} \cos^2 c_2 \\ & + k_{x_3} \cos^2 a_3 + \ldots . \end{aligned}$$

Man füge nun diesen m Axensystemen ein neues allgemeines System hinzu, dessen Winkel mit der gegebenen Schwingungsrichtung durch A', B', C' bezeichnet werden mögen, und gegen das die einzelnen Specialaxen um α_x, β_x, γ_x; α_y, β_y ... geneigt seyen. Alsdann wird beispielsweise:

$$\begin{aligned} \cos a_1 &= \cos A' \cos \alpha_{x_1} + \cos B' \cos \beta_{x_1} + \cos C' \cos \gamma_{x_1} \\ \cos b_1 &= \cos A' \cos \alpha_{y_1} + \cos B' \cos \beta_{y_1} + \cos C' \cos \gamma_{y_1} \\ \cos c_1 &= \cos A' \cos \alpha_{z_1} + \cos B' \cos \beta_{z_1} + \cos C' \cos \gamma_{z_1}. \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in vorstehende Gleichung ein, so erhält dieselbe die Gestalt:

$$\begin{aligned} n'^2 = & \mathfrak{P} \cos^2 A' + \mathfrak{Q} \cos^2 B' + \mathfrak{R} \cos^2 C' + 2 \mathfrak{S} \cos A' \cos B \\ & + 2 \mathfrak{T} \cos A' \cos C' + 2 \mathfrak{U} \cos B' \cos C', \end{aligned}$$

und darin sind die Coëfficienten $\mathfrak{P} \ldots \mathfrak{U}$ zugleich mit der relativen Lage der partiellen Axensysteme, sowie der Werthe k gegeben. Es ist dies ($n'^2 = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}$ gesetzt) die Gleichung eines Ellipsoides, welches auf ein durch seinen Mittelpunkt gehendes, aber nicht mit seinen Hauptaxen coincidirendes Coordinatensystem bezogen ist. Läſst man dann endlich diese beiden Systeme zusammenfallen, so erhält man für dasselbe eine vereinfachte Gleichung von der Form:

$$n'^2 = (1 + K_x) \cos^2 A' + (1 + K_y) \cos^2 B' + (1 + K_z) \cos^2 C' \quad (16).$$

Ich nenne es im Folgenden *das verallgemeinerte directe Ellipsoid oder das Ellipsoid der gleichen Verschiebungen.*

10. Denkt man sich dasselbe für ein gegebenes l' construirt und den durch die gegebenen Winkel A', B', C' bestimmten *radius vector* gezogen, so genügt es, in dem Endpunkte desselben eine Tangentialebene zu errichten, auf dieselbe vom Mittelpunkte aus ein Perpendikel zu fällen und das so gebildete Dreieck in seiner Ebene um 90° herumzudrehen. Der *radius vector* kommt dann in die Lage des Strahles, die Tangentialebene in die der Wellebene, das Perpendikel in die der Wellennormale und das im Berührungspunkte des *radius vector* liegende Flächenelement des Ellipsoides wird zu einem Flächenelement der verallgemeinerten Wellenfläche. Endlich wird die Projection der Wellebene auf die Ebene von Strahl und Wellennormale parallel der *wirklichen* Schwingungsrichtung.

Im Folgenden werde ich ferner den geometrischen Ort der Fufspunkte aller Senkrechten, welche auf die an dem directen Ellipsoid errichteten Tangentialebenen gefällt werden, *das verallgemeinerte reciproke Ellipsoid* nennen. Seine Gleichung erhält bekanntlich die Form:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 A}{1+K_x} + \frac{\cos^2 B}{1+K_y} + \frac{\cos^2 C}{1+K_z} \quad . \quad . \quad (17),$$

wenn A, B, C die Winkel zwischen der dem Strahle A', B', C' sich zuordnenden Normale und den Hauptaxen bedeuten. Nach seiner vorbeschriebenen Drehung um 90° bildet das mitgenommene Flächenelement dieses Ellipsoides ein Flächenelement der verallgemeinerten Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen.

Hiernach sind für eine gegebene innere Wellenlänge l' und die ihr zugegebene Schwingungsrichtung (A', B', C') Strahl, Normale und Wellebene bekannt und damit zugleich je ein einzelnes Element der beiden genannten Geschwindigkeitsflächen.

Es entsprechen nämlich diese Flächen nicht einem constanten l', sondern einem constanten λ, resp. T. Ersetzt

man daher in Gl. (7) $l' = \frac{l}{\cos\delta}$ durch $\frac{\lambda}{n\cos\delta} = \frac{\lambda}{n'}$ und löst dieselbe nach n'^2 auf, so erhält man die der Schwingungsrichtung A', B', C' entsprechende *wahre Dispersionscurve* $n' = f(\lambda)$; man vermag dann, wenn neben A', B' C' anstatt der inneren Wellenlänge l' die äufsere λ gegeben ist, aus n' und λ umgekehrt die erstere $l' = \frac{\lambda}{n'}$ zu berechnen und verfährt mit dieser weiter wie vorhin.

Führt man diese Rechnung bei einem und demselben T der Reihe nach für alle möglichen Richtungen A', B', C' aus, so entspricht einer jeden ein besonderes l', folglich auch ein bestimmtes verallgemeinertes directes und reciprokes Ellipsoid. Von jedem derselben entnimmt man je ein Flächenelement und setzt dieselben schliefslich durch die vorbeschriebenen Drehungen zu der *gesammten verallgemeinerten Geschwindigkeitsfläche der Strahlen und Normalen* zusammen.

11. Hierbei mag zum Schlufs erwähnt werden, dafs das directe Ellipsoid (l'; A', B', C') gegen das Ellipsoid (∞; A', B', C') geneigt ist. Läfst man nämlich die Wellenlänge l' immer gröfser und gröfser werden, so erlangen die k und mit ihnen die Coefficienten $\mathfrak{P} \ldots \mathfrak{U}$ sowie die K fort und fort andere Werthe und bedingen so eine fortschreitende Drehung des Ellipsoides bis in eine äufserste Gränzlage. Ist daher das erstere, dem zugleich ein endlicher Werth von λ entspricht, z. B. für blaues Licht symmetrisch in Bezug auf eine bestimmte Krystallrichtung, so wird schon das dem gelben, rothen .... zukommende Ellipsoid der Reihe nach andere Axen erhalten. Kurz: *Der Krystall zeigt alle Eigenschaften der sogenannten Dispersion der optischen Axen.*

12. Was endlich die Behandlung der Absorption der doppelt brechenden Mittel betrifft, so lehrt ein Blick auf die Form des Dispersionsgesetzes (Gl. 7), dafs dieselbe sich ähnlich gestaltet wie bei den isotropen Mitteln. Während indefs bei letzteren Amplitüdenverhältnifs und Phasen-

unterschied von der Orientirung (auch in Bezug auf die Trennungsfläche) unabhängig sind und während in Folge dessen das Geschwindigkeitsverhältnifs ν' — gleichbedeutend mit dem bisherigen n' — zwar innerhalb des Absorptionsstreifens mit der Incidenz variabel, aufserhalb desselben aber constant ist, entspricht dagegen bei den anisotropen Mitteln sowohl aufserhalb als innerhalb desselben einem jeden Strahle eine besondere Art der Fortpflanzung. Wir knüpfen hier an die Differentialgleichungen 8 an als an diejenigen, in welchen die Ausschläge der Aether- und Körpertheilchen mit einander verknüpft und aus denen die unbestimmten α eliminirt sind.

Beachtet man, dafs das in der ersten derselben vorausgesetzte Coordinatensystem willkürlich ist, also auch durch ebenso viele verschiedene Systeme ersetzt werden kann, als es schwingende Massen m, m'_1, m'_2 .... giebt, so haben die allgemeinsten Integrale derselben die Form:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= A_x\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r'}{\sigma}\right)\right\} \\
\xi' &= A'_x\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r'}{\sigma}\right) + \varDelta'_x\right\} \\
\eta &= A_y\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r'}{\sigma}\right)\right\} \\
\eta' &= A'_y\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r'}{\sigma}\right) + \varDelta'_y\right\} \ldots \\
& \qquad r' = x \cos L' + y \cos M' + z \cos N'
\end{aligned}\right\} \quad (18),$$

wo nämlich q' den Absorptionscoëfficienten und $\varDelta'$ den Phasenunterschied zwischen Aether- und Körpertheilchen bedeutet; letzteren werden wir nach den jeweiligen Elasticitätsaxen als $\varDelta'_x$, $\varDelta'_y$, $\varDelta'_z$ zu unterscheiden haben. Setzt man diese Ausdrücke ein und beachtet, dafs z. B.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_x\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos\varphi$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A_x\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos^2 L' [(\nu'^2 - q'^2)\cos\varphi - 2\nu' q' \sin\varphi],$$

unter ν' den Quotienten $\frac{v}{\sigma}$ und unter φ das allen Ausschlägen gemeinschaftliche Argument verstanden, so erhält zunächst die erste der Differentialgleichungen (8) die Form:

$$m(A_x^2+A_y^2)\cos\varphi+m'\Sigma\{A'^2_x\cos(\varphi+\Delta'_x)+A'^2_y\cos(\varphi+\Delta'_y)\}$$
$$=m A^2[(\nu'^2-q'^2)\cos\varphi-2\nu' q'\sin\varphi].$$

Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\nu'^2-q'^2-1&=\frac{\Sigma m'(A'^2_x\cos\Delta'_x+A'^2_y\cos\Delta'_y)}{m A^2}\\&=\sum\frac{m'A'^2_x\cos\Delta'_x}{m A_x^2}\cos^2 a+\sum\frac{m'A'^2_y\cos\Delta'_y}{m A_y^2}\cos^2 b+\ldots\end{aligned}\right\}\text{(19)},$$

$$\left.\begin{aligned}2\nu' q'&=\frac{\Sigma m'(A'^2_x\sin\Delta'_x+A'^2_y\sin\Delta'_y)}{m A^2}\\&=\sum\frac{m'A'^2_x\sin\Delta'_x}{m A_x^2}\cos^2 a+\sum\frac{m'A'^2_y\sin\Delta'_y}{m A_y^2}\cos^2 b+\ldots\end{aligned}\right\}\text{(20)},$$

sofern nämlich wie früher $\frac{A_x^2}{A^2}=\cos^2 a$, $\frac{A_y^2}{A^2}=\cos^2 b\ldots$ gesetzt wird.

Die entsprechende Behandlung der weiteren Differentialgleichungen ergiebt die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{m'A'^2_x\cos\Delta'_x}{m A_x^2}&=\frac{m'\varepsilon_x}{m\varepsilon'_x}-\frac{\left(\nu'^2-q'^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)D'_x\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(\nu'^2-q'^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4\nu'^2q'^2}\\\frac{m'A'^2_x\sin\Delta'_x}{m A_x^2}&=\frac{2\nu'q'D'_x\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(\nu'^2-q'^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4\nu'^2q'^2}\end{aligned}\right\}\text{(21)}$$

und ebenso analog für $\frac{m'A'^2_y\cos\Delta'_y}{m A_y^2}$, $\frac{m'A'^2_y\sin\Delta'_y}{m A_y^2}\ldots$, worin überall L constant bleibt.

Substituirt man diese Ausdrücke in Gl. (19) und (20), so kommt schliefslich:

$$\left.\begin{aligned}\nu'^2-q'^2-1&=n_e'^2-1-\Sigma D'\frac{\lambda^2}{L^2}\cos^2\Phi\\2\nu' q'&=\Sigma D'\frac{\lambda^2}{L^2}\sin^2\Phi\end{aligned}\right\}\text{(22)},$$

wo n'^2_0 und D' die frühere Bedeutung haben und überdies zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{2\nu' q'}{\left(\nu'^2 - q'^2 - \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2 + 4\nu'^2 q'^2} = \sin^2 \Phi.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich ν' und q' für jede Wellenlänge λ und jede gegebene virtuelle Schwingungsrichtung gesondert berechnen.

Was ebenso die auf die Normale bezügliche Differentialgleichung (13) betrifft, so mögen die Integrale derselben von den obigen analogen Ausdrücken vorläufig dadurch unterschieden werden, daſs die entsprechenden Buchstaben ungestrichelt bleiben, resp. A durch $\mathfrak{A}$ ersetzt wird. Man erhält daher sofort:

$$\left.\begin{aligned} \nu^2 - q^2 - 1 &= \frac{\Sigma m' (\mathfrak{A}'^2_x \cos \Delta_x + \mathfrak{A}'^2_y \cos \Delta_y)}{m\,\mathfrak{A}^2} \\ 2\nu q &= \frac{\Sigma m' (\mathfrak{A}'^2_x \sin \Delta_x + \mathfrak{A}'^2_y \sin \Delta_y)}{m\,\mathfrak{A}^2} \end{aligned}\right\} (23),$$

Beziehungen, in welchen den $\mathfrak{A}'_x$, $\mathfrak{A}'_y$; Δ_x, Δ_y vorderhand unbestimmte, aber jedenfalls (im Gegensatz zu den auf den Strahl bezüglichen) variable Werthe zukommen.

13. Noch freilich bleibt die Richtung der wirklichen Schwingung, die sich einer gegebenen virtuellen zuordnet, sowie die von Strahl und Normale zu ermitteln übrig. Bezüglich ihrer ist zu bemerken, daſs beim Eintreten der Absorptionsbedingungen das frühere Geschwindigkeitsverhältniſs n' und folglich auch die innere Wellenlänge $l' = \frac{\lambda}{n'}$ unter complexer Form erscheint, letztere sich also etwa schreiben läſst: $l' = \frac{\lambda}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$ [1]). In Folge dessen

1) Was die beiden Coëfficienten α und β des complex gewordenen Verhältnisses n' betrifft, so erhält man dieselben, wenn man den Ausdruck: $n' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ in die Gl. (7) einführt, die reellen und imaginären Glieder sondert und die so entstehenden Theilgleichungen mit den Beziehungen (22) vergleicht. Dieselben werden unter sich identisch, sobald man setzt: $\alpha = \nu'$, $\beta = q'$, so daſs man also erhält:

$$n' = \nu' + q'\sqrt{-1}.$$

werden die Coëfficienten der beiden verallgemeinerten Ellipsoide (16) und (17) ebenfalls und zwar im gleichen Augenblick complex, und damit werden die früher gegebenen Constructionsregeln wenigstens in ihrer bisherigen Form hinfällig.

Es genügt indefs eine kleine Abänderung derselben, um auch in diesem Fall zum Ziel zu kommen. Dahin führt nämlich eine Vergleichung der Gleichungen (19), (20) und (23) und der in ihnen vorkommenden Coëfficienten.

Bezieht man zu dem Ende die Schwingungen der Aethertheilchen längs des Strahles auf die Richtung der Fortpflanzung (r') selber, so dafs sich schreiben läfst:

$$\varrho_s = A\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q' r'} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r'}{\sigma}\right),$$

so ordnet sich ihnen, wie oben gezeigt wurde, eine im allgemeinen unregelmäfsige (elliptische) Schwingungsbewegung der Körpertheilchen zu, sofern die Verzögerungen derselben nach den drei Axen verschieden sind. Man kann sie daher auch nicht als eine gewöhnliche, transversale auf die Richtung r' beziehen.

Aehnlich ist es längs der Normalen, für welche gleichfalls der frühere Einklang zwischen Aether- und Körpertheilchen durch eine entstehende ungleichaxige Phasenverschiebung gestört wird. Für ihre Aetherschwingungen wird sich aber analog setzen lassen:

$$\varrho_N = \mathfrak{A}\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q r} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \vartheta' + \frac{r}{\omega}\right).$$

Da nun ebenso wie früher die Beziehung besteht:

$$\varrho_N = \varrho_s \cos \delta,$$

so ist die gemeinsame Verträglichkeit dieser Schwingungen an die Bedingungen geknüpft:

$$\mathfrak{A} = A \cos \delta, \quad q\, r = q' r', \quad \frac{r}{\omega} = \frac{r'}{\sigma},$$

und aus den letzteren insbesondere zieht man:

$$\nu' = \frac{\nu}{\cos\delta}, \quad q' = \frac{q}{\cos\delta}, \quad A = \frac{\mathfrak{A}}{\cos\delta} \qquad (24).$$

Dies vorausgesetzt, beachte man, dafs Gl. (19) sich zu Gl. (9) verhält wie die allgemeinere zur speciellen. Setzt man daher:

$$N'^2 = \nu'^2 - q'^2$$

und construirt die *rad. vect.* $\left(\frac{1}{\mathfrak{r}} = N'\right)$, die sich allen möglichen virtuellen Schwingungsrichtungen bei einer bestimmten gegebenen Aetherverrückung, d. h. bei Constanterhaltung der Wellenlänge l', resp. der axialen Einzelwerthe $\frac{A'^2 \cos\Delta}{A^2}$ zuordnen, so ist der geometrische Ort ihrer Endpunkte wiederum ein Ellipsoid. Und denkt man sich dasselbe auf seine Hauptaxen bezogen, so hat man analog wie früher:

$$N'^2 = (1+\mathfrak{K}_x)\cos^2 A' + (1+\mathfrak{K}_y)\cos^2 B' + (1+\mathfrak{K}_z)\cos^2 C' \quad (25).$$

Setzt man ferner die aus den obigen Bedingungen gewonnenen Werthe von ν', q', A in die Gleichungen (19) und vergleicht sie so mit Gl. (23), so erhält man die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} m\,\mathfrak{A}^2 + \Sigma m' (\mathfrak{A}'^2_x \cos\Delta_x + \mathfrak{A}'^2_y \cos\Delta_y) \\ = m\,A^2 + \Sigma m' (A'^2_x \cos\Delta'_x + A'^2_y \cos\Delta'_y) \\ \Sigma m' (\mathfrak{A}'^2_x \sin\Delta_x + \mathfrak{A}'^2_y \sin\Delta_y) \\ = \Sigma m' (A'^2_x \sin\Delta'_x + A'^2_y \sin\Delta'_y) \end{aligned}\right\} \quad (26),$$

in welche man auch statt der lebendigen Kräfte $m A^2$ die ihnen entsprechenden Arbeiten pS einführen kann.

Die erstere derselben ist die erweiterte Bedingungsgleichung (10), und ebenso übersieht man, dafs so auch das Verhältnifs der Gleichungen (19) und (23) das nämliche ist, wie das der früheren (9) und (14). Construirt man daher zu vorstehendem Ellipsoid das reciproke:

$$\frac{1}{N^2} = \frac{\cos^2 A}{1+\mathfrak{K}_x} + \frac{\cos^2 B}{1+\mathfrak{K}_y} + \frac{\cos^2 C}{1+\mathfrak{K}_z} \quad . \quad . \quad (27),$$

wo unter N der dem N' entsprechende Werth:

$$N^2 = \nu^2 - q^2$$

verstanden werde, so treten dieselben bezüglich der Construction von Strahl, Normale und Wellebene für das Bereich der Absorption ganz in die Stelle der früheren Ellipsoide ein. Und da sie zugleich für $q=0$, $\varDelta=0$ das nicht absorbirte Strahlungsgebiet mit umfassen, so haben wir in ihnen *die allgemeinsten Formen des Ellipsoides der gleichen Verrückungen oder des directen und des ihm zugeordneten reciproken.*

14. Bei vorstehenden Erörterungen dachte man sich das Wellencentrum als einen inneren Punkt des Mittels, der allseitig von gleichartiger Masse umgeben ist. Von besonderer Bedeutung erscheint nun noch der Fall, in dem das Mittel durch eine ebene Trennungsfläche hindurch von einer äusseren Welle sollicitirt wird.

Da die Integrale der Differentialgleichung (13) der entstehenden Welle auf beliebige Coordinatensysteme bezogen werden dürfen, so wähle man ein einziges solches, dessen Z-Axe mit der Richtung des Einfallslothes und dessen X-Axe mit der Schnittlinie von Einfallsebene und Trennungsfläche zusammenfällt. Und da ferner alle Theilchen dieser Welle, die gleich weit von der Trennungsfläche abstehen, die gleiche Amplitude haben, so läfst sich schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \mathfrak{A}_\xi e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \frac{2\pi}{T}\left\{\left(t - \vartheta' + \frac{z \cos R + x \sin R}{\omega}\right)\right\} \\
\xi' &= \mathfrak{A}'_\xi e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \frac{2\pi}{T}\left\{\left(t - \vartheta' + \frac{z \cos R + x \sin R}{\omega}\right) + \varDelta_\xi\right\} \\
\eta &= \mathfrak{A}_\eta e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \frac{2\pi}{T}\left\{\left(t - \vartheta' + \frac{z \cos R + x \sin R}{\omega}\right)\right\} \\
\eta' &= \mathfrak{A}'_\eta e^{-\frac{2\pi}{\lambda} q z} \cos \frac{2\pi}{T}\left\{\left(t - \vartheta' + \frac{z \cos R + x \sin R}{\omega}\right) + \varDelta_\eta\right\} \\
\zeta &= \ldots\ldots\ldots,\quad \zeta' = \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wo R den Brechungswinkel derselben bedeutet. Führt man diese Ausdrücke ein und setzt noch $\frac{v}{\omega} = \mathfrak{n}$, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}^2 - \mathfrak{q}^2 - 1 &= \frac{\Sigma m'(\mathfrak{A}'^2_\xi \cos\Delta_\xi + \mathfrak{A}'^2_\eta \cos\Delta_\eta + \ldots)}{m\mathfrak{A}^2} \\ 2\mathfrak{n}\mathfrak{q}\cos R &= \frac{\Sigma m'(\mathfrak{A}'^2_\xi \sin\Delta_\xi + \mathfrak{A}'^2_\eta \sin\Delta_\eta + \ldots)}{m\mathfrak{A}^2} \end{aligned}\right\} \quad (29).$$

Fällt nun die Richtung dieser Normalen mit der der Gleichungen (23) zusammen, so werden zunächst die rechten Seiten als für die bezügliche Richtung charakteristisch mit einander identisch. Folglich erhält man weiter:

$$\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{q}^2 = \nu^2 - q^2, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{q}\cos R = \nu q \quad . \quad . \quad (30)$$

und so lassen sich ν, q als die für senkrechte Incidenz ($R = 0$) eintretenden Werthe $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{q}_0$ definiren. Nennt man noch den Einfallswinkel E, so daſs die letzte der vorstehenden Gleichungen sich auch so schreibt:

$$\mathfrak{q} = \frac{\nu q}{\sqrt{\mathfrak{n}^2 - \sin^2 E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\,\mathrm{a}).$$

und substituirt diesen Ausdruck in der ersten, so kommt:

$$2\mathfrak{n}^2 = \nu^2 - q^2 + \sin^2 E + \sqrt{(\nu^2 - q^2 - \sin^2 E)^2 + 4\nu^2 q^2} \quad (31\mathrm{b}).$$

Es erscheint sonach das Brechungsverhältniss $\mathfrak{n} = \frac{\sin E}{\sin R}$ *derjenigen eintretenden Wellen, deren Normalen sich einer bestimmten gegebenen Krystallrichtung zuordnen, und damit zugleich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben, als eine Function des Einfallswinkels. Das Nämliche gilt vom Extinctionscoëfficienten* $\mathfrak{q}$.

15. Sind somit meines Erachtens sämmtliche Aufgaben der Lehre von der doppelten Brechung [1]) auf die Theorie des Mitschwingens der ponderablen Theilchen zurückgeführt, so dürfte es zur weiteren Klarstellung wohl zweckmäſsig seyn, die gewonnenen Resultate sofort auf einen möglichst einfachen Fall in Anwendung zu bringen.

Es sey nämlich das doppeltbrechende Mittel optisch-chemisch einfach, so daſs man zunächst in Gleichung (7)

1) Ueber die Möglichkeit der Zurückführung der Neumann'schen Formeln der Krystallreflexion auf Fresnel's Annahme bezüglich der Lage der Polarisationsebene vergl. den Aufs.: „Versuch einer Theorie" Verhandl. 1876, S. 226.

und dann weiter überhaupt die Summenzeichen fortlassen darf. Die Form der wahren Dispersionscurve $n' = f(\lambda)$ ist alsdann gegeben durch den Ausdruck [1]):

$$n'^2 = \tfrac{1}{2}\left(n'^2_0 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(n'^2_0 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2 - n'^2_\infty \frac{\lambda^2}{L^2}},$$

woraus man ableitet:

$$\left.\begin{aligned} n'^2 - n'^2_\infty &= \frac{1}{4L^2}\left(\sqrt{\lambda^2 - \lambda'^2_{,}} - \sqrt{\lambda^2 - \lambda''^2_{,}}\right)^2 \\ n'^2 - n'^2_0 &= \frac{1}{4L^2}\left(\sqrt{(\lambda+\lambda'_{,})(\lambda-\lambda''_{,})} - \sqrt{(\lambda-\lambda'_{,})(\lambda+\lambda''_{,})}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} n' &= \frac{1}{2L}\left(\sqrt{(\lambda+\lambda'_{,})(\lambda+\lambda''_{,})} \pm \sqrt{(\lambda-\lambda'_{,})(\lambda-\lambda''_{,})}\right) \\ n' &= \frac{2n'_\infty}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda'_{,}}{\lambda}\right)\left(1+\frac{\lambda''_{,}}{\lambda}\right)} \mp \sqrt{\left(1-\frac{\lambda'_{,}}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda''_{,}}{\lambda}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad (33).$$

Hierin bedeuten $\lambda'_{,}$, $\lambda''_{,}$ die Wellenlängen der Gränzen des Absorptionsstreifens des Mittels, und es sey analog λ_m die Wellenlänge der stärkst absorbirten Mitte desselben. Dieselben hängen mit der dispergirenden Kraft und der Constanten $L = l_m$ zusammen durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{n'^2_\infty - n'^2_{,}}{n'^2_\infty}\right)^2 &= \left(\frac{l^2_m - l'^2_{,}}{l^2_m}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_m - \lambda_{,}}{\lambda_m}\right)^2 = \frac{D'}{n'^2_\infty} \\ &= \frac{D'_x \cos^2 a + D'_y \cos^2 b + D'_z \cos^2 c}{(n'^2_\infty)_x \cos^2 a + (n'^2_\infty)_y \cos^2 b + (n'^2_\infty)_z \cos^2 c} \end{aligned}\right\} \quad (34).$$

Und da in:

$$\lambda_m = n'_\infty L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

die Gröfse L von der Orientirung unabhängig ist, so ist insbesondere für die sogenannten Hauptebenen der Absorptionsstreifen des Mittels in dem Mafse gegen das Roth zu verschoben, als das bezügliche Brechungsverhältnifs n'_∞ gröfser ist. Liegt der Streifen dem sichtbaren Spectrum nahe genug, um den Krystall im weissen Licht gefärbt erscheinen zu lassen, so wird diese Färbung von der Lage desselben abhängig, also für die verschiedenen Haupt-

1) Vergl. diese Ann. Erg.-Bd.

ebenen verschieden nuancirt seyn. *Der bezügliche Krystall zeigt dann die Erscheinung des Dichroismus oder Pleochroismus.*

Für das Innere des Absorptionsstreifens, für welches wegen $\lambda''_{,} > \lambda > \lambda'_{,}$ das Geschwindigkeitsverhältniſs n' complex wird, ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned} \nu'^2 - q'^2 - 1 &= n'^2_{\infty} - 1 + \frac{1}{2L^2}\left[\lambda^2 - \tfrac{1}{2}(\lambda'^2_{,} + \lambda''^2_{,})\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left(n'^2_0 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) - 1 \\ 2\nu' q' &= \frac{1}{2L^2}\sqrt{(\lambda''^2_{,} - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda'^2_{,})} \end{aligned}\right\} \quad 36).$$

Und daraus in Uebereinstimmung mit Gleichung (33a):

$$\nu' = \frac{1}{2L}\sqrt{(\lambda + \lambda'_{,})(\lambda + \lambda''_{,})}, \quad q' = \frac{1}{2L}\sqrt{(\lambda''_{,} - \lambda)(\lambda - \lambda'_{,})}.$$

Endlich erhält man zufolge Gl. (23) für die axialen Werthe von Amplitüdenverhältniſs und Phasenunterschied:

$$\frac{m' A'^2}{m A^2} = \sqrt{(\nu'^2 - q'^2 - 1)^2 + 4\nu'^2 q'^2}, \quad \operatorname{tang} \Delta' = \frac{2\nu' q'}{\nu'^2 - q'^2 - 1}.$$

Nach den Formeln (32), (34) und (36) lassen sich jetzt für alle Richtungen a, b, c und alle λ die zugehörigen $l' = \frac{\lambda}{n'}$, resp. Φ berechnen und sodann die zugehörigen Ellipsoide und Fortpflanzungsrichtungen construiren.

16. Für ein dioptrisch einfaches oder wenigstens symmetrisches anisotropes Mittel hat es ferner keine Schwierigkeit, die bezüglichen (Neumann'schen) Intensitätsformeln sowohl für das nicht absorbirte wie absorbirte Strahlungsgebiet in Anwendung zu bringen. Beschränkt man sich beispielsweise auf den Fall des Hauptschnittes einaxiger Mittel, so ist die Amplitüde $\mathfrak{A}_R$ des reflectirten Lichtes, wenn dieser Hauptschnitt mit der Einfallsebene als zugleich der Schwingungsebene der einfallenden Welle zusammenfällt, bestimmt durch:

$$\mathfrak{A}_R = -\frac{v \cos E - \sigma \cos R'}{v \cos E + \sigma \cos R'}\,\mathfrak{A}_E.$$

Es ist dies derselbe Ausdruck, welcher, freilich ohne Inbetrachtziehung der Dispersion, schon von Seebeck bestätigt ist. Ersetzt man darin den Brechungswinkel des Strahles (R') mittelst der Relation:

$$R' = R + \delta$$

durch den der Normalen (R) und ebenso σ durch $\frac{\omega}{\cos\delta}$, so schreibt sich auch:

$$\mathfrak{A}_s = -\frac{\sin E \cos E - \sin R \cos R + \sin^2 R \tang \delta}{\sin E \cos E + \sin R \cos R - \sin^2 R \tang \delta} \mathfrak{A}_e \quad (37).$$

Heifst endlich χ der Winkel zwischen Normale und optischer Axe, so läfst sich hierin mittelst der bekannten Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \tang \delta &= \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega^2} \sin\chi \cos\chi \\ \omega^2 &= \omega_x^2 \sin^2\chi + \omega_y^2 \cos^2\chi \\ \frac{\omega}{v} &= \frac{\sin R}{\sin E} = \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \quad (38).$$

Alles in E, χ, n_x, n_y ausdrücken, und für letztere hat man:

$$n_x^2 - (n^2_\infty)_x = \Sigma \frac{D'_x L^2}{l'^2 - L^2}, \quad n_y^2 - (n^2_\infty)_y = \Sigma \frac{D'_y L^2}{l'^2 - L^2},$$

in welchen Ausdrücken l' als gegeben vorausgesetzt wird.

Beim Eintritt in das Absorptionsgebiet wird der Index n zugleich mit l' complex, also:

$$n = \nu + q\sqrt{-1}.$$

Man hat alsdann die Intensitätsformel nach Substitution dieses Werthes in der von Fresnel vorgeschriebenen Weise weiter zu behandeln, d. h. durch Trennung des Reellen und Imaginären die wirkliche Amplitüde von der entstehenden Phasenverschiebung zu sondern. Auch kann man ν, q durch die Werthe $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$ des variablen wirklichen Brechungs- und Absorptionscoëfficienten sammt dem zugehörigen wirklichen Brechungswinkel ersetzen.

17. Am Schlusse dieser Abhandlung komme ich nochmals auf meine frühere experimentelle Prüfung der Con-

stanz des L^2 für die Hauptbrechungsindices der Krystalle zurück.

Nehmen wir an, der untersuchte Krystall sey symmetrisch gebaut, und seine Absorptionsstreifen liegen zum Theil im ultravioletten, zum Theil im ultrarothen Gebiete und zwar vom sichtbaren Spectrum möglichst weit entfernt. Man darf dann den Ausdruck:

$$n^2 - n_\infty^2 = -\Sigma \frac{\mathfrak{D}'\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{L}^2 - l^2} + \Sigma \frac{D'L^2}{l^2 - L^2},$$

in dem sich die erste Summe auf grofse, die zweite auf kleine L^2 beziehen möge, innerhalb des Gebietes der sichtbaren Wellen durch den folgenden ersetzen:

$$n^2 = -\Sigma \mathfrak{D}'\left(1 + \frac{l^2}{\mathfrak{L}^2}\right) + n_\infty^2 + \Sigma \frac{D'L^2}{l^2}\left(1 + \frac{L^2}{l^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{\mathfrak{D}'_1}{\mathfrak{L}_1^2} + \frac{\mathfrak{D}'_2}{\mathfrak{L}_2^2} + \ldots\right) l^2 + \left(n_\infty^2 - \mathfrak{D}'_1 - \mathfrak{D}'_2 - \ldots\right)$$

$$+ \frac{D'_1 L_1^2 + D'_2 L_2^2 + \ldots}{l^2}\left(1 + \frac{D'_1 L_1^4 + D'_2 L_2^4 + \ldots}{D'_1 L_1^2 + D'_2 L_2^2 + \ldots}\,\frac{1}{l^2}\right).$$

Und führt man jetzt die Abkürzungen ein:

$$\frac{\mathfrak{D}'_1}{\mathfrak{L}_1^2} + \frac{\mathfrak{D}'_2}{\mathfrak{L}_2^2} + \ldots = K,\quad n_\infty^2 - \mathfrak{D}'_1 - \mathfrak{D}'_2 - \ldots = N^2,$$

$$D'_1 L_1^2 + D'_2 L_2^2 + \ldots = D'L^2,\quad \frac{D'_1 L_1^4 + D'_2 L_2^4 + \ldots}{D'_1 L_1^2 + D'_2 L_2^2 + \ldots} = L^2,$$

so schreibt sich dafür einfacher:

$$n^2 = -Kl^2 + N^2 + \frac{D'L^2}{l^2} + \frac{D'L^4}{l^4}.$$

Was den relativen Einflufs angeht, den diese einzelnen Glieder auf die Gestaltung der Dispersionscurve ausüben, so ist der Erfahrung zufolge das erste Glied nur klein und liefse sich daher praktisch auch durch das einfachere $K'\lambda^2$ ersetzen. Den Haupteinflufs erlangen die beiden folgenden Glieder, während dann der des kleineren letzten Gliedes wiederum zurücktritt. Fafst man daher die beiden letzten, wie oben, rückwärts wieder in eines zusammen und setzt einen Augenblick: $N^2 - Kl^2 = N^2(1 - kl^2) = N'^2$, so erhält man die gleich brauchbare Formel:

$$n^2 - N'^2 = \frac{D' L^2}{l^2 - L^2}$$

oder die mit ihr identische:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N'^2} = - \frac{\frac{D'}{N'^4}}{l^2 - L^2\left(1 - \frac{D'}{N'^2}\right)}.$$

Hier dürfen nun rechter Hand diejenigen Glieder, die Kl^2 enthalten, als kleine Gröfsen höherer Ordnung vernachlässigt werden, und so erhält man, $D' = DN^2$ gesetzt:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{N^2(1 - kl^2)} - \frac{\frac{D}{N^2}}{l^2 - L^2(1 - D)}$$

als denjenigen Ausdruck, den ich in der oben erwähnten Abhandlung [1]) an Gläsern, Flüssigkeiten und Krystallen innerhalb des Bereiches der optischen und ultravioletten Strahlung numerisch geprüft und mit der Erfahrung in bester Uebereinstimmung gefunden habe.

Bei dieser Prüfung erhielt man für die Constante L, d. h. für die Quadratwurzel des Ausdruckes:

$$L^2 = \frac{D'_1 L_1^4 + D'_2 L_2^4 + \ldots}{D'_1 L_1^2 + D'_2 L_2^2 + \ldots}$$

mittelst der verschiedenen Hauptbrechungsindices eines und desselben Krystalles die folgenden Werthe ($\lambda_D = 0{,}5888$):

Kalkspath	Ord. Strahl	$L = 0{,}06035$
	Extr. Strahl	$= 0{,}06085$
Quarz	Extr. Strahl	$= 0{,}04298$
	Ord. Strahl	$= 0{,}04268$
Arragonit	Strahl α	$= 0{,}0453$
	Strahl β	$= 0{,}0428$
	Strahl γ	$= 0{,}0456$

also Zahlen, die bei der beträchtlichen Verschiedenheit der beiden Indices für Kalkspath sowie der Indices α und γ für Arragonit sehr befriedigend constant sind.

Dürfte man nun in der That von vornherein die Annahme machen, dafs entweder D'_1 unverhältnifsmäfsig gröfser

1) Diese Ann. Bd. 140, S. 1 und 177.

ist als D'_2, D'_3 ... und sonach diese letzteren gegen jenes vernachlässigt werden dürfen, oder dafs wenigstens das Verhältnifs dieser sämmtlichen dispergirenden Partialkräfte $D'_1 : D'_2 : D'_3$ ... für die beiden, resp. die drei Elasticitätsaxen eines Krystalles das nämliche bleibt, so wäre folgerichtig erwiesen, dafs $L_1^2 = \text{Const.}$, $L_2^2 = \text{Const.}$ ... Wäre indefs die erste Annahme richtig, also die angewandte empirische Formel im wesentlichen mit der theoretischen identisch, so würde zufolge des factisch erhaltenen beträchtlichen Werthes von $D' = D'_1$ wegen der dann gültigen Beziehung (34):

$$n_g^2 = N^2\left(1 \pm \sqrt{\frac{D'}{N^2}}\right)$$

das kleinere der beiden Gränzbrechungsverhältnisse kleiner als Eins werden, was offenbar nicht zulässig ist.

Und wenn andererseits bei dem gegenwärtigen Stand der Krystalloptik auch die zweite Voraussetzung vielleicht noch als gewagt erscheinen sollte, so läfst sich nunmehr ebenso gut die Schlufsfolge umkehren, d. h. gerade aus dem Ergebnifs der experimentellen Prüfung in Verbindung mit der vorgetragenen Theorie die Unabhängigkeit des Verhältnisses der dispergirenden Kräfte D'_1, D'_2 ... von der Orientirung als wahrscheinlich erschliefsen.

Bonn, im October 1876.

V. *Berichtigung zu einer Notiz des Hrn. Lommel betreffend die Theorie der Fluorescenz; von A. Wüllner.*

Im Anhange zu seiner interessanten Abhandlung über die Intensität des Fluorescenzlichtes (diese Ann. Bd. CLX, S. 94) beschwert sich Hr. Lommel über die Art, wie ich seiner Theorie der Fluorescenz in der dritten Auflage des

II. Bandes meiner Experimentalphysik Erwähnung thue. Da ich jedem das Recht zuerkenne, seine Unzufriedenheit mit der Art, wie ich seine Arbeiten behandele, auszusprechen, wie ich das Recht beanspruche in meiner Physik meine Ansicht über die betreffenden Arbeiten darzulegen und soweit es der Raum gestattet zu begründen, so würde ich auf diese Beschwerde nichts erwidern, wenn Hr. Lommel die Anmerkung, über welche er sich beschwert, und meine Darlegung der betreffenden Frage genau wiedergegeben hätte. Das ist indessen nicht der Fall. Hr. Lommel läßt die betreffende Anmerkung in folgender Form abdrucken:

„Eine vollständigere Theorie der Fluorescenz hat Lommel zu geben versucht. Abgesehen davon, daſs diese Theorie auf mehreren willkührlichen Annahmen beruht, steht sie mit dem nach allen bisherigen Erfahrungen als richtig anzusehenden Stokes'schen Satze, daſs das Fluorescenzlicht immer eine gröſsere Wellenlänge hat, als das erregende, im Widerspruch. Schon deshalb ist diese Theorie nicht annehmbar, es wird daher nicht nothwendig seyn näher auf dieselbe einzugehen."

Nachdem Hr. Lommel dann versucht hat zu zeigen, daſs er keine willkührlichen Annahmen gemacht hätte, fährt er fort:

„Der Hauptgrund jedoch, warum Hr. Wüllner meine Theorie für nicht annehmbar erklärt, besteht darin, daſs sie mit dem Stokes'schen Satze, „daſs das Fluorescenzlicht *immer* eine gröſsere Wellenlänge hat als das erregende" im Widerspruch steht. Nach diesem Einwande, sowie nach der entsprechenden Stelle im Text des erwähnten Lehrbuches zu urtheilen, scheint Hr. Wüllner der Meinung zu seyn, daſs Stokes jenen Satz aus seiner Theorie entwickelt habe."

Dieser Schein, der auf mich den Schein einer ganz unglaublichen Unkenntniſs der Stokes'schen Arbeiten werfen würde, ist aber nur dadurch möglich, daſs Hr. Lommel in der Wiedergabe der erwähnten Anmerkung

etwas ausläfst. Die betreffende Stelle in der Anmerkung heifst nämlich:

„Abgesehen davon .... steht sie auch mit dem nach allen bisherigen Erfahrungen *gemäfs* §. 45 als richtig anzusehenden Stokes'schen Satze .... im Widerspruch.

Dieser Zusatz „gemäfs §. 45" beweist unzweideutig, dafs ich den Stokes'schen Satz als einen rein experimentellen hinstelle, denn der Ausdruck Stokes'sches Gesetz oder Stokes'scher Satz kommt im Text nirgendwo aufser im §. 45 vor. Im §. 45 ist aber von einer Theorie der Fluorescenz gar nicht die Rede, sondern nur von den Versuchen von Stokes selbst, von Pierre, Lommel und Hagenbach, von denen die letztern die Versuche des Hrn. Lommel widerlegen, nach denen das Fluorescenzlicht sollte kleinere Wellenlängen haben können als das erregende Licht. (Die neueren Versuche des Hrn. Lommel aus dem Jahre 1876, in denen er nochmals auf diese Frage zurückkommt, lagen selbstverständlich im Sommer 1874, als ich die Optik schrieb, — sie erschien Anfangs 1875, — noch nicht vor.)

Ebenso ungenau ist der Hinweis des Hrn. Lommel auf den Text, aus welchem jener Schein sich ergeben soll. Von einer „Theorie der Fluorescenz" ist im Text nirgendwo die Rede, noch weniger von einem Satze den „Stokes aus seiner Theorie entwickelt habe."

Der betreffende §. 48, unter welchem die Hrn. Lommel mifsfällige Anmerkung steht, ist überschrieben: „*theoretische Andeutungen* über Absorption, Fluorescenz und chemische Action des Lichtes," die den Inhalt des Paragraphen angebende Seitenüberschrift heifst „Theorie der Absorption." Die Entwicklungen des Hrn. Stokes sind eingeführt mit den Worten:

„Es giebt nun besonders zwei Theorien der Absorption; .... die andere ist in neuerer Zeit von Stokes näher verfolgt, *und mit den Erscheinungen der Fluorescenz in Verbindung gebracht.*"

Die Erörterungen von Hrn. Stokes über die Art des

Fluorescenzlichtes, daſs dasselbe eine andere Wellenlänge haben könne als das erregende, sind dann als Widerlegung gegen den hieraus zu ziehenden Einwurf angeführt, daſs das Fluorescenzlicht nicht das Wiederhervortreten eines gewissen Quantums absorbirten Lichtes seyn könne. Als ein Zusatz zu diesen Erörterungen ist dann im Text weiter angeführt, weshalb nach der Ansicht von Stokes das Fluorescenzlicht eine gröſsere Wellenlänge haben müsse als das erregende. Denn es heiſst im Text:

„Daſs das fluorescirende Licht *nun immer eine kleinere Brechbarkeit* also eine gröſsere Undulationsdauer besitzt, hat, wie Stokes entwickelt, seinen Grund darin ....

Ich glaube, daſs man sich nicht vorsichtiger ausdrücken kann, um bei dem Leser nicht die Ansicht aufkommen zu lassen, daſs theoretische Erörterungen mehr leisten, als sie in Wirklichkeit thun, und daſs die Stokes'schen Erörterungen schon eine Theorie der Fluorescenz seyen, aus der sich ein Satz entwickeln lasse.

Das *sonderbarste* in den Bemerkungen des Hrn. Lommel ist aber der Schluſssatz: „Es ist ein sonderbarer Miſsgriff, daſs Hr. Wüllner diese Theorie, welche den Stokes'schen Satz, soweit er überhaupt gültig ist, auf ungezwungene Weise erklärt (was die Stokes'sche Theorie nicht vermag), gerade deshalb verwirft, weil sie angeblich mit diesem Satz in Widerspruch stehen soll. Dieser Satz ist deshalb äuſserst *sonderbar*, weil die Ansicht, daſs die Lommel'sche Theorie dem Stokes'schen Satz widerspreche, gar nicht zuerst von mir, sondern von *Hrn. Lommel selbst* ausgesprochen ist. In seiner Abhandlung über die Theorie der Fluorescenz, der letzten über Fluorescenz, welche er bis zum Jahre 1875 publicirte, sagt nämlich Hr. Lommel (Pogg. Ann. Bd. CXLIII, S. 44): „Die hier vorliegende Theorie der Fluorescenz giebt, wie es scheint, über alle hierher gehörigen Erscheinungen genügende Rechenschaft, *obgleich sie mit dem bisher als Grundgesetz angenommenen Stokes'schen Gesetze im Widerspruch steht.*" Eben wegen dieses von ihm selbst hervorgehobenen Widerspruchs

legte damals Hr. Lommel einen so hohen Werth auf seine Versuche mit Magdalaroth, welche das Auftreten kleinerer Wellenlängen im Fluorescenzlicht nachweisen sollten. Diese Versuche wurden dann von Hrn. Hagenbach widerlegt, ohne dafs Hr. Lommel gegen diese Widerlegung (bis Ende 1874) Einspruch erhob, so dafs Hr. Hagenbach seine grofse Arbeit über Fluorescenz mit dem Satze schlofs (Pogg. Ann. Bd. CXLVI, S. 538):

„Alle Theorien der Fluorescenz aber, aus denen das Stokes'sche Gesetz nicht folgt, oder aus denen gar eine Abweichung von dem Stokes'schen Gesetze sich ableiten läfst, können nach meiner Ansicht keinen Anspruch auf Annehmbarkeit machen."

Aachen, d. 8. März 1877.

VI. *Erwiderung auf die von Hrn. Chwolson der unitarischen Theorie der Elektricität gemachten Einwürfe; von E. Edlund.*

Hr. Chwolson hat einige nach seiner Ansicht berechtigte Bemerkungen gegen die Art und Weise, wie ich in meiner elektrischen Theorie die elektrodynamischen Erscheinungen deducirt habe, gemacht [1]). Hr. Chwolson giebt zu, dafs die bis jetzt von Anderen gegen die Folgerungen dieser Theorie gemachten Bemerkungen auf eine befriedigende Weise von mir beantwortet wurden. Er selbst wendet sich defshalb mit seinen Bemerkungen gegen die Ideen, worauf diese Theorie ruht, oder, wie er sagt, gegen die philosophische Begründung derselben.

Ich werde in dem Folgenden zeigen, dafs Hr. Chwolson nicht nur meine Herleitung der elektrodynamischen Erscheinungen, sondern auch die Bedeutung der Ampère'schen elektrodynamischen Formel mifsverstanden hat. Seine

1) Pogg. Ann. Ergänzungsbd. VIII, S. 140.

Bemerkungen gründen sich entweder auf dieses Mifsverständnifs, oder sie sind nur formeller Natur, und haben defshalb keine eigentliche Bedeutung für die Sache, wovon hier die Rede ist.

In meiner Abhandlung „*Théorie des phénomènes électriques*“ habe ich darzulegen gesucht, dafs die Abstofsung zweier elektrischer Moleküle nicht allein von dem Abstande zwischen ihnen, sondern auch von der relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig ist. Man kann aus theoretischen Gründen zeigen, dafs die Abstofsung eine Function von diesen Veränderlichen ist, und dafs diese Function gewisse bestimmte Eigenschaften besitzen mufs; die theoretische Anschauungsweise läfst aber die Form der Function durchaus unbestimmt. Man hat also, um über die Form der Function ins Reine zu kommen, keinen andern Ausweg, als die Erfahrung zu Hülfe zu ziehen, und dazu habe ich die Ampère'sche elektrodynamische Formel gewählt. Diese Formel ist aber bekanntlich ohne theoretische Betrachtungen aus den angestellten Versuchen hergeleitet und kann defshalb selbstverständlich keinen Anspruch darauf machen, unter allen Verhältnissen die Gröfse der Abstofsung vollständig auszudrücken, oder mit andern Worten, sie kann nicht als der wahre Ausdruck für ein wirkliches Naturgesetz angesehen werden. Die Ampère'sche Formel giebt also die Gröfse der Abstofsung nur innerhalb der Gränzen der Beobachtungen an, worauf dieselbe sich stützt, wie es in der That mit jeder andern rein empirischen Formel der Fall ist. Dieser wichtige Umstand darf keineswegs bei der Anwendung der Formel vergessen werden. Wenn man also mit Hülfe der Ampère'schen Formel den Ausdruck für die in Frage stehende Function bestimmt, so gilt der für diese erhaltene Ausdruck nur innerhalb der Gränzen für die Gültigkeit der genannten Formel. Möge man defshalb keineswegs glauben, dafs man auf diese Weise den wahren und exacten Ausdruck für die Abhängigkeit der Abstofsung von der Bewegung erhalte.

Wenn ein elektrisches Molekül m sich einem andern m' mit constanter Geschwindigkeit nähert, so mufs die Abstofsung in einem beliebigen Abstande r geringer seyn, als wenn m in demselben Abstande in Ruhe wäre. Man kann defshalb diese Abstofsung durch $\frac{mm'F}{r^2}$ ausdrücken, wo F eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Wenn die Geschwindigkeit abnimmt, mufs F sich der Eins nähern, wird aber erst dann $= 1$, wenn die Geschwindigkeit Null wird. Inwiefern F auch die veränderliche Gröfse r enthält, kann nicht im Voraus bestimmt werden, aber die Vergleichung mit der Ampère'schen Formel zeigt, dafs r darin nicht eingeht. Mit Rücksicht darauf, dafs bei der gegenseitigen Annäherung der Moleküle die Geschwindigkeit h als negativ betrachtet wird, kann man statt $-\frac{mm'F}{r^2}$ folgende bequemere Formel anwenden:

$$-\frac{mm'}{r^2}[1+\varphi(-h)];$$

oder, wenn $\frac{dr}{dt}$, welches bei der Annäherung der Moleküle negativ ist, statt $-h$ eingesetzt wird,

$$-\frac{mm'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)\right];$$

worin die Funktion φ negativen Werth haben mufs.

Wenn das Molekül m sich von m' mit constanter Geschwindigkeit entfernt, ist nach der theoretischen Anschauungsweise die Abstofsung in einem beliebigen Abstande r gröfser, als wenn es in Ruhe in demselben Abstand sich befände; das Gesetz aber für die Abhängigkeit der Abstofsung von dem Abstande und der Geschwindigkeit mufs dasselbe seyn, wie bei der Annäherung. Nur mufs man hierbei beachten, dafs die Geschwindigkeit nun positiv ist, und dafs folglich $+h$ statt $-h$ gesetzt werden mufs. Für diesen Fall bekommt man also:

$$-\frac{mm'}{r^2}[1+\varphi(+h)] \text{ oder } -\frac{mm'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)\right];$$

worin die Funktion positiven Werth haben mufs.

Wir nehmen nun an, dafs das elektrische Molekül *m* sich dem Molekül *m'* mit *abnehmender* Geschwindigkeit nähert, und wir wollen aus dem theoretischen Princip den Ausdruck für die Gröfse der Abstofsung in diesem Falle suchen. Zuerst denken wir uns, dafs das Molekül *m* sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt, und wollen annehmen, dass das Molekül in der endlichen Zeit Δt das endliche Wegestück Δr in dem Augenblick zurückgelegt hat, wo es zu dem Punkt, dessen Abstand vom Molekül *m'* gleich *r* ist, ankommt. Nach dem eben angeführten haben wir dann als Ausdruck für die Abstofsung:

$$-\frac{m\,m'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wir nehmen nun an, dafs das Molekül *m* sich mit *abnehmender* Geschwindigkeit dem Molekül *m'* nähert, aber dessen ungeachtet während der gleichen Zeit Δt das gleiche Wegestück Δr wie im vorigen Falle zurückgelegt hat. Die *mittlere* Geschwindigkeit des Moleküles wird dann durch $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ ausgedrückt. Die Frage ist nun, ob die Abstofsung in diesem Falle eben so grofs ist, als da die constante Geschwindigkeit $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ war, und ob die Abstofsung fortwährend durch dieselbe Formel (1) ausgedrückt werden kann. Es giebt nur *eine* Antwort hierauf, nämlich dafs die Abstofsung in diesem Falle gröfser ist, als da die Geschwindigkeit constant war. Weil das Molekül sich mit *abnehmender* Geschwindigkeit bewegt, so hat es zum Passiren der letzten Hälfte des Wegstückes Δr eine längere Zeit gebraucht als zum Passiren der ersten Hälfte. In der letzten Hälfte aber ist die Abstofsung der beiden Moleküle gröfser als in der ersten Hälfte, weil der Abstand zwischen ihnen geringer ist. In der Hälfte des Weges Δr, wo die Abstofsung am stärksten ist, hat das Molekül *m* sich also einen längeren Theil der Zeit Δt aufgehalten, als es gethan haben würde, wenn es den ganzen Weg Δr in der Zeit Δt mit constanter Geschwin-

digkeit passirt hätte, und in Folge dessen muſs die Abstoſsung, welche dabei entwickelt wird, gröſser seyn. Ungeachtet also $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ in dem Falle, daſs die Geschwindigkeit abnehmend ist, denselben Werth wie im ersteren Falle hat, so kann die Abstoſsung doch nicht durch die Formel (1) ausgedrückt werden, sondern ein Glied, das von der Aenderung der Geschwindigkeit oder $\frac{\Delta^2 r}{\Delta t^2}$ abhängig ist, muſs dazu addirt werden. Da das Molekül m sich dem Molekül m' nähert, ist $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ negativ, aber weil die Geschwindigkeit abnehmend ist, wird $\frac{\Delta^2 r}{\Delta t^2}$ positiv. Wir benutzen für die fragliche Function das Zeichen ψ, und weil man im Voraus nicht bestimmen kann, inwiefern diese Function nicht auch von r abhängig seyn kann, bezeichnen wir das Glied, das also zu der Formel (1) in diesem Falle addirt werden muſs, durch $\psi\left(r, \frac{\Delta^2 r}{\Delta t^2}\right)$. Der Ausdruck der Abstoſsung für den Fall, daſs m sich m' mit abnehmender Geschwindigkeit nähert, wird folglich:

$$-\frac{m m'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)+\psi\left(r, \frac{\Delta^2 r}{\Delta t^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad (2).$$

Wenn man nun von den endlichen Gröſsen Δr, Δt etc. zu den Grenzen übergeht, so erhält man:

$$-\frac{m m'}{r^2}\left[1+\varphi\left(\frac{d r}{d t}\right)+\psi\left(r, \frac{d^2 r}{d t^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad (3).$$

Auf die eben angegebene Weise kann man zeigen, daſs dieselbe Formel auch für den Fall gilt, daſs das Molekül m sich von m' mit *zunehmender* Geschwindigkeit entfernt, wobei jedoch zu beachten ist, daſs $\frac{dr}{dt}$ dann positiv ist, während $\frac{d^2 r}{dt^2}$, wie im vorhergehenden Fall, auch positiv ist. Ueberdies muſs noch beachtet werden, daſs die einzigen Fälle, welche bei veränderlicher Geschwindigkeit vorkommen können, die sind, daſs m sich m' mit abnehmender Geschwindigkeit nähert, oder daſs m sich von

m' mit zunehmender Geschwindigkeit entfernt; wobei natürlich vorausgesetzt wird, dafs die Stromstärke constant ist, oder, was dasselbe ist, dafs die Geschwindigkeit des Moleküls m in seiner Leitungsbahn keine Veränderung erleidet.

Wenn man nun mit Hülfe der Ampère'schen Formel die Functionen φ und ψ bestimmt, so erhält man, wie ich in meiner Abhandlung gezeigt, dafs:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(-h) &= -ah - \tfrac{1}{4}kh^2 \\ \varphi(+h) &= +ah - \tfrac{1}{4}kh^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\psi\left(r, \frac{d^2 r}{dt^2}\right) = + \frac{kr}{2} \frac{d^2 r}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die hier vorkommenden Constanten a und k sind aufserordentlich klein, jedoch ist a im Vergleich mit k sehr grofs. Was den Werth des letzteren betrifft, so hat man, wie bekannt, auf experimentellem Wege gefunden, dafs $\frac{1}{\sqrt{k}}$ gleich 440 Millionen Meter in der Secunde ist [1]).

Man möge sich nun keineswegs vorstellen, dafs die Ausdrücke für die betreffenden Functionen als in jedem Falle exact betrachtet werden können. Sie gelten natürlicher Weise nur innerhalb der Grenzen für die Gültigkeit der empirischen Formel, worauf sie sich gründen.

Was die Function φ besonders betrifft, so hat man dasselbe Resultat erhalten, wie wenn man diese Function in einer Reihe nach steigenden Potenzen der relativen

1) Man mufs die Geschwindigkeit, womit die elektrische Bewegung fortgepflanzt wird, und die Geschwindigkeit, womit ein elektrisches Molekül sich in seiner Leitungsbahn bewegt, genau von einander unterscheiden. Die erstere ist unabhängig von der Stromstärke, die letztere aber ist unter übrigens gleichen Verhältnissen damit proportional (*Théorie des phénomènes électriques* S. 10). Ueber die Gröfse der letzteren giebt es keine experimentelle Messungen, aber viele Umstände sprechen für die Annahme, dafs es praktisch unmöglich ist, auch mit der stärksten galvanischen Batterie, worin die Elektromotoren auf die zweckmäfsigste Weise mit einander verbunden sind, den elektrischen Molekülen eine Geschwindigkeit, welche sich 440 Millionen Meter in der Secunde nähert, zu geben.

Geschwindigkeit entwickelt und von dieser Reihe nur die zwei ersten Glieder beibehalten hätte.

Wir wollen nun die kritischen Bemerkungen des Hrn. Chwolson näher betrachten.

Hr. Chwolson behauptet, dafs die obenstehenden Formeln (4) zu den sonderbarsten Resultaten führen: Während der numerische Werth von $\varphi(-h)$ beständig mit h wächst, ist dies nicht der Fall mit $\varphi(+h)$; für $h=\frac{2a}{k}$ erreicht der Kraftzuwachs sein Maximum $\frac{a^2}{k}$, dann wird er mit wachsendem h kleiner; für $h=\frac{4a}{k}$ wird er Null und für gröfsere Werthe gar negativ. „Das ist ein Resultat, sagt Hr. Chwolson, welches entweder auf einen Fehler meinerseits basirt, oder, wenn richtig, kaum einen Vertheidiger finden dürfte." Hr. Chwolson hat aber wirklich einen Fehler begangen, indem er annimmt, dafs die Formeln (4) für jeden beliebigen Werth von h gültig sind. Nach dem obenstehenden ist man dazu gar nicht berechtigt.

Wir wollen dieses Verhältnifs durch ein Beispiel erläutern: Die Gravitation zweier Körper ist dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportinal. Für den Abstand r bezeichnen wir die gegenseitige Anziehung durch $\frac{a}{r^2}$, wo a eine Constante ist. In dem Abstande $r+\varrho$ ist die Anziehung $\frac{a}{(r+\varrho)^2}$, und wenn ϱ hinreichend klein ist, so können wir mit grofser Genauigkeit die Gröfse dieser Anziehung durch $\frac{a}{r^2}\left(1-\frac{2\varrho}{r}+\frac{3\varrho^2}{r^2}\right)$ ausdrücken. Wenn wir nun vergessen, dafs diese Formel nur für diejenigen Werthe von ϱ gilt, welche unterhalb einer gewissen Grenze liegen, so bekommen wir ebenfalls die sonderbarsten Resultate. Wir finden nämlich, dafs die Anziehung in dem Abstand r gleich grofs ist, wie in dem Abstande $r+\varrho=\frac{5r}{3}$ und dafs dieselbe für gröfsere Abstände wächst, statt abzunehmen.

Hr. Chwolson äufsert, „dafs, welche Vorstellung wir uns auch von der Kraftausströmung machen mögen, die logische Ueberlegung stets dahin führen wird, dafs der Kraftverlust bei der Annäherung gleich dem Kraftgewinn bei der Entfernung seyn mufs". Irgend einen Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung hat Hr. Chwolson indefs nicht angeführt. Das einzige, was sich aus theoretischen Gründen voraussagen läfst, ist, dafs der Kraftverlust in dem einen Falle *demselben Gesetze* wie der Kraftgewinn in dem andern folgen müsse. Es hängt aber ganz und gar von der Beschaffenheit dieses Gesetzes ab, inwiefern dabei der Kraftverlust und der Kraftgewinn gleich grofs werden können. Wenn man die Function φ durch ah ausdrücken könnte, so würde allerdings bei constanter Geschwindigkeit der Kraftverlust dem Kraftgewinn gleich sein. Dieses ist aber nicht der Fall. In dem Ausdrucke dieser Function findet sich auch ein zweites Glied, welches das Quadrat der Geschwindigkeit enthält, und deswegen können der Kraftverlust und der Kraftgewinn nicht gleich grofs werden. Ich weifs nicht, ob die „logische Ueberlegung" den Hrn. Chwolson zu demselben Resultate in dem folgenden analogen Falle führen würde: Wir bezeichnen durch $\frac{a}{r^2}$ die Anziehung zweier materiellen Körper in dem Abstande r von einander. Wenn der Abstand zwischen ihnen um ϱ vergröfsert wird, so entsteht eine Verminderung in der Anziehung, welche gleich $\frac{a}{r^2} - \frac{a}{(r+\varrho)^2}$ ist, und wenn der Abstand zwischen ihnen um dieselbe Weglänge vermindert wird, entsteht ein Kraftgewinn, welcher durch $\frac{a}{(r-\varrho)^2} - \frac{a}{r^2}$ ausgedrückt wird. Das Gesetz für die Kraftabnahme in dem einen Falle ist dasselbe, wie für die Kraftzunahme in dem andern, aber der Kraftverlust und der Kraftgewinn sind nicht gleich grofs. Man erhält sie beide dadurch, dafs man das eine Mal $+\varrho$ und das andere $-\varrho$ in die Formel, welche das Gesetz der Anziehung ausdrückt,

hineinsetzt. Auf dieselbe Weise verhält es sich mit der Behandlung der Formeln (4).

Hr. Chwolson nimmt an, dafs die Function ψ negativ und nicht positiv seyn mufs. Die von Hrn. Chwolson hierfür angeführten Gründe scheinen jedoch ihn selbst nicht vollkommen überzeugt zu haben, denn er äufsert: „Die von Hrn. Edlund mit ψ bezeichnete Function ist in den beiden allein in Betracht kommenden Fällen, wie es mir scheint, negativ und nicht positiv.“ Der oben angeführte Beweis, welcher auch in meiner Abhandlung, obgleich in einer etwas verschiedenen Form, vorkommt, legt es doch an den Tag, dafs die Function ψ wirklich positiv ist, und rechtfertigt auch die Weise, auf welche diese Function in die Formel eingeführt wurde.

Im §. 3 seines Aufsatzes sucht Hr. Chwolson zu beweisen, dafs ein Widerspruch stattfindet zwischen dem Princip, von dem ich ausgegangen, nämlich dafs für die Entwickelung und das Verschwinden der Abstofsung eine gewisse Zeit erforderlich ist, und dem Resultate, wozu dieses Princip führt, nämlich dafs die Abstofsung zwischen zwei elektrischen Molekülen bei der Annäherung geringer ist, als wenn die Moleküle in demselben Abstande in Ruhe wären; das heifst, dafs durch die Annäherung ein „Deficit“ in der Abstofsung entsteht. Hr. Chwolson kommt nach einigen Berechnungen zu folgendem Resultat: „Als die Geschwindigkeit h war, hat die äufsere Kraft in der kurzen Zeit τ nicht Zeit, das Deficit voll auszufüllen, indem ein sehr kleiner Theil desselben übrig blieb; als nun aber die Zeit die doppelte wurde, war die äufsere Kraft doch nicht im Stande, dieses winzige Ueberbleibsel des Deficites auszufüllen und ebenso wenig, als die Zeit die tausendfache der früheren war? Das ist logisch undenkbar und liegt darin ein Widerspruch, zu welchem die Grundideen der Edlund'schen Theorie unwiderstehlich hindrängen.“

Obgleich es durchaus nicht schwer wäre, zu zeigen, dafs diese Behauptung ganz unrichtig sey, wollen wir

statt dessen eine Thatsache aus der Erfahrung anführen, welche in der fraglichen Hinsicht einleuchtend ist.

Wir denken uns einen stillstehenden Stahlmagnet und dafs in der Nähe desselben sich ein beweglicher weicher Eisencylinder befindet. Wenn der Eisencylinder in einem bestimmten Abstand vom Magnet in Ruhe ist, so hat die Anziehungskraft eine bestimmte Gröfse. Denken wir uns nun, dafs der Eisencylinder sich dem Magnet von einem grofsen Abstand her nähert, so ist bekanntlich die Anziehung in jedem Abstand geringer, als wenn der Cylinder in demselben Abstand in Ruhe wäre. Die Abnahme, welche die Anziehung auf diese Weise erleidet, nimmt mit der Geschwindigkeit ab und wird erst vollkommen Null, wenn die Geschwindigkeit Null wird. Wenn dagegen der Eisencylinder sich vom Magnet entfernt, so ist die Anziehung in einem gegebenen Abstand gröfser als sie seyn würde, wenn der Eisencylinder in demselben Abstande in Ruhe wäre. Diese Vergröfserung nimmt ebenfalls mit der Geschwindigkeit ab und wird erst vollkommen gleich Null, wenn die Geschwindigkeit gleich Null wird. Die Erfahrung giebt also hier ein Beispiel von einer Kraftwirkung, welche derjenigen vollkommen analog ist, welche zwischen den elektrischen Molekülen stattfindet. Wenn man nun nach der Ursache fragt, warum die Anziehung bei der Annäherung kleiner und bei der Entfernung gröfser ist, als wenn der Eisencylinder sich in Ruhe befindet, so wird wohl Jemand ohne Bedenken antworten, dafs es ganz einfach davon herrührt, dafs für die Entwickelung und das Verschwinden der Anziehung eine gewisse Zeit erforderlich ist. Hr. Chwolson sieht jedoch in einer solchen Antwort einen logischen Widerspruch. Wovon diese Verzögerung in der Entwickelung und dem Verschwinden der Anziehungskraft herrührt, ist eine Frage, die hier nicht beantwortet zu werden braucht. Dies möge seine Ursache in der sogenannten Coërcitivkraft des Eisens oder in den Extraströmen oder in diesen beiden Umständen zusammen

haben; es ist uns genug, zu wissen, dafs die Anziehung sowohl für ihre Entwickelung, wie für ihr Verschwinden eine gewisse Zeit erfordert. Dasselbe Verhältnifs findet bei der Abstofsung der elektrischen Moleküle statt.

Stockholm, den 29. Januar 1877.

VII. *Ueber die Quetelet'schen Interferenzstreifen; von Dr. Karl Exner,*

Professor am. k. k. Realgymnasium im IX. Bezirke Wiens.

(Aus dem LXXI. Bande der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. Märzheft. Jahrg. 1875 im Auszuge mitgetheilt vom Verfasser.)

Die farbigen Streifen, welche das Bild einer Kerzenflamme in einem bestäubten Spiegel umgeben, gehören zu einer Klasse von Interferenzerscheinungen, welche in den Compendien der Optik als Interferenzen diffusen Lichtes zusammengefafst werden. Diese Phänomene sind von Newton [1]) entdeckt, später vielfach variirt, von Young nach

1) Newton erzeugte das Phänomen, indem er durch eine kleine Oeffnung eines Schirmes ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen auf einen Hohlspiegel fallen liefs, welcher durch Reflexion auf dem Schirme etwas abseits von der Oeffnung ein gleich grofses Bild derselben erzeugte. Es zeigten sich dann die Ringe, deren hellster die Distanzlinie der Oeffnung und ihres Bildes zum Durchmesser hatte, während die übrigen, theils inneren, theils äufseren Ringe sich concentrisch anreihten. Je dünner man bei diesem Experimente das Lichtbündel nimmt, desto deutlicher und zugleich lichtschwächer werden die Ringe. Ich habe mit Erfolg das Experiment in der Weise angestellt, dafs ich statt einer kleinen, kreisförmigen Oeffnung eine ringförmige Oeffnung von geringer Breite aber beträchtlichem Halbmesser benützte und den Hohlspiegel so stellte, dafs das Bild derselben sie genau deckte. Ein Strahl, welcher die ringförmige Oeffnung an einer Stelle passirt, trifft nach der Reflexion die diametral gegenüberliegende Stelle der Oeffnung und erzeugt ein Ringsystem, dessen Hauptring mit der Oeffnung selbst zusammenfällt. Indem dann die Strahlen, welche die Oeffnung des Schirmes an verschiedenen Stellen passiren,

der Undulationstheorie erklärt, von verschiedenen Physikern berechnet und schliefslich die Resultate der Rechnung durch eingehende Messungen von Mousson bestätigt worden. Gleichwohl scheint es mir, dafs die Theorie der Phänomene nicht in der ganzen Einfachheit dargestellt wird, deren sie sich erfreut, und dafs die Frage nach der Natur des Lichtes, durch welches die Phänomene erzeugt werden, noch nicht in zwingender Weise beantwortet ist. Man weifs, dafs die Rechnung dasselbe Resultat liefert, mag man die. Entstehung des Phänomens dem an den Staubpartikelchen diffus oder regelmäfsig reflectirten, oder aber dem an den Rändern derselben gebeugten Lichte zuschreiben. Da das einzige Experiment, welches in dieser Richtung gemacht worden ist, nicht frei ist von Einwürfen [1]), so möge im Folgenden auf einen Umstand näher

Ringsysteme erzeugen, welche sich decken, erreicht man einerseits durch die geringe Breite der ringförmigen Oeffnung grofse Deutlichkeit, andererseits durch die Menge der Lichtstrahlen, welche zur Erzeugung des Phänomens mitwirken, grofse Helligkeit, indem der Flächeninhalt des Ringes beträchtlich seyn kann.

1) Stokes sagt: „Die Polarisationsphänomene scheinen jedoch ein experimentum crucis an die Hand zu geben, um zu entscheiden, ob die Ablenkung des Lichtes aus seiner regelmäfsigen Bahn, welche die Bildung der Ringe veranlafst, eine Diffractionserscheinung oder ein Zerstreuen im eigentlichen Sinne des Wortes sey. Wenn polarisirtes Licht zerstreut wird, entweder durch Reflexion an weifsem Papier oder durch Transmission durch dasselbe, so verliert es seine Polarisation; allein, wenn polarisirtes Licht eine regelmäfsige Diffraction erleidet, so behält es seine Polarisation. Ich stellte eine kleine Flamme nahe dem Krümmungsmittelpunkte eines Hohlspiegels, dessen Oberfläche mit Milch und Wasser zubereitet worden, und brachte nun ein Nicol'sches Prisma dicht an die Flamme, damit das auf den Spiegel fallende Licht polarisirt sey. Bei Untersuchung mit einem Nicol erwiesen sich die Ringe vollkommen polarisirt."

Obgleich ohne Zweifel das polarisirte Licht nach seiner Reflexion vom Papier im Allgemeinen depolarisirt ist, so gilt dies doch nicht mehr in einem speciellen Falle, welcher eben ausschliesslich hier in Betracht kommt, wo nämlich das Licht streifend einfällt, und die reflectirten Strahlen, welche das Phänomen erzeugen, von der Richtung der einfallenden Strahlen sehr wenig abweichen. Läfst man polarisirtes Licht auf ein umgebogenes Stück Papier, *abc*, Fig. 3, Taf. VII,

eingegangen werden, welcher über die Natur der interferirenden Strahlen unzweideutigen Aufschlufs giebt. Eine kurze und, wie ich glaube, durchsichtige Darstellung der Theorie dieser Erscheinungen werde ich vorausschicken.

Ein dünnes Bündel paralleler Lichtstrahlen, *s*, Fig. 1, Taf. VII, dessen Durchmesser beispielsweise 5 Millimeter betrage, schliefse auf seinem Wege zwei kleine, gleiche, opake Körperchen ein, *a*, *b*, beispielsweise Lycopodiumpollen vom Durchmesser 0,03 Millim.; die Distanz der Körperchen sey sehr gering, beispielsweise die Longitudinaldistanz $bd = 2$ Mm., die Transversaldistanz $ad = 0,1$ Mm. In gröfserer Entfernung, beispielsweise 10 Meter, treffe der Strahl *s* auf einen Schirm, *S*. Von der Peripherie des Körperchens *a* werden gebeugte Lichtstrahlen ausgehen, welche auf dem Schirme ein Beugungsphänomen erzeugen werden, concentrische helle Ringe mit dem Mittelpunkte in *o*, woselbst der Schirm vom Strahle *s* getroffen wird. Die Ausdehnung dieser Beugungsringe, Fraunhofer'schen Ringe, wird beträchtlich seyn, hier z. B. wird für Licht von der Wellenlänge $\lambda = 0,0006$ Mm. die Ringbreite ungefähr 20 Ctm. betragen. In ganz gleicher Weise wird das Partikelchen *b* Beugungsringe erzeugen, und man wird wegen der angenommenen Gleichheit der Partikelchen, der geringen Entfernung derselben von einander und der grofsen Entfernung des Schirmes annehmen können, dafs die durch das eine Partikelchen erzeugten hellen Ringe genau auf die durch das andere erzeugten fallen werden. Es würde also aus der Mitwirkung des Theilchens *b* einfach eine Verstärkung des schon durch das Theilchen *a* erzeugten Phänomens hervorgehen, wenn nicht die beiden congruent aufeinander liegenden Phänomene interferiren würden, wodurch ein neues System dunkler

fallen, so dafs die eine Seite desselben, *ab*, beleuchtet ist und stellt man auf der anderen Seite das mit einem Nicol bewaffnete Auge *e* so, dafs man einen schmalen Streifen *bd* der beleuchteten Hälfte des Papiers wahrnimmt, so erweist sich das von diesem Streifen kommende Licht als vollkommen polarisirt.

Streifen entsteht. Ist *m* ein Punkt eines hellen Streifens des einen und des anderen der beiden sich deckenden Phänomene, so dafs die von *a* in der Richtung *am* ausfahrenden Beugungsstrahlen sich in *m* verstärken, und ebenso die in der gleichen Richtung, *bm*, von *b* ausfahrenden Beugungsstrahlen, so können immerhin die von *a* kommenden Strahlen durch die von *b* kommenden ausgelöscht werden. Die Wegdifferenz ist:

$$\varDelta = db - ae = ab\,.\,(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Da die Wegdifferenz von der einzigen variablen β abhängt, so werden die neu entstehenden dunklen Streifen sämmtlich Kegelschnittslinien seyn, entsprechend den Durchschnitten des Schirmes mit Kegelflächen, welche das Punktenpaar *a*, *b* zur Spitze und die Verbindungslinie *ab* der Punkte zur Axe haben.

Man erhält für die Breite der Streifen, welche nahe bei *o* vorbeigehen, näherungsweise:

$$x = \lambda\,.\,\frac{ao}{ad}.$$

In dieser Formel kommt aufser der Wellenlänge und der Distanz des Schirmes nur noch die Transversaldistanz *ad* der Partikelchen vor, so dafs die Breite der Streifen in der Nähe von *o* sich nicht beträchtlich ändern wird, wenn man das Partikelchen *b* etwa nach *d* hinauf verrückt, so dafs es neben *a* zu liegen kommt. Setzt man in die letzte Gleichung die entsprechenden Werthe, so erhält man für die Streifenbreite unter den gemachten Voraussetzungen:

$$x = 6 \text{ Centimeter.}$$

Das durch die beiden Partikelchen *a*, *b* auf einem sphärischen Schirme vom Radius *ao* erzeugte Phänomen besteht also in einem um den Punkt *o* sich verbreitenden Lichtscheine gebeugter Strahlen, welcher von zwei Systemen dunkler Ringe durchzogen ist. Die Ringe des einen Systemes liegen concentrisch um den Punkt *o*, in welchem der Schirm vom Strahle *s* getroffen wird, die des anderen Systemes concentrisch um den Punkt *c*, in welchem die

verlängerte Verbindungslinie *ab* der Partikelchen den Schirm trifft. Ist der Schirm eben, so sind die Ringe des zweiten Systemes Kegelschnittslinien, und zwar diejenigen, welche nahe bei *o* vorbeigehen, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln oder Gerade, je nachdem die Longitudinaldistanz der Partikelchen gröſser ist, als die Transversaldistanz, derselben gleich ist, kleiner ist, oder ganz verschwindet. Wenn die Longitudinaldistanz der Partikelchen nicht sehr beträchtlich gröſser ist als die Transversaldistanz, so haben die sichtbaren Theile der Ringe des zweiten Systemes eine sehr geringe Krümmung und erscheinen daher als geradlinig. Das soeben beschriebene Phänomen zeigt nun gleichzeitig zwei Phänomene, die Fraunhofer'schen Ringe und die Quetelet'schen Streifen.

Wenn man in Schwerd's „Beugungserscheinungen" die Abbildungen jener Beugungsphänomene nachsieht, welche durch zwei congruente, gleichliegende Oeffnungen entstehen, so findet man auſser dem Phänomene, welches durch eine der beiden Oeffnungen erzeugt wird, noch ein System dunkler Linien, welche auf der Verbindungslinie der beiden Oeffnungen senkrecht stehen. Diese unterscheiden sich nicht wesentlich von den Quetelet'schen Streifen.

Man wird dem Phänomene eine hinreichende Lichtstärke verleihen, wenn man mehr als ein Paar von Partikelchen an der Erzeugung desselben Theil nehmen läſst. Denkt man sich daher auſser dem Paare von Partikelchen *a*, *b* noch eine gröſsere Anzahl, etwa 500 eben solcher Paare, $a' b'$, $a'' b''$ . . . ganz in der Nähe jenes ersten Paares angebracht, wobei sämmtliche Patikelchen gleich groſs, sämmtliche Verbindungsgerade ab, $a'b'$, $a''b''$ . . . gleich groſs und parallel vorausgesetzt werden, so werden die einzelnen Paare das oben beschriebene Phänomen in ganz gleicher Weise erzeugen, und man wird das früher vom Paare *a*, *b* allein erzeugte Phänomen nun so oftmal übereinanderliegend haben, als Paare von Partikelchen vorhanden sind. Das Resultat der Interferenz der sich deckenden Elementarphänomene wird, da die Zahl derselben sehr groſs ist,

dieselben sich nur durch die Phase unterscheiden, die Phasendifferenzen selbst aber als völlig regellos vorausgesetzt sind, nach einem Principe der Optik einfach in der Verstärkung der Intensität des Elementarphänomens bestehen, so dafs durch das Zusammenwirken aller Paare von Partikelchen das Phänomen zur Sichtbarkeit gebracht wird, so wie das bei dem einfachen Phänomen der Fraunhofer'schen Höfe der Fall ist. Die Schwierigkeit liegt darin, die Partikelchen so anzubringen, dafs sämmtliche Gerade ab, $a'b'$... gleich grofs und genau parallel sind. Dies wird zutreffen, wenn man ein dünnes Glasplättchen, gh, mit Lycopodium bestäubt und bei ik einen Metallspiegel anbringt. Die vom Lichtstrahle s getroffenen Lycopodiumstäubchen, welche gleich grofs sind, stellen die Partikelchen a vor, während die Partikelchen b durch die Spiegelbilder der Partikelchen a ersetzt sind. Man mufs dann den Schirm bei S' anbringen, auf welchem das Phänomen entstehen wird, als käme der Lichtstrahl von s', und passirte zuerst die Partikelchen b, dann die Partikelchen a. Indem nämlich der Lichtstrahl s vom Spiegel reflectirt wird, um nach dem Punkte o' des Schirmes zu gelangen, durchsetzt er zweimal, vor und nach seiner Reflexion die Partikelchen a, und erzeugt hiedurch zweimal das Phänomen der Fraunhofer'schen Höfe. Indem die beiden Phänomene, das eine direct, das andere durch Reflexion sich auf den Schirm projiciren und sich daselbst congruent übereinanderlegen, interferiren sie und erzeugen hiedurch das zweite System dunkler Linien mit dem Mittelpunkte in c'. Man kann in dieser Weise das Phänomen sehr gut objectiv erhalten. In bequemerer Weise kann man statt des bestäubten Glasplättchens gh und des Metallspiegels ik einfach einen mit Lycopodium bestäubten ebenen Glasspiegel nehmen, statt des Lichtbündels s die divergirenden, von einem Lichtpunkte kommenden Strahlen und statt des Schirmes das Auge.

Der Umstand, dafs in dem Phänomene die Lage der dunklen Linien des einen Systemes nur von der Gröfse

der Partikelchen, diejenige der dunklen Linien des anderen Systemes nur von der Lage derselben abhängt, hat zur Folge, dafs unter Umständen nur das eine oder das andere der Systeme dunkler Streifen zur Erscheinung kommt.

Denkt man sich zwar die Partikelchen gleich grofs, aber sämmtliche Gerade *ab* nicht mehr parallel, so wird zwar jedes der Elementarphänomene mit beiden Systemen von dunklen Streifen versehen seyn; während jedoch die dunklen Streifen, welche den Fraunhofer'schen Ringen entsprechen, bei allen Elementarphänomenen gleiche Lage haben, findet dies nicht mehr statt bezüglich der dunklen Streifen des anderen Systemes, welche bei jedem der Elementarphänomene eine andere Lage haben, so dafs das Gesammtphänomen, welches aus der Uebereinanderlagerung der Elementarphänomene hervorgeht, nur die Fraunhofer'schen Ringe ohne die Quetelet'schen Streifen zeigt. Es würde eine Transversalverschiebung eines Theilchens *b* um die Hälfte des durchschnittlichen Abstandes zweier Partikelchen der Bestäubung genügen, um unter den gemachten Voraussetzungen das Centrum der Streifen des zweiten Systemes auf dem Schirme um 50 Ctm. zu verrücken, in einer Richtung, welche von der Richtung der Verschiebung des Partikelchens abhängt. Wenn man daher eine Glasplatte auf beiden Seiten mit Lycopodium bestreut, so erzeugt der durchfahrende Lichtstrahl die Fraunhofer'schen Beugungsringe ohne Quetelet'sche Streifen.

Sind umgekehrt zwar sämmtliche Gerade *ab* parallel, ändert sich aber die Gröfse der Partikelchen von Paar zu Paar, so haben die dunklen Streifen des zweiten Systemes bei allen Elementarphänomenen dieselbe Lage, während die der dunklen Streifen des ersten Systemes sich von einem Elementarphänomene zum andern ändert. Das Gesammtphänomen wird also die Quetelet'schen Streifen allein zeigen. Wenn man daher einen Spiegel mit ungleichförmigem Staube bestreut, so erhält man die Que-

telet'schen Streifen allein. Wenn man das Bild einer Kerzenflamme in einem bestäubten Spiegel betrachtet, so erscheint dasselbe von hellen Streifen umgeben. Befreit man den Spiegel von der hinteren Belegung und betrachtet die Kerzenflamme im durchgelassenen Lichte, so verschwindet das Phänomen in der Art, daſs nicht die hellen, vielmehr die dunklen Streifen verschwinden, also ein heller Schein übrig bleibt, welcher aus einer Uebereinanderlagerung zahlreicher, ungleich groſser Fraunhofer'scher Höfe entsteht, also ein Beugungsphänomen ist, welches im reflectirten Lichte in Folge seiner doppelten Erzeugung von dunklen Interferenzlinien durchsetzt wird.

Um das Phänomen der Quetelet'schen Streifen durch kleine Oeffnungen zu erzeugen an Stelle der undurchsichtigen Körpertheilchen, versah ich ein Stanniolblatt mit zahlreichen kleinen Nadelstichen, a, b, a', b', a'', b'' ...., derart, daſs die Abstände ab, $a'b'$ ... sämmtlich gleich und parallel waren, die Stärke der Stiche jedoch sich von Paar zu Paar änderte. Brachte ich das Stanniolblatt vor das Objectiv eines Fernrohres und richtete letzteres auf einen entfernten Lichtpunkt, so sah ich denselben umgeben von einem Phänomene, welches durchaus demjenigen glich, welches derselbe Lichtpunkt in einem bestäubten Spiegel zeigte. Macht man sämmtliche Stiche gleich stark, so sieht man beide Systeme von Streifen, entsprechend dem Lycopodium-Phänomene.

Ich komme zu der Erörterung über die Natur des Lichtes, durch welches die in Rede stehenden Phänomene erzeugt werden. Es wurde zwar im Vorhergehenden vorausgesetzt, daſs die Quetelet'schen Streifen durch gebeugtes Licht erzeugt werden; es würde aber die Voraussetzung, daſs dieselben durch das von den Partikelchen reflectirte Licht erzeugt werden, zu demselben Phänomene führen, und es muſs daher die Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen anderswoher genommen werden

Ein experimentum crucis bietet die gleichzeitige Erzeugung der Fraunhofer'schen Beugungsringe durch

Anwendung von Lycopodiumstaub, wo dann die beiden Phänomene je nach der Hypothese, von welcher man ausgeht, in entgegengesetzter Weise sich zu einander verhalten müssen. Entstehen die Quetelet'schen Streifen durch Interferenz congruirender Fraunhofer'schen Beugungsphänomene, so mufs das combinirte Phänomen dunkle Streifen auf hellem Grunde zeigen; entstehen die Quetelet'schen Streifen unabhängig von den Beugungsringen durch reflectirtes Licht, so mufs das combinirte Phänomen helle Streifen auf dunklem Grunde zeigen. Wollte man selbst annehmen, dafs die beiden verschiedenartig erzeugten Phänomene sich durch Interferenz stellenweise auslöschen, so könnten gleichwohl niemals die hellen Stellen des einen Phänomens durch die dunklen des anderen ausgelöscht werden. Indem ich das Phänomen in möglichst vollkommener Weise durch intensives homogenes Licht erzeugte, fand ich (siehe Figur 2, Tafel VII) die Beugungstheorie in unzweideutiger Weise bestätigt. Das Phänomen zeigt dunkle Linien auf hellem Grunde. Es unterscheidet sich von dem Beugungsphänomene durch zwei kreisrunde Oeffnungen nur durch die Krümmung der Streifen des einen Systemes, welche von der Longitudinaldistanz der Partikelchen eines Paares herrührt [1]).

Es ist klar, dafs man analoge Erscheinungen erhalten wird, wenn man statt des Beugungsphänomens der Fraun-

1) Ueber das gegenseitige Verhalten der beiden Phänomene der Fraunhofer'schen Ringe und der Quetelet'schen Streifen, wenn dieselben gleichzeitig durch Anwendung einer Lycopodiumbestäubung erzeugt werden, sagt Stokes, dafs „jegliche Farbe, die in dem aufserhalb des Interferenzsystemes liegenden Theil eines Lycopodiumringes erschien, in dem letzteren Systeme auf dem ganzen übrigen Theil eines um das Bild beschriebenen Kreises vorwaltete." Mousson sagt über die Erzeugung der Quetelet'schen oder Whewell'schen Streifen unter Anwendung von Lycopodiumbestäubung: „Freilich sieht man zugleich die Fraunhofer'schen Ringe in grofser Schönheit, allein die eine Erscheinung stört die andere nicht, weil die Whewell'schen Streifen den inneren dunklen Raum des ersten Ringes nicht überschreiten." Diese Angaben Mousson's sind mir nicht verständlich.

hofer'schen Höfe andere Beugungsphänomene zu Grunde legt. Immer wird das Wesen der sogenannten Interferenzerscheinungen an diffusem Licht darin bestehen, daſs an einem Beugungsphänomene durch doppelte Erzeugung desselben eine Neubildung dunkler Interferenzlinien eintritt.

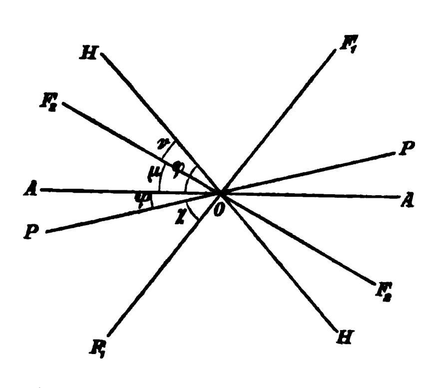
VIII. *Erklärung der Farbenringe einaxiger Krystallplatten im polarisirten Lichte bei Einschaltung Fresnel'scher Parallelepipede;*

von W. Pscheidl,

Gymnasialprofessor in Teschen.

Bezeichnen o und e die Längen der Halbaxen des ellipsoidischen Theils der Wellenfläche eines einaxigen Krystalls, von dem eine senkrecht zur Axe geschnittene planparallele Platte von der Dicke d unter einem relativ kleinen Einfallswinkel α von einem Lichtstrahl getroffen wird, ist τ die Schwingungsdauer, so ist beim Austritt aus derselben der Gangunterschied $\varDelta$ der senkrecht zu einander polarisirten Strahlen nach Airy:

$$\varDelta = \frac{e^2 - o^2}{2o} \frac{d}{\iota} \sin^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$



Treffe ein linear polarisirter Lichtstrahl in O die Gränzfläche eines $\perp$ zur optischen Axe geschnittenen einaxigen Krystalls unter einem sehr kleinen Einfallswinkel α, und stelle die Ebene der Figur diese Gränzfläche, PP die Pro-

jektion der Polarisationsebene des einfallenden Strahls, F_1F_1 die Projektion jener Ebene des ersten Fresnel's, welche auf dessen Reflexionsebene $\perp$ steht, HH, F_2F_2 und AA der Reihe nach die Projektionen des durch den einfallenden Strahl gelegten Hauptschnittes des Krystalls, der Ebene, welche im zweiten Fresnel $\perp$ steht auf dessen Reflexionsebene, und der Polarisationsebene des Analyseurs vor, seyen endlich die Schwingungen in diesem Lichtstrahl gegeben durch

$$a \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - s),$$

so werden dieselben bei dem Eintritte in das erste Fresnel'sche Parallelepiped zerlegt in:

$$a \cos\chi \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - s), \quad \perp \text{ zu } F_1F_1$$

und

$$- a \sin\chi \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - s), \quad \| \quad F_1F_1.$$

Nach dem Durchgang durch das erste Parallelepiped ist die eine Componente gegen die andere um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge verzögert. Die Gleichungen beider sind dann

$$a \cos\chi \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - s + \frac{\tau}{4}\right)$$

oder

$$a \cos\chi \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - s) \;..\; \perp F_1F_1.$$

Wird $\varphi + \psi + \chi = p$ und $\frac{2\pi}{\tau}(t - s) = \xi$ gesetzt, so erhält man für die Schwingungen im ordentlich und außerordentlich gebrochenen Strahl beim Austritt aus der Krystallplatte, in welcher der eine Strahl gegen den anderen um $\varDelta$ Wellenlängen verzögert wird:

$$a \cos\chi \cos p \cos \xi + a \sin\chi \sin p \sin \xi \qquad (o),$$
$$a \cos\chi \sin p \cos(\xi + 2\pi\varDelta) - a \sin\chi \cos p \sin(\xi + 2\pi\varDelta) \qquad (\varepsilon).$$

Es versteht sich wohl von selbst, daſs die zwei Strahlen, ein ordentlicher und ein auſserordentlicher, welche aus der zur ersten Gränzfläche parallelen zweiten Fläche in demselben Punkte austreten und sich nach derselben Richtung

weiter fortpflanzen, zwei verschiedenen einfallenden Strahlen angehören.

Diese zwei Strahlen gelangen nun in das zweite Fresnel'sche Parallelepiped. Hier werden deren Schwingungen wieder wie oben zerlegt in je eine Componente $\| F_2F_2$ und je eine $\perp$ darauf, und zwar so, dafs wieder die Componente $\perp F_2F_2$ um $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer beschleunigt wird. Daher erhält man für die Schwingungen $\perp F_2F_2$ beim Austritte aus dem Fresnel:

$$-a\cos\chi\cos p\cos\nu\sin\xi+a\sin\chi\sin p\cos\nu\cos\xi$$
$$-a\cos\chi\sin p\sin\nu\sin(\xi+2\pi\Delta)$$
$$-a\sin\chi\cos p\sin\nu\cos(\xi+2\pi\Delta)$$

und für jene $\| F_2F_2$

$$-a\cos\chi\cos p\sin\nu\cos\xi-a\sin\chi\sin p\sin\nu\sin\xi$$
$$+a\cos\chi\sin p\cos\nu\cos(\xi+2\pi\Delta)$$
$$-a\sin\chi\cos p\cos\nu\sin(\xi+2\pi\Delta).$$

Von diesen Schwingungen läfst der Analyseur (Nicol oder Turmalinplatte) nur die Componenten $\perp$ zu seiner Polarisationsebene, also $\perp AA$, durch, nämlich:

$$-a\cos\chi\cos p\cos\nu\cos\mu\sin\xi+a\sin\chi\sin p\cos\nu\cos\mu\cos\xi$$
$$-a\cos\chi\sin p\sin\nu\cos\mu\sin(\xi+2\pi\Delta)$$
$$-a\sin\chi\cos p\sin\nu\cos\mu\cos(\xi+2\pi\Delta)$$
$$-a\cos\chi\cos p\sin\nu\sin\mu\cos\xi$$
$$-a\sin\chi\sin p\sin\nu\sin\mu\sin\xi$$
$$+a\cos\chi\sin p\cos\nu\sin\mu\cos(\xi+2\pi\Delta)$$
$$-a\sin\chi\cos p\cos\nu\sin\mu\sin(\xi+2\pi\Delta).$$

Bringt man letzten Ausdruck auf die Form

$$A\sin\xi+B\cos\xi,$$

so ist die Intensität des aus dem Analyseur austretenden Strahles:

$$J=A^2+B^2.$$

Somit ist nach gehörigen Reductionen:

$$J=\frac{a^2}{2}\left\{\begin{aligned}&1+\cos 2\chi\cos 2p\cos 2\nu\cos 2\mu\\&+(\cos 2\chi\sin 2p\sin 2\nu\cos 2\mu+\sin 2\chi\sin 2\mu)\cos 2\pi\Delta\\&+(\cos 2\chi\sin 2p\sin 2\mu-\sin 2\chi\sin 2\nu\cos 2\mu)\sin 2\pi\Delta\end{aligned}\right\}\quad(2).$$

Wollte man die Schwächung des Lichtes beim Eintritt in die verschiedenen Mittel durch Reflexion berücksichtigen, so wäre dieser Ausdruck mit einem Factor $\varepsilon < 1$ zu multipliciren.

I. Ist $\chi = 0$, so geht die Gleichung 2 über in

$$J = \frac{a^2}{2} \Big\{ 1 + \cos 2p \cos 2\nu \cos 2\mu + \sin 2p \sin 2\nu \cos 2\mu \cos 2\pi\varDelta + \sin 2p \sin 2\mu \sin 2\pi\varDelta \Big\}$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von $p = \varphi + \psi + \chi$ ein, wo $\chi = 0$, so ist

$$J = \frac{a^2}{2} \Big\{ 1 + \cos 2(\varphi + \psi) \cos 2\nu \cos 2\mu + \sin 2(\varphi + \psi) \sin 2\nu \cos 2\mu \cos 2\pi\varDelta + \sin 2(\varphi + \psi) \sin 2\mu \sin 2\pi\varDelta \Big\} \quad (3).$$

Wird hier $\psi = 90^0$, so geht diese Gleichung über in

$$J = \frac{a^2}{2} \Big\{ 1 - \cos 2\varphi \cos 2\nu \cos 2\mu - \sin 2\varphi \sin 2\nu \cos 2\mu \cos 2\pi\varDelta - \sin 2\varphi \sin 2\mu \sin 2\pi\varDelta \Big\}$$

Setzt man in dieser Gleichung statt φ den gleichen Werth $\mu + \nu$, so stimmt sie genau mit jener Gleichung überein, welche Airy (Pogg. Ann. Bd. XXIII) unter der Voraussetzung erhielt, dafs nur ein Fresnel'sches Parallelepiped zwischen dem Polarisator und dem Krystall eingeschaltet war. Dieselbe Uebereinstimmung ergiebt sich, wenn auch noch $\mu = 45^0$ oder $\mu = 135^0$ gesetzt wird.

Wählt man in allen den erwähnten Fällen $\psi = 0$, so erhält man Erscheinungen, welche zu diesen complementär sind.

Wird endlich das zweite Parallelepiped so gestellt, dafs $\mu = 0$ ist, so erhält man

$$J = \frac{a^2}{2} \Big\{ 1 + \cos 2(\varphi + \psi) \cos 2\nu + \sin 2(\varphi + \psi) \sin 2\nu \cos 2\pi\varDelta \Big\} (4).$$

Diese Gleichung stimmt mit jener überein, welche Airy erhielt, wenn kein Parallelepiped eingeschaltet war.

Macht man $\psi = 90^0$, so verhält es sich ebenso, nur ist die Erscheinung zur vorhergehenden complementär.

II. Ist $\chi = 90^0$, so erhält man dieselbe Gleichung (3) wie für $\chi = 0$, und so werden die Erscheinungen ganz dieselben wie im vorhergehenden Falle.

III. Ist $\chi = 45^0$, so ist das aus dem ersten Parallelepiped kommende Licht circular polarisirt und man erhält

$$J = \frac{a^2}{2}\left\{1 + \sin 2\mu \cos 2\pi\varDelta - \sin 2\nu \cos 2\mu \sin 2\pi\varDelta\right\} \quad (5).$$

a) Da in dieser Gleichung kein ψ vorkommt, ist die Erscheinung von der gegenseitigen Lage von Polariseur und Analyseur unabhängig.

b) Ist $\mu = 0$ oder $\mu = 90^0$, so ist

$$J = \frac{a^2}{2}\left\{1 \mp \sin 2\nu \sin 2\pi\varDelta\right\}.$$

Es verhält sich so, als ob das zweite Parallelepiped nicht da wäre. Die Erscheinungen sind in beiden beobachteten Fällen einander complementär.

c) Ist $\mu = 45^0$, so ist

$$J = a^2 \cos^2 \pi\varDelta.$$

Dieser Werth von J ist von ν und φ vollkommen unabhängig, d. h. die Erscheinung wird ringsum gleiche Intensität haben und es wird sich weder ein schwarzes noch ein weifses Kreuz im Gesichtsfelde zeigen.

Es wird $J = 0$, so oft $\cos \pi\varDelta = 0$ wird. Dieses ist der Fall, wenn

$$\varDelta = \frac{(e^2 - o^2)\,d}{2\,o\,\tau} \sin^2 \alpha = \frac{2n+1}{2}$$

ist.

Somit erhält man als Gleichung der dunklen, beziehungsweise isochromatischen Ringe [1]), je nachdem man mit homogenem oder weifsem Lichte operirt

$$\sin \alpha = r = \sqrt{\frac{(2n+1)\,o\,\tau}{(e^2 - o^2)\,d}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

1) Airy, Pogg. Ann. Bd. XXIII, S. 223 oder Radicke, Handbuch d. Optik Bd. I, S. 418.

welche sich von jenen, die man ohne ein Fresnel'sches Parallelepiped erhält, wenn Polariseur und Analyseur einander || sind, nur dadurch unterscheiden, dafs sie durch kein Kreuz unterbrochen sind.

Um zu erfahren, was in der Mitte dieser Ringe vorgeht, hat man blofs $\alpha = 0$ zu setzen. Dann ist aber auch $\Delta = 0$ und $\cos \pi \Delta = 1$, also $J = a^2$; d. h. in der Mitte zeigt sich ein heller Fleck von gleicher Farbe mit dem Lichte, mit welchem man operirt.

d) Wird $\mu = 135^0$ gemacht, so wird $J = a^2 \sin^2 \pi \Delta$; die Erscheinung ist der vorhergehenden complementär.

e) Ist endlich μ von 0^0, 45^0, 90^0 und 135^0 verschieden, so ist

$$J = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 + \sin 2\mu \cos 2\pi\Delta - \sin 2\nu \cos 2\mu \sin 2\pi\Delta \right\}.$$

Der von der Farbe abhängige Theil der Intensität ist:

$$\frac{a^2}{2} \sin 2\mu \cos 2\pi\Delta - \frac{a^2}{2} \sin 2\nu \cos 2\mu \sin 2\pi\Delta.$$

Dieser Ausdruck kann unter die Form $-A \sin(2\pi\Delta - \vartheta)$ gebracht werden, wenn

$$\frac{a^2}{2} \sin 2\mu = A \sin \vartheta \text{ und}$$

$$\frac{a^2}{2} \sin 2\nu \cos 2\mu = A \cos \vartheta$$

gesetzt wird.

Dann ist

$$A = \frac{a^2}{2} \sqrt{\sin^2 2\mu + \sin^2 2\nu \cos^2 2\mu}$$

und

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{\sin 2\nu}.$$

Die Gleichung für die isochromatischen Ringe ist dann

$$\Delta = \frac{4n+1}{4} + \frac{\vartheta}{2\pi}.$$

Setzt man in diese aus Gl. (1) für Δ den Werth ein, so erhält man

$$\sin \alpha = r = \sqrt{\frac{2o\tau}{(e^2 - o^2)d} \left(\frac{4n+1}{4} + \frac{\vartheta}{2\pi} \right)}.$$

Für einen und denselben Krystall und Ring hängt χ blos von ϑ ab. ϑ wird um so kleiner, je kleiner μ und je gröſser ν wird, so lange sich μ und ν zwischen den Gränzen 0° und 45° befinden. Liegen die Werthe von μ und ν innerhalb der Gränzen 45° und 90°, so wird ϑ wachsen, wenn μ abnimmt, oder ν wächst und umgekehrt.

Um ein Bild von unseren Curven zu bekommen, nehmen wir eine bestimmte Stellung des Analyseurs und zweiten Parallelepipeds, also μ als constant (etwa kleiner als 45°) an, so wird für $\nu = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und

$$r = \sqrt{\frac{(2n+1) o \tau}{(e^2 - o^2) d}}$$

Für $0 < \nu < 45^\circ$ wird ϑ und somit auch r abnehmen, wenn ν wächst. Für $\nu = 45^\circ$ wird $\vartheta = 2\mu$ und

$$r = \sqrt{\frac{2 o \tau}{(e^2 - o^2) d}\left(\frac{4n+1}{4} + \frac{\mu}{\pi}\right)}.$$

Ist $45^\circ < \nu < 90^\circ$, so wird ϑ und r wachsen, wenn ν wächst. Ist $\nu = 90^\circ$, so ist ϑ wieder $= \frac{\pi}{2}$ und

$$r = \sqrt{\frac{(2n+1) o \tau}{(e^2 - o^2) d}}.$$

Für $90^\circ < \nu < 135^\circ$ ist $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ und r wächst weiter mit ν.

Ist $\nu = 135^\circ$, so ist $\vartheta = \pi - 2\mu$ und

$$r = \sqrt{\frac{2 o \tau}{(e^2 - o^2) d}\left(\frac{4n+3}{4} - \frac{\mu}{\pi}\right)}.$$

Für $135^\circ < \nu < 180^\circ$ nimmt ϑ und somit auch r wieder ab, wenn ν wächst. Wird $\nu = 180^\circ$, so wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und

$$r = \sqrt{\frac{o \tau (2n+1)}{(e^2 - o^2) d}}.$$

Es erscheinen also concentrische ellipsenähnliche Ringe, welche sich der Kreisform um so mehr nähern, je näher μ den Werthen 45° und 135° liegt, und in der Nähe von $\mu = 0^\circ$ oder $\mu - 90^\circ$ in durch ein mattes Kreuz getheilte Ringstücke übergehen, so zwar, daſs die Stücke der Ringe

im 1. und 3. Quadranten denen im 2. und 4. complementär sind.

Die Farbenfolge ist dieselbe, wie in den früheren Fällen.

Will man wissen, was in der Mitte dieser Ringe sich zeigt, so hat man blos in der Gl. 15 $\alpha = 0$ folglich auch $\Delta = 0$ zu setzen, wodurch

$$J = \frac{a^2}{2} \{1 + \sin 2\mu\}$$

wird.

Liegt der Werth von μ zwischen 0° und 90°, so ist $\sin 2\mu$ positiv und es erscheint die Mitte hell; liegt aber der Werth von μ zwischen 90° und 180°, so ist $\sin 2\mu$ negativ und es erscheint die Mitte unabhängig von der Farbe dunkel. Der Uebergang von der Dunkelheit zur Helligkeit und umgekehrt ist natürlich den Aenderungen von $\sin 2\mu$ entsprechend kein plötzlicher.

Die Projection der Reflexionsebene des zweiten Parallelepipeds und die Projection der zu dieser Reflexionsebene $\perp$ Ebene halbiren den rechten Winkel zwischen dem längsten und kürzesten Durchmesser dieser Ringe. Ist $\chi = 135°$, so sind die Erscheinungen denen für $\chi = 45°$ complementär.

IV. Ist endlich χ von 0, 45°, 90° und 135° (natürlich auch von 180°, 225°, 270° und 315°) verschieden, so ist das aus dem ersten Parallelepiped kommende Licht elliptisch polarisirt und

$$\begin{aligned} J = \frac{a^2}{2} \{1 &+ \cos 2\chi \cos 2(\varphi + \psi + \chi) \cos 2\nu \cos 2\mu \\ &+ [\cos 2\chi \sin 2(\varphi + \psi + \chi) \sin 2\nu \cos 2\mu \\ &\qquad + \sin 2\chi \sin 2\mu] \cos 2\pi\Delta \\ &+ [\cos 2\chi \sin 2(\varphi + \psi + \chi) \sin 2\mu \\ &\qquad - \sin 2\chi \sin 2\nu \cos 2\mu] \sin 2\pi\Delta\} \qquad (7). \end{aligned}$$

Der von der Farbe abhängige Theil ist

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \{ &[\cos 2\chi \sin 2(\varphi + \psi + \chi) \sin 2\nu \cos 2\mu \\ &\qquad + \sin 2\chi \sin 2\mu] \cos 2\pi\Delta \\ &+ [\cos 2\chi \sin 2(\varphi + \psi + \chi) \sin 2\mu \\ &\qquad - \sin 2\chi \sin 2\nu \cos 2\mu] \sin 2\pi\Delta\}. \end{aligned}$$

Dieser kann auf die Form $A \cos(2\pi\Delta - \vartheta)$ gebracht werden, wenn man

$$\frac{a^2}{2}[\cos 2\chi \sin 2(\varphi+\psi+\chi) \sin 2\nu \cos 2\mu + \sin 2\chi \sin 2\mu] = A \cos\vartheta$$

und

$$\frac{a^2}{2}[\cos 2\chi \sin 2(\varphi+\psi+\chi) \sin 2\mu - \sin 2\chi \sin 2\nu \cos 2\mu] = A \sin\vartheta$$

setzt. Dann ist

$$A = \frac{a^2}{2}\sqrt{[\sin^2 2\mu + \cos^2 2\mu \sin^2 2\nu][\sin^2 2\chi + \cos^2 2\chi \sin^2 2(\varphi+\psi+\chi)]}$$

und

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\cos 2\chi \sin 2(\varphi+\psi+\chi) \sin 2\mu - \sin 2\chi \sin 2\nu \cos 2\mu}{\cos 2\chi \sin 2(\varphi+\psi+\chi) \sin 2\nu \cos 2\mu + \sin 2\chi \sin 2\mu}.$$

Die Gleichung der isochromatischen Curven ist dann

$$2\pi\Delta = (2n+1)\pi + \vartheta$$

oder, wenn man statt Δ aus Gleichung (1) den Werth einsetzt

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2o\iota}{(e^2-o^2)d}\left(\frac{2n+1}{2} + \frac{\vartheta}{2\pi}\right)}.$$

Nimmt man beispielsweise χ sehr klein, $\psi = 90^0$ und $\mu = 45^0$ an, so ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\sin 2(\varphi+\chi)}{\operatorname{tg} 2\chi}.$$

Für $\varphi = -\chi$ ist $\vartheta = 0$ und

$$r = \sqrt{\frac{(2n+1)o\tau}{(e^2-o^2)d}}.$$

Ist $-\chi < \varphi < 0$, so ist ϑ negativ und wächst, wenn φ wächst (dem absoluten Werthe nach), daher nimmt r ab.

Ist $\varphi = 0$, so ist $\operatorname{tg}\vartheta = -\cos 2\chi$ und

$$r = \sqrt{\frac{2o\tau}{(e^2-o^2)d}\left[\frac{2n+1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}(\cos 2\chi)}{2\pi}\right]}.$$

Für $0 < \varphi < \frac{\pi}{4} - \chi$ bleibt ϑ negativ und wächst, wenn φ wächst, daher wird r abnehmen.

Ist $\varphi = \frac{\pi}{4} - \chi$, so ist $\operatorname{tg} \vartheta = - \operatorname{cotg} 2\chi$, also $\vartheta = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\chi\right)$ und

$$r = \sqrt{\frac{2\,o\,\iota}{(e^2 - o^2)\,d}\left(\frac{4n+1}{4} + \frac{\chi}{\pi}\right)}.$$

Für $\frac{\pi}{4} - \chi < \varphi < \frac{\pi}{2} - \chi$ nimmt ϑ ab, wenn φ wächst, bleibt aber immer noch negativ, somit wächst r.

Ist endlich $\varphi = \frac{\pi}{2} - \chi$, so ist ϑ wieder gleich Null.

Von da an wiederholen sich die Aenderungen von r.

Es erscheinen also wieder ellipsenähnliche concentrische Ringe, deren gröſster Durchmesser mit der Polarisationsebene einen Winkel $= -\chi$ bilden (χ in der bisherigen Bedeutung genommen).

Will man wissen, was sich in der Mitte dieser Ringe zeigt, so hat man blos in Gl. (7) $\psi = 90^0$, $\mu = 45^0$ und dann α, und somit auch $\Delta = 0$ zu setzen, wodurch

$$J = \frac{a^2}{2}\{1 + \sin 2\chi\}$$

wird. Die Mitte ist also hell.

Ich habe die angeführten Erscheinungen alle beobachtet und dieselben mit den durch Rechnung gewonnenen Resultaten übereinstimmend gefunden.

IX. *Elektrische Staubfiguren im Raum; von E. Lommel.*

(Ber. d. phys.-med. Soc. zu Erlangen. Mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

In der Absicht, die Vorgänge bei Entstehung der Lichtenberg'schen Figuren im *Raum* rings um den zu ihrer Darstellung dienenden Leiter kennen zu lernen, wurde ein $4^{mm},5$ dickes und 25^{cm} langes Messingstäbchen, welches am einen Ende zugespitzt war und am andern eine Mes-

singkugel von 22^{mm} Durchmesser trug, horizontal auf eine Platte von Hartkautschuk gelegt, so dafs das die Kugel tragende Ende noch einige Centimeter frei in die Luft hinausragte und dem Conductor der Elektrisirmaschine bis auf etwa 2^{cm} Entfernung gegenüberstand. Die Spitze war von den Rändern der Platte, welche auf einem hölzernen Tischchen lag, nach allen Seiten mindestens 4 bis 5^{cm} entfernt. Nun wurde ein (oder auch mehrere) Funken vom Conductor auf die Kugel überschlagen gelassen, sodann Conductor und Stäbchen durch Berührung entladen, und die Platte, nachdem das Stäbchen entfernt war, mit einem Gemisch aus Mennige und Bärlappsamen bestäubt, worauf folgende Staubfigur (Fig. 4, Taf. VII) zum Vorschein kam. Die Spur des Stäbchens ist durch einen rothen Streifen, die Stelle, wo die Spitze lag, durch einen runden rothen Fleck bezeichnet. Auf jeder Seite ist der Streifen von einem 5 bis 7^{mm} breiten dunklen Raum eingefafst, welcher von gelber Bestäubung begränzt, nach aufsen hin zahlreiche gelbe verästelte Strahlen entsendet. Der rothe Fleck bildet den Nabel einer nierenförmigen, mit rothem Staube spärlich bedeckten, dunklen Figur von etwa 6^{cm} Durchmesser, welche mit ihrem tiefen Ausschnitt auf jenem Streifen sitzt, wie ein Blatt auf seinem Stiel. Der nierenförmige Raum ist von gelber Bestäubung scharf begränzt, welche ebenfalls zahlreiche Strahlen nach aufsen schiefst. Die Figur entsteht erst im Augenblick des Entladens; man überzeugt sich davon, wenn man die Platte vor dem Ueberschlagen des Funkens bestäubt; im Momente des Ueberschlagens bilden sich alsdann, nach allen Seiten hin von dem Stab ausfahrend, die bekannten sogenannten „vertieften" Verästelungen; wird der Stab nun entladen, so sieht man in dem Staube um die Spitze herum die nierenförmige Figur entstehen und bei erneuter Bestäubung in voller Regelmäfsigkeit hervortreten. Die Figur ist demnach als eine *negative* anzusehen, denn beim Entladen tritt die positive Elektricität, welche beim Laden auf die Kautschukplatte geflossen war, durch die Spitze

wieder ein, was einem Ausströmen von negativer Elektricität gleichzuachten ist.

Noch merkwürdiger ist die *positive* Figur (Fig. 5, Taf. VII), welche in ganz gleicher Weise am negativen Conductor erhalten wird. Der rothgewölkte Stiel zeigt in seinem dunklen Mittelstreif kleine gelbe Sternchen. Er ist umgeben von einer glockenförmigen gelben Hülle, welche, etwa 1^{cm} hinter der Spitze beginnend, sich zu beiden Seiten des Stieles herabsenkt; ihr Umriſs ist nach vorn scharf begränzt, nach hinten aber verwaschen, und läſst daselbst zwischen sich und dem Stiel einen dunklen Raum frei. Die Stelle der Spitze ist durch ein Büschel gelber verästelter Strahlen bezeichnet und befindet sich ebenfalls innerhalb einer dunklen, schwach gelbgestäubten, nierenförmigen Figur, welche jedoch weit weniger tief ausgeschnitten ist als im vorigen Fall. Diese nierenförmige Figur ist nach auſsen hin von rother Bestäubung begränzt, welche sich vom Ansatzpunkte aus beiderseits gegen die gelbe Glocke herabsenkt, zwischen sich und dieser einen scharf begränzten dunklen Zwischenraum übrig lassend. Die Abbildungen (Fig. 4 und 5, Taf. VII) sind nach Abdrücken, welche von den bestäubten Platten genommen wurden, verkleinert gezeichnet.

Denkt man sich jede der beiden Figuren um ihren Stiel als Axe gedreht, so erhält man *elektrische Staubfiguren im Raum*, von welchen die gewöhnlichen Lichtenberg'schen Figuren nur specielle Querschnitte sind. Um die verschiedenen Querschnitte darzustellen, wurde der Messingstab in horizontaler Lage isolirt festgeklemmt, und eine Hartkautschukplatte senkrecht zur Längsrichtung des Stabes der Spitze in verschiedenen Entfernungen gegenübergestellt. Am positiven Conductor wurde in einer Entfernung von etwas mehr als 3^{cm} von der Spitze eine gelbe Bestäubung von unbestimmten Umrissen erhalten; 3^{cm} von der Spitze erschien ein kleiner, schwach röthlich bestäubter, dunkler Kreis, umgeben von nach einwärts scharfbegränzter gelber Bestäubung; dieser Kreis wird immer gröſser, je näher

an der Spitze die Platte aufgestellt wird; er erreicht seinen gröfsten Durchmesser von beiläufig 6^{cm} an der Spitze selbst; seine Mitte ist alsdann von einem runden rothen Fleck, der negativen Lichtenberg'schen Figur, eingenommen. Um die Querschnitte noch weiter verfolgen zu können, wurde die Kautschukplatte durchbohrt und über den Messingstab geschoben. Etwas hinter der Spitze bildeten sich zwei concentrische gelbe Kreise von resp. 50^{mm} und 17^{mm} Durchmesser, der erstere innen, der letztere aufsen scharf begränzt, beide durch einen dunklen, schwach roth bestäubten Zwischenraum von einander getrennt; das Loch selbst zeigte eine starke rothe Bestäubung. Schiebt man die Platte noch weiter auf den Stab, so erhält man stets um das Loch eine dunkle, von gelbem Staub mit verästelten Strahlen umgebene Kreisfläche von 15 bis 17^{mm} Durchmesser. Man erkennt sofort, dafs alle diese Formen aus der Gestalt der oben beschriebenen negativen Meridianfigur gefolgert werden können. Dasselbe gilt von den Querschnitten der positiven Figur; ein Querschnitt durch die Spitze selbst z. B. ergiebt die gewöhnliche positive Lichtenberg'sche Figur inmitten einer schwach gelb bestäubten Fläche, welche von einem rothen, nach innen scharf begränzten Kreise umgeben ist. Auch schiefe Schnitte, welche man erhält, indem man die Kautschukplatte unter irgend einem Winkel gegen das Messingstäbchen neigt, ergeben sich stets so, wie man sie nach der Gestalt der betreffenden Meridianfigur erwarten mufs.

Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dafs die Ursache der Lichtenberg'schen Figuren in einem rings um den Zuleiter entwickelten eigenthümlichen Bewegungszustand der Luft zu suchen sey, und unterstützen sonach die von Reitlinger und von Bezold vertretene Ansicht über die Entstehung dieser Figuren, während sie mit der Erklärung von Riefs, welche eine specifische Mitwirkung der Platte voraussetzt, kaum vereinbar seyn dürften.

Erlangen, 8. Mai 1876.

X. *Beiträge zur Geschichte der physiologischen Optik (Farbenkreisel und binoculares Sehen); von Wilhelm von Bezold.*

In dem berühmten und häufig citirten Werke des Arabers Alhazen über Optik begegnet man einigen Stellen, welche trotz des hohen Interesses, das sie bieten, der Aufmerksamkeit der neueren Gelehrten entgangen zu seyn scheinen, da sogar Helmholtz[1]) dieses Buches nur bei einer anderen Gelegenheit Erwähnung thut.

Es scheint demnach nicht unpassend, diese Stellen hier einer kleinen Besprechung zu unterziehen.

Dabei bemerke ich jedoch ausdrücklich, dafs auch Alhazen die im folgenden näher zu besprechenden Versuche und Anschauungen theilweise aus älteren Quellen und besonders aus der Optik des Ptolemaeus geschöpft zu haben scheint. Leider ist dieses Werk, welches unter allen antiken Schriften über Optik weitaus das interessanteste seyn dürfte, nie durch den Druck veröffentlicht worden. Man ist deshalb hinsichtlich der Kenntnifs seines Inhaltes nur auf gelegentliche Citate in Roger Bacon's *Opus majus*[2]) angewiesen, sowie auf einen kurzen Aufsatz von Delambre[3]), der die merkwürdigsten Stellen desselben nach in der Pariser Bibliothek vorhandenen Handschriften (sehr lückenhafte Uebersetzungen aus dem Arabischen in's Lateinische) in kurzem Auszuge mittheilt, sowie endlich noch auf eine Abhandlung von Caussin[4]).

Aus den in den genannten Schriften enthaltenen Bemerkungen geht hinreichend klar hervor, dafs Ptolemaeus sowohl die in Folge rascher Rotation eintretende

1) Physiol. Optik, S. 688.

2) *Edit. Jebb. Lond.* 1733. Hinsichtlich der hier erörterten Fragen *p.* 314 ff. u. *p.* 321.

3) *Connaissance des temps* 1816, *p.* 239 ff.

4) *Mém. de l'Acad. des Inrcriptions, Tom. VI, p.* 1 *ff.* 1822.

Farbenmischung kannte, als auch über binoculare Doppelbilder ziemlich eingehende Versuche angestellt hat.

Da jedoch Alhazen nach Angabe Delambre's diese Fragen ungleich klarer und eingehender behandelt hat, als Ptolemaeus, und da es, wie schon bemerkt, in Vergessenheit gerathen scheint, dafs derartige Untersuchungen schon in so alten Zeiten angestellt wurden, so halte ich es nicht für ungeeignet, sie hier kurz zur Besprechung zu bringen.

Zugleich möchte ich im Einklange mit Delambre hier den von Montucla[1]) gegen Alhazen erhobenen Vorwurf zurückweisen, als habe er in nicht zu rechtfertigender Weise das Werk des Ptolemaeus benutzt. Wie fern ihm dies lag, geht am besten daraus hervor, dafs er an jener Stelle, wo er von der Bedeutung der gebrochenen Strahlen für das Sehen spricht, ausdrücklich bemerkt, dies sey von keinem der Alten gesagt worden (*a nullo antiquorum dictum est*), womit er ja deutlich zu erkennen giebt, dafs er im Uebrigen Vieles aus älteren Quellen entnommen habe. Dies vorausgeschickt mögen nun die erwähnten Stellen selbst genauer betrachtet werden.

Die eine derselben enthält eine deutliche Beschreibung des *Farbenkreisels*, den Alhazen als Mittel benutzen will, um zu beweisen, dafs die Wahrnehmung der Lichtempfindung, oder, wie er sich ausdrückt, die Wahrnehmung von Licht und Farbe, einer Zeit bedarf, während wir jetzt in den nämlichen Versuchen den Beweis für die Nachwirkung des Lichteindruckes erblicken.

Alhazen baut nämlich[2]) seine Ansicht auf die Beobachtung:

„*quoniam quando in trocho*[3]) *fuerint tincturae diversae et illae tincturae fuerint lineae extensae ex medio*

1) *Histoire des Mathématiques*, 2nd *ed.*, *Tom. I*, *p.* 312.

2) *Opticae thesaurus. Alhazeni Arabis, libri VII, editi a F. Risnero. Basil.* 1572. *Lib. II*, *cap.* 20, *pag.* 36—37.

3) Im Originale ist keine gesperrte Schrift angewendet, hier schien es jedoch passend die wichtigsten Stellen noch besonders hervorzuheben.

superficiei ejus manifestae et ex parte colli ejus usque ad finem suae circumferentiae et trochus fuerit circumgyratus motu forti et aspexerit ipsum quis comprehendet omnes colores ejus quasi unum diversum ab omnibus coloribus ejus, qui sunt in eo quasi esset color compositus ex omnibus coloribus illarum linearum.“

Noch viel interessanter aber als die eben mitgetheilte Beschreibung dieses Apparates, der in der Folgezeit so grofse Bedeutung gewonnen hat, sind Alhazen's Untersuchungen über das Sehen mit zwei Augen. Sie ziehen sich durch eine Reihe von Capiteln des dritten Buches und enthalten nicht nur sehr schöne Beobachtungen über binoculare Doppelbilder, sondern auch scharfsinnige theoretische Untersuchungen über diesen Gegenstand, wobei sich Alhazen einer Hypothese bedient, welche der modernen Lehre von den identischen Netzhautpunkten aufserordentlich nahe steht.

Dieser Ausspruch mag zwar auffallend erscheinen, wenn man erwägt, dafs Alhazen nicht die Netzhaut als das eigentlich empfindende Organ ansah, sondern vielmehr der Linse diese Rolle zuwies. Trotzdem ist die Analogie zwischen den genannten Anschauungen vorhanden, wie man sofort einsieht, wenn man sich mit den Vorstellungen Alhazen's über das Sehen etwas genauer vertraut macht.

Vor Allem ist er sich darüber vollkommen klar, dafs es für das Zustandekommen einer deutlichen Wahrnehmung unerläfslich sey, dafs jedem Objectpunkte nur *ein* gereizter Punkt des Sehorganes entspreche. So sagt er z. B. *Lib. I*, *prop.* 15: „*Visus e singulis suae superficiei punctis singula visibilis puncta videt*“ oder *Lib. VII*, *prop.* 37: „*quodsi membrum sensibile sentiret ex quolibet puncto suae superficiei omnem formam ad se venientem: tum sentiret rerum formas mixtas.*

Diese Empfindung selbst aber denkt er sich in die Vorderfläche der Linse verlegt, deren Centrum er mit jenem der Hornhautoberfläche und des ganzen Auges zusammenfallend annimmt. Dementsprechend findet er auch für

jeden Punkt des betrachteten Gegenstandes einen Strahl, welcher die brechenden Flächen senkrecht trifft und demnach ungebrochen hindurchgehen müſste, nämlich den nach dem Augencentrum gerichteten, und diesen Strahl betrachtet er als den maaſsgebenden. Er sagt nämlich: *Lib. I, prop.* 18: „*Visio distincta fit rectis lineis a visibili ad superficiem visus perpendicularibus: Itaque singula visibilis puncta eundem obtinent situm in superficiei visus, quem in visibili*".

Dieser Strahl ist nichts anderes, als die heute sogenannte Richtungslinie und Alhazen's Augenmittelpunkt entspricht dem Kreuzungspunkte der Richtungslinien in Listing's reducirtem Auge. Die den verschiedenen Punkten eines Objectes angehörigen Richtungslinien schneiden aber offenbar jede um diesen Kreuzungspunkt geschlagene Kugelfläche in einer ähnlichen Figur, wie die Netzhaut, und so erklärt es sich, daſs Alhazen durch Benutzung eines solchen Schnittes zu denselben Resultaten gelangte, als wenn er die ihm unbekannten Netzhautbilder zur Grundlage seiner Betrachtungen gewählt hätte.

Nebenbei mag jedoch noch bemerkt werden, daſs Alhazen die vorwiegend mathematische Bedeutung dieses Richtungsstrahles richtig erkannte und wohl wuſste, daſs auch die anderen von einem Objectpunkte ausgehenden Strahlen zum Sehen beitragen. Denn, wenn ihm gleich die Rolle, welche die Brechung im Auge spielt, nicht ganz klar war, so führt er doch selbst den Versuch an, daſs man einen feinen Gegenstand z. B. eine Nadel nahe am Auge zwischen Object und Augenmittelpunkt bringen kann ohne das Object dadurch unsichtbar zu machen (*Lib. VII, prop.* 37).

Wenn wir uns auſserdem noch daran erinnern, daſs Alhazen einen durch das Centrum des Auges und den Pupillenrand gelegten Kegel mit dem Namen der Sehpyramide (*pyramis optica*) bezeichnet und die durch Netzhautgrube und genanntes Centrum gehende Gerade als Augenaxe oder als Axe der Sehpyramide, so wird es leicht

werden, die folgenden Sätze über das binoculare Sehen zu verstehen:

Lib. III, prop. 2: „*Axes pyramidum opticarum utriusque visus per centrum foraminis uveae transeuntes in uno visibilis puncto semper concurrunt et sunt perpendiculares superficiei visus*".

Lib. III, prop. 4: „*Cum autem duo visus fuerint moti super rem visam et duo axes fuerint translati ab illo puncto et fuerint moti simul per superficiem visi: tunc positio cujuslibet puncti illius visi et positio punctorum propinquorum illi in respectu duorum visuum apud conjunctionem duorum axium in ipso erit positio consimilis valde. Et forma cujuslibet partis visi apud motum duorum axium per superficiem erit in duobus locis positionis consimilis apud duos visus: et sic forma omnium partium visi apud motum et intuitionem erit consimilis dispositionis apud ambos visus*".

Dagegen bemerkt er in dem darauf folgenden Capitel, daſs bei Convergenz der Augenaxen in einem nahe gelegenen Punkte für ferner liegende die eben erwähnte Bedingung nicht mehr erfüllt sey und sie deshalb nicht mehr genau erkannt werden können. Er sagt von den so gelegenen Objecten: „*non omnes partes eorum erunt consimilis positionis in remotione a duobus axibus: nec forma erit certificata.*

Und indem er diesen Gedanken weiter verfolgt, kommt er im 11. Capitel (*Lib. III, prop.* 11) zu dem Resultate:

„*Visibile intra axes opticos situm: vel uni visui recte reliquo oblique oppositum: videtur geminum.*"

Die Demonstration dieses Satzes schlieſst mit den Worten:

„*Et forma hujusmodi visorum instituitur in duobus visibus in duobus locis diversae positionis et duae formae, quae instituuntur in duobus visibus pervenient ad duo loca diversa concavitatum communis nervi et erunt duo formae et non superponentur sibi. Et similiter cum fuerit*

visum in altero axe et extra reliquum forma ejus instituetur in concavitate communis nervi in duobus locis una scilicet in centro et alia obliqua a centro non superponentur sibi.“

In dem hierauf folgenden Capitel werden nun die eben aufgestellten Sätze durch eine Reihe von Versuchen erläutert. Hierbei bediente sich Alhazen eines horizontalen Brettes, das einen Einschnitt für den Nasenrücken besitzt und auf dem die verlängerte Medianlinie verzeichnet ist; eine Spitze in derselben dient zur Fixation und eine verschiebbare Nadel als Versuchsobject.

XI. *Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.*

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dafs die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestattet. Die erwähnten Abhandlungen umfassen aufser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich

erzeugten Begränzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniſs des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> *Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität* (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) *und der durch Bildungshemmnisse oder äuſsere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.* Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet seyn, das auf der Auſsenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des Jahres 1879 und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin. Stallschreiberstr. 47

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VIII. ERGÄNZUNG. Stück 4.

I. *Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit schlechtleitender Körper, insbesondere der Gesteine und Hölzer; von* Emil Less *aus Königsberg i. Pr.*

(Inauguraldissertation.)

Während die Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle seit längerer Zeit mit großer Genauigkeit bestimmt worden ist, und ihre Untersuchung höchstens noch nach einzelnen Richtungen hin einer Vervollständigung bedürftig wäre, liegen für die Werthe dieser Constanten bei den schlechtleitenden Substanzen, den Krystallen, den dichten Gesteinen, den Hölzern und anderen anorganischen und organischen Stoffen bis jetzt noch wenige umfassendere Messungen vor. Bei der besten und am vollständigsten ausgebildeten Untersuchungsmethode für gute Wärmeleiter wird die Leitungsfähigkeit durch die Quotienten der Temperaturen mehrerer hintereinander liegender Punkte eines langen, an dem einen etwas entfernten Ende erwärmten, frei nach außen strahlenden Stabes bestimmt. Da dieselben bei schlechten Wärmeleitern alle nicht sehr bedeutend von einander abweichen, so stellen die so an verschiedenen schlechtleitenden Substanzen vorgenommenen Messungen Despretz's[1]) und v. Helmersen's[2]) wohl nur eine Reihenfolge derselben hinsichtlich der Wärmeleitung fest, die um so weniger als zuverlässig betrachtet werden kann, als die Störung der Continuität der Stangen an den Beobachtungsstellen hier einen noch erheblicheren Einfluß haben mußte, als z. B. bei Metallen, bei welchen

1) *Ann. d. chim. et phys. XXXVI, p.* 422.
2) Pogg. Ann. LXXXVIII, S. 461.

jedes in eine Aushöhlung gesenkte Thermometer die mittlere Temperatur eines gröſseren Gebietes angiebt.

Diesen Weg muſs man daher für schlechte Wärmeleiter verlassen und dieselben in ungleich erwärmten Massen von mehr als einer vorherrschenden Dimension untersuchen, indem man die Geschwindigkeit des Wärmedurchgangs von der einen Fläche zur anderen beobachtet. Tyndall[1]) und Pfaff[2]) erwärmten kleine Würfel, der eine von organischen Substanzen, besonders Hölzern, der andere von Krystallen, an einer Seite und setzten die in den ersten (gleichen) Zeiten zur entgegengesetzten Seite fortgeführten Wärmemengen direct, resp die zum Durchgang der ersten (gleichen) Wärmemengen erforderlichen Zeiten umgekehrt proportional ihren Leitungsfähigkeiten in der zur erwärmten Seite senkrechten Richtung. Diese einfache Annahme dürfte jedoch gerade bei denjenigen Substanzen am wenigsten gerechtfertigt seyn, welche in verschiedenen Richtungen verschiedene Leitungsfähigkeiten besitzen.

Um strenger die Fortführung der Wärme in der Richtung der erhitzten Fläche vernachlässigen zu können und auch von der Wärmecapacität der verschiedenen Substanzen unabhängig zu seyn, maaſsen Herschel und Lebour[3]) den stationären Wärmestrom von der Wärmequelle zum gegenüber befindlichen Calorimeter durch dünne Platten aus einer Anzahl von Gesteinen, mit Anwendung der unverbesserten Péclet'schen Methode, deren Mängel auch ihre ersten Versuche theilten. Zur Vermeidung derselben beobachteten sie dann noch direct die Temperaturdifferenz zu beiden Seiten der Platten auf zweierlei Weisen, die jedoch ganz verschiedene Werthe ergaben, und vergröſserten die Geschwindigkeit des Wärmedurchgangs, indem sie durch etwas Quecksilber Platte und Calorimeter zur besseren Berührung brachten und das Wasser des

1) *Phil. Mag.* (4), *V.*, *p.* 138.
2) Pogg. Ann. CXIII, S. 647.
3) *Rep. Brit. Assoc.* 1873, *p.* 223.

Letzteren durch Quecksilber ersetzten. Damit aber auch dieses überall die gleiche Wärmezufuhr erhielte, welche durch ein eingesenktes Thermometer gemessen wurde, müſste die Masse des Quecksilbers so gering gewählt werden, daſs wegen seiner verhältniſsmäſsig groſsen Oberfläche der von Strahlung und Luftberührung herrührende Verlust an Wärme keineswegs mehr zu vernachlässigen wäre. In diesem Falle wird sich indessen ein neuer stationärer Zustand einstellen, bei dem das Quecksilber und der untersuchte Körper constante Temperatur annimmt, und durch einen jeden den Endflächen parallelen Querschnitt des Letzteren so viel Wärme hindurchgeht, als das Erstere nach auſsen hin verliert.

Auf dem zuletzt bezeichneten Wege hat Hopkins[1]) eine umfangreiche Untersuchung über die Leitungsfähigkeit verschiedener Substanzen, besonders der Gesteine vorgenommen, indem er dieselben in Form von dünnen Platten auf den flachen, horizontalen, mit etwas Quecksilber gefüllten Deckel eines Dampfkessels legte und auf ihre obere Seite, um die ein eiserner Rand befestigt war, eine hinreichende Menge Quecksilber goſs, um die Kugel eines in der Mitte befestigten Thermometers T_2 zu bedecken. Zur möglichsten Verhütung der seitlichen Ableitung der Wärme wurde jede Platte mit einem etwas weiteren, ebenfalls auf dem Dampfkessel liegenden Ringe von einer ähnlichen Steinart umgeben und der Zwischenraum zwischen Platte und Ring durch Baumwolle ausgefüllt, durch welche an einer Stelle ein in das untere Quecksilber tauchendes Thermometer T_1 hindurchging. Die Platte und der Ring wurden durch Wasserdampf so lange erwärmt, bis der stationäre Temperaturzustand eingetreten war, und dann der Stand der Thermometer T_1, T_2 und eines dritten in der Nähe befestigten Thermometers T' abgelesen.

Bezeichnet zur Zeit t die Temperatur eines beliebigen um die Länge x von der unteren Endfläche entfernten

1) *Philos Trans.* 1857, *p.* 805.

Punktes der untersuchten Platte, t_1 und t_2 die Temperaturen seiner unteren und oberen Endfläche, die gleich denen des den Dampfkessel und die Platte bedeckenden Quecksilbers angenommen wurden, τ die Temperatur der Umgebung, h die Dicke, k die Leitungsfähigkeit der Platte und c das Strahlungsvermögen des Quecksilbers für Wärme, so ergeben die Fourier'schen Gleichungen der Wärmeleitung für $z = \infty$:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \qquad t_2 = \tau - \frac{k}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_2.$$

Durch zweifache Integration der ersten dieser Gleichungen von $x = 0$ bis $x = h$ erhält man mit Benutzung der zweiten:

$$k = c\,\frac{h\,(t_2 - \tau)}{t_1 - t_2}.$$

Auf diese Weise werden also die Leitungsfähigkeiten der verschiedenen Substanzen mit dem Strahlungsvermögen des Quecksilbers und, da dieses constant ist, auch unter einander verglichen.

Obgleich gegen diese Methode ein principieller Einwand kaum zu erheben seyn dürfte, so konnte Hopkins mit derselben doch keine sehr genauen Resultate erzielen. Denn erstlich war zur vollständigen Bedeckung der, wenn auch kleinen Kugel des Thermometers T_2 jedenfalls eine größere Quecksilbermenge erforderlich, als daſs die Temperatur in allen Schichten des Quecksilbers völlig constant seyn konnte. Ferner muſste durch die von demselben fortwährend aufsteigenden Ströme wärmerer Luft die Umgebung einen sehr schwankenden Temperaturzustand erhalten, der sich durch ein auch vor der directen Bestrahlung kaum gänzlich zu schützendes Thermometer nur unvollkommen bestimmen lieſs. Und wenn zwar beide Theile des Wärmeverlustes des Quecksilbers, der von der Strahlung und der von der Luftberührung herrührende, dem gleichen Gesetze der näherungsweisen Proportionalität mit der Temperaturdifferenz gehorchen, so wird gleichfalls diese Temperaturdifferenz nicht für beide Theile die gleiche seyn.

Hauptsächlich diese Fehlerquellen galt es, bei dem Versuch einer genaueren Durchführung derselben Methode völlig zu beseitigen.

Wenige Messungen der Leitungsfähigkeit schlechter Wärmeleiter sind von F. E. Neumann[1]) an kleinen, gleichmäfsig erhitzten Würfeln oder Kugeln ausgeführt worden, indem während der Erkaltung derselben die Summen und Differenzen ihrer Temperaturen an der Oberfläche und im Mittelpunkt durch zwei daselbst angebrachte feine Thermoelemente in aufeinanderfolgenden gleichen Zeiträumen gemessen wurden, wodurch sich die Quotienten aus der Leitungsfähigkeit, dividirt durch die specifische Wärme und die Dichte der Körper berechnen liefs. Leider findet sich in der kurzen Beschreibung der Beobachtungen keine Angabe darüber, wie die Störung der Continuität innerhalb der Substanzen durch Einführung der Thermoelemente vermieden wurde. Endlich hat Ångström[2]) seine Methode der Beobachtung des periodischen Temperaturzustandes in abwechselnd erhitzten und erkalteten Stangen auch auf wenige schlechtleitende Substanzen ausgedehnt, und in neuerer Zeit ist mit Anwendung der gleichen Methode auf aneinandergereihte dünne Platten eine gröfsere, mehr praktischen Zwecken dienende Beobachtungsreihe von Smith und Knott begonnen worden[3]).

Im Hinblick auf die Wichtigkeit der Erscheinungen der Wärmeleitung für die Geologie[4]) habe ich die Leitungsfähigkeiten einer Reihe von dichten Gesteinen von Neuem untersucht, an die ich dann noch die Bestimmung für mehrere Holzarten in ihren drei charakteristischen Richtungen anschlofs. Die Materialien zu der ersteren Beobachtungsreihe, in deren Auswahl ich, soweit es anging, auf ihr häufiges Vorkommen Rücksicht nahm, habe ich zum

1) *Ann. d. chim. et phys.* (3), *LXVI*, *p.* 183.
2) Pogg. Ann. CXIV, S. 513.
3) *Proc. Roy. Soc.* 1875, *p.* 623.
4) Vergl. besonders die Abhandl. von W. Thomson: *On the secular cooling of the earth. Edinb. Trans. XXIII*, *p.* 157.

Theil, durch die Güte von Hrn. Prof. Zirkel, aus der mineralogischen Sammlung der Universität Leipzig, zum Theil von verschiedenen Steinmetzen Leipzigs erhalten. Sie wurden theils von den Letzteren, theils (die härteren) in der Agatwaaren-Fabrik von Hrn. Jac. Wild sen. zu Idar bei Oberstein a. d. Nahe in die Form von kreisrunden Platten gebracht, deren Gränzflächen mit möglichster Sorgfalt glatt und einander parallel geschliffen waren.

Zu meinen Bestimmungen wandte ich im Princip dieselbe Methode wie Hopkins an, indem ich den stationären Temperaturzustand der an der einen Gränzfläche erwärmten, an der entgegengesetzten frei in die Umgebung strahlenden dünnen Platten beobachtete. Ich bemühte mich hauptsächlich diejenigen Fehler zu vermeiden, welche durch die ungleichmäfsige Berührung der Platten, etwa durch ein an einer Stelle angelegtes Thermometer, und die durch die unregelmäfsige Strahlung, resp. den unregelmäfsigen Wärmeverlust durch Luftberührung eintreten konnten. Zu letzterem Zweck wurden die Platten, an dem Erwärmungsgefäfs, in einen ganz geschlossenen Raum gebracht, dessen Temperatur leicht constant erhalten werden konnte, und hier ihre Erwärmung und die Beobachtung des stationären Temperaturzustandes vorgenommen. Es diente hierzu der folgende Apparat.

An einen kupfernen Cylinder *A* (Fig. 1, Taf. VIII) von 0,16 M. Durchmesser und 0,16 M. Höhe war unterhalb eine unten geschlossene Glasglocke *B* von 0,5 M. Höhe gekittet, oben ein starker Messingring *m* angelöthet, auf welchen ein Messingdeckel nn_1 geschraubt werden konnte. Der Cylinder hing in einem von drei eisernen Füfsen getragenen Eisenringe und war, von einem weiteren Cylinder von Zinkblech *C*, in welchen zwei schmale Glasfenster eingekittet waren, umgeben, in einer flachen Zinkwanne *D* aufgestellt. (Der Apparat *AB* ist derselbe, dessen sich schon die HH. Wiedemann und Franz für ihre Versuche über Wärmeleitung bedienten.)

Ein auf *A* aufgeschraubter Hahn *l* ging wasserdicht

durch C hindurch und führte zu dem einen horizontalen Schenkel eines (in der Figur weggelassenen) T-Rohres, dessen anderer horizontaler Schenkel in ein Manometer auslief, an dessen verticalen, gewöhnlich durch einen Hahn verschlossenen Schenkel sich eine Luftpumpe ansetzen liefs.

Auf den Messingdeckel nn_1 war eine Stopfbüchse r aufgeschraubt, durch die ein 1 M. langes, 6 Mm. weites, in Centimeter getheiltes Messingrohr qq_1 hindurchging, welches sich mittelst der hölzernen Handhabe v längs einer Führung t, einem Messingstab von rechteckigem Querschnitt, auf- und niederschieben liefs. An seinem unteren Ende war eine von 28 Paaren dünner Wismuth- und Antimonstäbchen gebildete Thermosäule T_2 befestigt, deren obere Fläche stark berufst war. Unmittelbar über ihrer messingenen Fassung von 55 Mm. Länge, 37 Mm. Querschnitt befand sich, ebenfalls am Rohre qq_1 befestigt, ein aus zwei dünnen, 1 bis 2 Mm. von einander abstehenden Messingscheiben bestehender Schirm. Dieser konnte durch eine Drehung von qq_1 um sich selbst zur Seite gewandt werden, während die Thermosäule, die auch mit der Führung t durch eine verschiebbare Hülse verbunden war, immer in der Mitte des Gefäfses AB verblieb. Ueber dem Schirme war noch an zwei feinen Messingbügeln ein 20 Mm. hoher dünner Messingring R an der Thermosäule befestigt, welcher die seitliche Bestrahlung derselben möglichst verhüten sollte. Die elektrischen Leitungsdrähte waren von der Thermosäule durch das oben und unten mit Schellack und Wachs ausgefüllte Rohr qq_1 fortgeführt und aufserhalb des Apparates mittelst eines Quecksilbercommutators mit einem Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer verbunden.

Ferner war auf den Deckel nn_1 des Cylinders AB, durch einen dünnen Lederring getrennt, ein Messingring von 31 Mm. innerem, 54 Mm. äufserem Durchmesser aufgeschraubt, in den ein nach oben conisch verjüngtes Messingrohr N eingelöthet war, welches das Erwärmungsgefäfs K trug. Dieses, eine vollständig hart gelöthete cylindrische Kupferbüchse von 64,5 Mm. Durchmesser, 54 Mm.

Höhe (Fig. 2, Taf. VIII stellt einen verticalen Querschnitt derselben und der darunter befindlichen Theile des Apparates dar) lief in zwei kupferne Röhren aus, von denen die weitere, *a* an die obere Endfläche der Büchse angelöthet, die engere, *b* durch dieselbe hindurchgeführt war und fast bis zu ihrem Boden hinabreichte. Beide umschloſs an einer Stelle ein zu dem Messingrohr *N* passend geschliffener Messingmantel *M* von 28 Mm. Höhe, durch welchen die Büchse *K* luftdicht in den Behälter *AB* eingesetzt und darin von einer auf *N* ruhenden Schraubenmutter festgehalten wurde, zu der oben aus dem Messingmantel *M* ein Gewinde geschnitten war. Unterhalb *M* waren die beiden Röhren derart gebogen, daſs bei richtiger Einsetzung die Axe der Erwärmungsbüchse *K*, ebenso wie die der Thermosäule T_2, mit der Axe des Cylinders *AB* zusammenfiel. In die Röhre *a* paſste ein nach oben erweitertes und durch ein Thermometer verschlossenes Messingrohr, an welches seitwärts ein von Watte umhülltes, weites Bleirohr angelöthet war, das zu einem kleinen messingenen Dampfkessel führte. An *b* lieſs sich ein Glasrohr ansetzen, das den Dampf in die Wanne *D* ableitete.

An die Mantelfläche der Kupferbüchse *K* waren in gleichen Abständen von einander und von dem Boden drei Messinglappen *l* angelöthet, in denen sich in Muttern drei messingene Schrauben *s* mit 66 Mm. langen Gewinden befanden. Dieselben dienten dazu, einen dünnwandigen, nach oben sich conisch erweiternden Holzring *H* (Fig. 3, Taf. VIII stellt die horizontale Projection desselben dar) von 33 Mm. Höhe zu tragen, deren drei den Messinglappen entsprechende Holzansätze *h* so enge Löcher besaſsen, daſs sie die Schrauben *s* gerade noch ohne Reibung hindurchlieſsen und auf den dann unten aufgeschraubten Muttern *u* ruheten. Im Innern des Holzringes befanden sich, unmittelbar über seinem unteren Ende, an drei von je zweien der Holzlappen *h* gleichweit abstehenden Stellen, drei dünne und kurze hölzerne Ansätze *d*. Dieselben trugen

drei kleine angeleimte Korkstückchen *e*, die nach oben hin sich etwas zuspitzten.

Bei Beginn jeder Messung wurde die Kupferbüchse *K* mit den oberen Röhren nach unten vertical befestigt, ihre völlig glatt geschliffene und amalgamirte äufsere Bodenfläche blank geputzt und mit Quecksilber bedeckt, und die zu untersuchende Platte *P*, welche stets fast genau denselben Durchmesser wie *K* besafs, daraufgelegt. Ueber die andere Endfläche derselben wurde sodann eine dünne Kupferscheibe *S* von dem gleichen Durchmesser mit der oberen, ebenfalls amalgamirten und mit Quecksilber überzogenen Fläche gestürzt, deren äufserster Rand mit einem ganz dünnen Pappring *Q* bedeckt war; darauf wurde der Holzring *H* so gelegt, dafs die Schrauben *s* durch die drei Löcher in den Ansätzen *h* hindurchgingen und, nachdem die Muttern *u* eingesetzt worden, die Schrauben *s* in den Messinglappen zur Befestigung des Ganzen angezogen, wobei der Pappring *Q*, nicht die Kupferscheibe von den drei Korkstückchen *e* berührt wurde. Dafs es auf diese Weise gelang, eine vollständige Berührung zwischen Kupferbüchse, Platte und Kupferscheibe herzustellen, zeigte sich bei der Trennung derselben nach Beendigung einer Beobachtung. Gewöhnlich hafteten sie dann ziemlich fest an einander, bei den glattesten Steinplatten so sehr, dafs dieselben die viel schwerere Büchse *K* heben konnten.

Nachdem das durch das Festschrauben der einzelnen Theile herausgeprefste Quecksilber entfernt worden war, wurde der Zwischenraum zwischen dem Holzring *H* und dem von ihm umgebenen Theile der Büchse *K* und der Platte *P* mit lockerer Watte ausgefüllt und das Ganze in der beschriebenen Weise im Behälter *AB* befestigt, darauf die Verbindung mit dem Dampfkessel hergestellt und in die Röhre *a* Wasserdampf eingeleitet. Derselbe durchdrang die Kupferbüchse *K* und fand erst an deren Boden durch das Rohr *b* einen Ausgang. So konnte der zu unter-

J_0 die Intensität zur Zeit 0, v die Temperatur der oberen Endfläche der Thermosäule zur Zeit z, v_0 die zur Zeit 0 und die constante der Umgebung, so ist, so lange die Temperatur der unteren Endfläche der Thermosäule constant bleibt:

$$(J - J_0) = k_1 (v - v_0), \qquad \frac{dJ}{dz} = k_1 \frac{dv}{dz} \quad . \quad (1).$$

Die Temperatur der oberen Endfläche wird dadurch erhöht, dafs eine in jeder Zeit constante Wärmemenge a auf dieselbe auffällt, von der sie einen Theil in die Umgebung zurückstrahlt, einen anderen durch Leitung an die benachbarten Theilchen der Thermosäule abgiebt. Diese beiden letzteren Theile kann man, da es sich im Ganzen hier nur um sehr kleine Temperaturänderungen handelt, am Anfang der Differenz $(v - v_0)$ angenähert als proportional betrachten und findet dann aus den Gleichungen (1):

$$\log. \frac{a - b(J - J_0)}{a} = -\frac{b}{k} z,$$

wo b und k zwei Constante bedeuten; also, nachdem man zur Abkürzung $\frac{a}{b} = c$ und $J - J_0 = J$ gesetzt hat:

$$J = c\left(1 - e^{-\frac{b}{k} z}\right);$$

daher verhält sich für zwei verschiedene Werthe von a, aber das gleiche z:

$$J : J_1 = c : c_1 = a : a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Proportionalität der eingestrahlten Wärmemenge a mit der Stromintensität J läfst sich dadurch prüfen, dafs man die Letztere, während einer Einstrahlung, d. h. für einen constanten Werth von a, also auch c zu zwei verschiedenen Zeiten z und z' beobachtet. Es ergiebt sich nämlich:

$$\frac{1}{z} \log. \left(1 - \frac{J}{c}\right) = \frac{1}{z'} \log. \left(1 - \frac{J'}{c}\right),$$

und daraus folgt z. B. für $z = 1$, $z' = 2$:

$$c = \frac{J^2}{2J - J'} \text{ und nach Gl. (2) } c = \alpha J \quad . \quad (3),$$

wo α für verschiedene Werthe von a bei gleichem z constant seyn mufs.

Vorversuche, bei denen die Kupferscheibe unmittelbar mit der Erwärmungsbüchse verbunden und die Thermosäule in verschiedene Entfernungen von derselben gebracht wurde, ergaben, dafs die Proportionalität zwischen J und a für die ersten 3 Minuten der Bestrahlung eine hinreichende war, nach welcher Zeit der Magnet nur noch langsam vorwärts rückte. Es wurden daher in der Folge die Ausschläge stets nach $\frac{1}{2}$, 1 und 2 Minuten beobachtet und dadurch für jede Stellung der Thermosäule drei von einander unabhängige Bestimmungen der Temperatur t_2 gewonnen. Die folgende Tabelle enthält die bei einer späteren Beobachtungsreihe erhaltenen Werthe von $J_{\frac{1}{2}}$, J_1 und J_2 und die aus J_1 und J_2 nach der ersten Formel (3) berechneten Werthe von c und dann nach der zweiten Formel (3) berechneten $\alpha_{\frac{1}{2}}$, α_1, α_2. Jedes J ist der Mittelwerth der bei den beiden entgegengesetzten Stromesrichtungen erhaltenen Ausschläge (von denen bereits die später zu erwähnende Correctionsconstante $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ abgezogen ist), in Mm. der Fernrohrscala ausgedrückt.

Abstand der Thermosäule	$t_1 - \tau$	$J_{\frac{1}{2}}$	J_1	J_2	c	$\alpha_{\frac{1}{2}}$	α_1	α_2
103 Mm.	91,59° C.	67,6	96,75	117,3	122,83	1,817	1,270	1,047
93 „	91,57 „	79,4	112,75	136,9	143,48	1,807	1,273	1,048
83 „	91,60 „	92,05	130,9	159,4	167,28	1,818	1,279	1,050
73 „	91,63 „	105,9	150,3	182,15	190,77	1,801	1,269	1,047
63 „	91,87 „	117,3	168,45	204,85	214,90	1,832	1,276	1,049

Um aus dem am Galvanometer beobachteten Ausschlage u die Temperatur t_2 und dann die Leitungsfähigkeit k zu berechnen, schien es zunächst am geeignetsten, das von Dulong und Petit für die Erkaltung eines heifsen Körpers gegebene Gesetz anzuwenden, welches ja als der genaueste Ausdruck derselben innerhalb der vorhandenen Temperaturgränzen gilt. Die durch jeden Querschnitt einer Platte von der Dicke h in der Zeiteinheit hindurch-

gehende Wärme war hierbei gleich der ganzen von ihrer unteren Endfläche abgegebenen zu setzen. Obgleich aber der Wärmeverlust der untersuchten Platten sowohl durch die Ausstrahlung der geschwärzten Kupferscheibe als auch durch die Erwärmung der sie berührenden Lufttheilchen erfolgte, so konnte doch nur der erstere Antheil desselben zur Thermosäule gelangen, da die Luft in der Umgebung der Kupferscheibe K ihre Wärme immer sehr bald an das Wasser des Cylinders C abgeben mufste. Daher waren t_2 und k durch folgende beiden Gleichungen bestimmt:

$$u = A\,(a^{t_2} - a^{\tau})$$

$$k\,\frac{t_1 - t_2}{h} = A\,(a^{t_2} - a^{\tau}) + B\,(t_2 - \tau)^{\beta},$$

worin $a = 1{,}0077$, $\beta = 1{,}233$, A die Emissionsconstante der strahlenden Fläche bedeutet, endlich B die Luftberührungsconstante, in welche hier der von Natur und Druck des Gases abhängige Factor b^{α} miteinbegriffen werden konnte, da beide möglichst constant erhalten wurden. Die Beobachtung von A geschah, indem man die Kupferscheibe bei einer bekannten Temperatur ausstrahlen liefs, nämlich indem man sie durch etwas Quecksilber zur engen Berührung mit der Erwärmungsbüchse brachte. Die Constante der Luftberührung B war dadurch zu berechnen, dafs man zwei Platten von der gleichen Substanz, aber von verschiedener Dicke anwandte. Bezeichnet man nämlich bei einer zweiten Platte von der Leitungsfähigkeit k mit H, T_1, T_2, T, U dieselben Gröfsen wie bei der ersten mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, so ergiebt sich:

$$B = \frac{H U (t_1 - t_2) - h u (T_1 - T_2)}{h (T_1 - T_2)(t_2 - \tau)^{\beta} - H (t_1 - t_2)(T_2 - \mathrm{T})^{\beta}}.$$

Um aus dieser Gleichung, die im Zähler und Nenner immer kleine Differenzen enthält, B mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, wurden von verschiedenen Substanzen mehrere möglichst gleichartige Platten von ungleicher Dicke angewandt, darunter 5 Thonplatten, deren Dicke von 7,36 bis 31,53 Mm. variirte. Alle an denselben angestellten

Beobachtungen ergaben für B ziemlich schwankende, jedoch stets negative Werthe und ließen es sehr wahrscheinlich erscheinen, daß die Temperaturen t_2 und T_2 zu groß berechnet waren.

Auch ein Versuch, für die Ausstrahlung der Kupferscheibe durch Anwendung mehrerer bekannter Temperaturen, nämlich der Siedetemperatur des Wassers, des absoluten Alkohols und des Benzols ein empirisches Gesetz aufzustellen, führte zu keinem Resultate, da es nicht gelang, die letzteren beiden Flüssigkeiten durch die Kupferbüchse K hindurch zu destilliren, ohne daß sich der größte Theil des Dampfes schon in derselben condensirte. Es zeigten indessen die an den Platten von verschiedener Dicke und gleichem Material beobachteten Werthe der Leitungsfähigkeiten eine ziemliche Uebereinstimmung mit einander, wenn man das einfache Newton'sche Erkaltungsgesetz, das der Proportionalität der ausgestrahlten und der durch Luftberührung abgegebenen Wärme mit der Temperaturdifferenz der Rechnung zu Grunde legte. Es wurde demgemäß die Temperatur t_2 aus dem jedesmaligen Ausschlage u und dann die Leitungsfähigkeit k nach folgenden Formeln berechnet:

$$u = \frac{t_2 - \tau}{\alpha}, \qquad \frac{k\,(t_1 - t_2)}{h} = c\,(t_2 - \tau),$$

wo α eine wie die frühere Größe A zu beobachtende Constante ist.

Die Beobachtung der Ausschläge u in verschiedenen Abständen der Thermosäule von der Kupferscheibe diente dazu, mehrere von einander unabhängige Bestimmungen der Temperatur t_2 zu erhalten und bei jeder Platte festzustellen, ob bei Beginn der Messung der stationäre Zustand bereits eingetreten war, und ob er während ihrer ganzen Dauer unverändert anhielt. Ferner bot sie aber auch ein Mittel zur Prüfung, ob die Platten einen merklichen Wärmeverlust durch Strahlung oder Ableitung ihrer

Seitenflächen erlitten. War dies nämlich der Fall, so konnte die Temperatur nicht mehr auf ihrer unteren Endfläche constant seyn, sondern mufste von der Mitte nach dem Rande hin abnehmen. Da aber bei der Bestimmung der Strahlungsconstante α die die Kupferbüchse K direct berührende Scheibe S jedenfalls überall die gleiche Temperatur besafs, so mufste dann die Intensität des Thermostromes einen um so kleineren Werth von t_2 ergeben, je paralleler das auf die Thermosäule fallende Strahlenbündel, je weiter diese also von S entfernt war.

Es wurden in der Regel bei einer Platte vier oder fünf Messungen in den Abständen von 63 Mm. bis 103 Mm. angestellt, in welchen die Ausschläge einerseits noch genau mefsbar waren und andererseits noch eine hinreichende Gröfse besafsen. Alle Messungen lieferten übereinstimmend, in welcher Reihenfolge sie auch vorgenommen wurden, gerade für die kleineren Entfernungen kleinere Werthe von t_2 als für die gröfseren; die Differenz der äufsersten betrug im Allgemeinen 1 bis 2, auch bis zu 3° C. Es war daher die Annahme nothwendig, dafs die Ausschläge des Magnets nicht ausschliefslich von der Bestrahlung der Thermosäule durch die Kupferscheibe, sondern trotz des Messingrohrs R theilweise auch von einer seitlichen Wärmezufuhr von der Wand des Behälters AB aus herrührten. Zur directen Messung der letzteren wurde unter die Erwärmungsbüchse, auf den Holzring H eine Reihe von dünnen, beiderseits mit Stanniol bekleideten Pappscheiben in der Gesammtdicke von etwa 26 Mm. gelegt. Zwei Paare derselben waren durch zwischengeleimte Korkstückchen mit einander verbunden und der Zwischenraum des einen mit lockerer Watte ausgefüllt. Als unterste wurde eine Scheibe gewählt, deren unterer Stanniolüberzug besonders glatt war, oder auch eine sehr blank geputzte dünne Kupferscheibe als Unterlage angewandt. Die unvollständige Berührung der einzelnen Scheiben mit einander und mit der Kupferbüchse, die schlechte Leitungsfähigkeit der Pappe, und das geringe Strahlungsvermögen des

Stannioles und Kupfers bewirkten, daſs ihre Erwärmung und Ausstrahlung keinen merklichen Thermostrom hervorrufen konnte.

Die Ausschläge des Magnets wurden beobachtet, während wiederum die Thermosäule von 63 Mm. an bis 133 Mm. von der Kupferbüchse abstand (letztere war die gröſste, nur bei den dicksten Steinplatten vorkommende Entfernung). Es zeigte sich, daſs der Ausschlag unmittelbar, nachdem der Dampf begonnen hatte, die Kupferbüchse zu durchströmen, fast schon in seiner vollen Stärke auftrat, daſs er aber gleich Null war, wenn man nach einer mehrstündigen Beobachtung schnell die Kupferbüchse aus dem Behälter *A B* entfernte. Von der Entfernung 63 Mm. an wurde er zuerst ein wenig kleiner, erreichte zwischen 73 und 83 ein Minimum und nahm dann bis 133 Mm. langsam zu. Dieses Verhalten der Ausschläge dürfte beweisen, daſs sie nicht etwa von einer allmählichen Erwärmung der Gefäſswand und der darauffolgenden Wärmeabgabe durch Strahlung und Luftberührung an die Thermosäule, sondern daſs sie davon herrührten, daſs ein Theil der von der Kupferbüchse auf das Glas auffallenden Wärmestrahlen auf die Thermosäule reflectirt wurde. Die Verminderung der Intensität der Bestrahlung mit der Entfernung, die Vermehrung derjenigen des reflectirten Antheiles, endlich die Aenderung des Winkels, unter dem die Strahlen von der Kupferbüchse ausgesandt und von der Thermosäule aufgefangen werden, bilden einander entgegenwirkende Momente, welche den eigenthümlichen Verlauf der Ausschläge wohl zu erklären vermögen.

Die folgende Tabelle enthält die aus einer Reihe von solchen Beobachtungen resultirenden Werthe. Die erste Horizontalreihe giebt die Abstände der Thermosäule, d. h. ihrer oberen Löthstellen von dem Boden der Kupferbüchse an, die zweite den Ausschlag (in Millimetern) nach der Bestrahlung von ½ Minute, *a*, wenn die Kupferfläche, die dritte denjenigen, *b*, wenn die Stanniolfläche sich über der Thermosäule befand, die vierte den Mittelwerth von

beiden Ausschlägen, ferner enthält die fünfte, sechste und siebente, resp. die achte, neunte und zehnte Horizontalreihe die entsprechenden Gröfsen bei der Bestrahlung von 1, resp. von 2 Minuten. Jeder Werth von *a* und *b* ist das Mittel von mehreren, die alle sehr gut mit einander übereinstimmen.

Abstand	63	73	83	93	103	113	123	133
$a\frac{1}{2}$	4,7	4,2	3,8	4,7	4,9	5,8	6,0	6,2
$b\frac{1}{2}$	4,75	4,125	3,56	4,375	5,125	5,5	5,875	6,0
Mittel	4,7	4,2	3,7	4,5	5,0	5,65	5,9	6,1
a_1	6,05	5,7	5,85	6,7	7,2	8,0	8,3	9,0
b_1	6,56	5,5	5,625	6,0	6,8	7,3	7,75	8,25
Mittel	6,3	5,6	5,7	6,35	7,0	7,65	8,0	8,6
a_2	7,2	6,6	6,8	7,75	8,6	9,7	10,1	10,8
b_2	7,69	6,3	6,625	7,375	8,06	9,065	9,25	9,94
Mittel	7,4	6,45	6,7	7,6	8,3	9,4	9,7	10,4

Die gute Uebereinstimmung der Werthe von *a* und *b* ist ein Beweis dafür, dafs nur ein verschwindender Theil derselben von der directen Bestrahlung der Thermosäule herrührte. Dafs dieser auch nicht das Wachsen der Ausschläge in den kleinsten Entfernungen zur Folge hatte, zeigte sich daran, dafs sie auch hier schon ihre volle Gröfse besafsen, wenn noch unmöglich eine merkliche Wärmemenge durch die Reihen der Pappscheiben bis zur letzten gelangt seyn konnte. Wurde nach mehrstündiger Erwärmung die Kupferbüchse aus dem Behälter herausgenommen, so hatten sich wohl die ihr nächsten Pappscheiben ein wenig erwärmt, die unteren aber waren vollständig kalt geblieben.

Von einem jeden beobachteten Ausschlage *u* wurde in der Folge die der betreffenden Bestrahlungszeit und Entfernung der Thermosäule von der Kupferbüchse zugehörende Correctionsconstante $\frac{(a+b)}{2}$ abgezogen. Die sodann in den verschiedenen Entfernungen berechneten Werthe von t_1 stimmten so weit überein, als es die Genauigkeit der Beob-

achtung gestattete, und zeigten in ihren Abweichungen niemals ein bestimmtes Gesetz. Es liefs sich daher annehmen, dafs ihr Mittelwerth die wirkliche Temperatur der Kupferscheibe, also auch der unteren Endflächen der untersuchten Platten mit ziemlicher Genauigkeit angab, und dafs dieselbe auf der ganzen Fläche constant war.

Um die Wärmeleitungsfähigkeiten der verschiedenen untersuchten Substanzen mit einander vergleichen zu können, war es nur noch nothwendig, dafs die in der Formel:

$$\frac{k}{c} = \frac{h(t_2 - \tau)}{t_1 - t_2}$$

vorkommende Gröfse c immer constant blieb. Es war ursprünglich beabsichtigt worden, damit die Temperaturdifferenz $(t_1 - t_2)$ möglichst grofs sey, die unteren Endflächen der Platten mit einer gleichmäfsigen Schicht Rufs zu bedecken und dieselbe auf die Thermosäule strahlen zu lassen. Allein es zeigte sich bald, dafs hierbei die Ausstrahlung sich nicht unbeträchtlich mit der gröfseren oder geringeren Rauhigkeit der Oberfläche änderte, wenn dieselbe auch dem Anscheine nach durch den Rufs abgeglättet war. Versuche mit einer berufsten dünnen Kupferscheibe ergaben auf das bestimmteste, dafs die Strahlung schon ein wenig zunahm, wenn die Oberfläche nur leise geritzt wurde. Aus diesem Grunde wurde mit der unteren Fläche der Steinplatte die Kupferscheibe S in Berührung gebracht, welche so dünn war, dafs ihre Temperatur überall gleich t_2 angenommen werden konnte. Dieselbe war mit einer aus Rufs und etwas Kopal gemischten schwarzen Farbe überzogen, welche ebenfalls ein grofses Strahlungsvermögen besafs. Zwei verschiedene derartige Kupferscheiben wurden angewandt, die eine von 1,25 Mm., die andere von 1,1 Mm. Dicke. Die vollständig matte Farbe der ersteren wurde durch die unvermeidliche zeitweilige Berührung mit Quecksilber vom Rande aus allmählich abgeblättert, die der letzteren, welche ein wenig glänzte, deren Strahlungsvermögen aber trotzdem fast genau das gleiche war, hielt

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,35	7,90	69,36	62,70
83		7,90	69,615	63,63
73		7,92	69,93	64,94
63		7,98	71,015	69,65
			Mittel	65,23
			Reducirt	65,40

b) $h = 11{,}38$ Mm. $s = 2{,}688$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,11	7,27	79,06	70,40	99,35	6,20	80,26	70,85
93		7,41	78,63	68,45		6,23	80,20	70,63
83		7,45	78,22	66,22		6,24	80,14	70,30
73		7,52	79,28	73,325		6,19	80,51	72,425
63		—	—	—		6,21	81,02	76,07
			Mittel	69,60				72,055
			Reducirt	68,89				70,73

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,24	6,69	79,84	71,48	99,24	8,59	78,36	72,56
93		6,83	79,24	68,45		8,59	78,12	70,95
83		6,80	79,60	70,53		8,60	78,06	70,62
73		—	—	—		8,675	79,43	81,17
63		6,74	80,00	72,83		8,73	79,00	78,08
			Mittel	70,82				74,68
			Reducirt	69,25				72,84

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,63	8,305	78,50	69,66	99,62	7,95	78,57	68,24
93		8,31	77,87	65,88		—	—	—
83		8,315	78,38	68,95		7,93	78,21	66,03
73		8,32	77,71	65,03		7,975	78,07	65,45
63		8,31	77,89	65,94		7,96	78,02	65,09
			Mittel	67,09				66,20
			Reducirt	66,21				66,57

2. Carrarischer Marmor. Ganz weiſs, sehr feinkörnig.

$h = 15,53$ Mm. $s = 2,668$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103		—	—	—	99,26	6,97	76,89	77,525
93	99,85	6,69	75,45	66,15		7,15	75,81	72,225
83		6,64	75,20	64,83		7,29	76,12	74,57
73		—	—	—		—	—	—
63		6,63	76,17	69,37		7,14	76,70	77,23
			Mittel	66,78				75,39
			Reducirt	65,73				72,79

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,30	7,92	75,80	75,57
93		7,96	75,49	73,95
83		7,955	73,19	62,59
73		7,96	72,99	61,75
63		7,98	74,19	67,24
			Mittel	68,22
			Reducirt	68,21

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,35	7,90	69,36	62,70
83		7,90	69,615	63,63
73		7,92	69,93	64,94
63		7,98	71,015	69,65
			Mittel	65,23
			Reducirt	65,40

b) $h = 11,38$ Mm. $s = 2,688$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,11	7,27	79,06	70,40	99,35	6,20	80,26	70,85
93		7,41	78,63	68,45		6,23	80,20	70,63
83		7,45	78,22	66,22		6,24	80,14	70,30
73		7,52	79,28	73,325		6,19	80,51	72,425
63		—	—	—		6,21	81,02	76,07
			Mittel	69,60				72,055
			Reducirt	68,89				70,73

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,24	6,69	79,84	71,4[illegible]
93		6,83	79,24	68,45
83		6,80	79,60	70,[illegible]
73		—	—	
63		6,74	80,00	



Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,63	8,305	75,50	63,66	99,62	7,45	75,57	65,24
93		8,31	77,57	65,55		—	—	—
83		8,315	75,35	65,25		7,33	75,21	66,03
73		8,32	77,71	65,05		7,375	75,07	65,45
63		8,31	77,39	65,54		7,46	75,02	65,09
			Mittel	67,19				66,20
			Reducirt	66,21				66,57

2. Carrarischer Marmor. Ganz weifs, sehr feinkörnig.

$h = 15{,}53$ Mm. $s = 2{,}668$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103		—	—	—	99,26	6,97	76,89	77,525
93	99,85	6,69	75,45	66,15		7,15	75,81	72,225
83		6,64	75,20	64,83		7,29	76,12	74,57
73		—	—	—		—	—	—
63		6,63	76,17	69,37		7,14	76,70	77,23
			Mittel	66,78				75,89
			Reducirt	65,73				72,79

t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
[illegible]	[illegible]	75,80	75,57
	[illegible]	[illegible]49	73,95
	[illegible]	[illegible]	62,59
	[illegible]	[illegible]	61,75
	[illegible]	[illegible]	67,24
			68,22
			68,21

3. Pyrenäischer Marmor. Rothe und schwarze dichte Massen, mit vielen weifsen Adern durchzogen.

$h = 14{,}49$ Mm. $s = 2{,}616$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,22	7,69	79,17	92,83	99,56	7,40	80,89	104,01
93		7,695	77,98	83,44		7,38	80,18	96,825
83		7,525	78,18	83,83		—	—	—
73		7,50	79,23	91,93		7,41	79,52	91,24
63		—	—	—		7,51	78,85	86,56
			Mittel	88,01				94,66
			Reducirt	87,07				92,10

4. Serpentin aus dem sächsischen Erzgebirge. Grünlich braune Massen mit breiten gelblichen Flecken.

$h = 16{,}48$ Mm. $s = 2{,}418$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,275	7,905	72,735	64,33
83		7,91	71,49	59,27
73		7,90	71,30	58,54
63		7,90	71,63	59,79
			Mittel	60,48
			Reducirt	60,59

5. Granit von Ruhla, Thüringer Wald. Enthält viele grofse Orthoklaskrystalle, ziemlich wenig Quarz.

$h = 12{,}51$ Mm. $s = 2{,}545$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,75	7,545	78,16	69,625		—	—	—
93		7,585	78,00	68,89	99,60	7,44	77,18	64,44
83		—	—	—		7,59	76,65	62,42
73		—	—	—		7,64	76,62	62,48
63		—	—	—		—	—	—
			Mittel	69,26				63,11
			Reducirt	68,315				61,77

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,46	7,91	76,29	62,54
93		7,91	76,25	62,34
83		7,91	75,82	60,31
73		7,91	75,96	60,96
63		7,90	76,04	61,28
			Mittel	61,49
			Reducirt	61,50

6. Sächsischer Granit. Enthält sehr viel Albit. Ziemlich stark glimmerhaltig. Am Rande ein wenig verwittert.

$h = 12,24$ Mm. $s = 2,629$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,64	7,395	79,23	74,56
93		7,44	79,41	76,03
73		7,49	78,82	72,40
			Mittel	74,33
			Reducirt	72,035

7. Rother Gneiſs. Steinbruch bei Tharandt an der Eisenbahn. Enthält sehr viel Feldspath. In der Richtung der Schieferung geschliffen.

$h = 11,13$ Mm. $s = 2,540$

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,59	7,84	77,77	61,91
83		7,87	77,19	59,12
73		7,89	77,96	63,14
63		7,85	78,08	63,63
			Mittel	61,95
			Reducirt	62,32

8. Gneifs von Tharandt, Thal der wilden Weifseritz, linkes Ufer, halbe Höhe der Thalwand, zwischen dem tiefen Grunde und breiten Grunde. Grauweifs. Die Endflächen hatten ebenfalls die Richtung der sehr deutlichen Schieferung.

$h = 11{,}68$ Mm. $s = 2{,}654$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	100,00	7,47	77,97	62,57
93		7,495	77,38	59,76
83		7,505	77,58	60,77
73		7,47	78,28	64,18
			Mittel	61,82
			Reducirt	60,32

9. Nephelin-Basalt. Mitterteich bei Eger. Schwarze und graue, deutlich unterscheidbare dichte Massen. Zwei Exemplare *a* und *b*.

a) $h = 13{,}97$ Mm. $s = 3{,}028$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,12	7,37	75,64	65,59		—	—	—
93		7,52	75,49	65,46	99,38	7,46	74,72	61,175
83		7,565	74,75	62,155		7,50	73,84	57,625
73		7,64	75,51	66,06		7,49	74,12	58,86
63		7,64	75,83	67,69		—	—	—
			Mittel	65,39				59,22
			Reducirt	64,81				57,475

b) $h = 12{,}09$ Mm. $s = 2{,}679$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,29	7,68	76,57	61,52
93		7,71	77,29	65,39
83		7,73	76,66	62,26
73		7,565	76,94	62,89
63		—	—	—
			Mittel	63,015
			Reducirt	62,475

10. Basalt von Idar bei Oberstein an der Nahe. Sehr compact und sehr ähnlich dem vorigen.

$h = 24,81$ Mm. $s = 2,712$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,58	7,17	67,96	68,98
83		7,095	66,33	62,93
73		7,06	67,67	67,575
63		7,01	68,19	69,40
			Mittel	67,22
			Reducirt	65,04

11. Sandstein von Seeberg. Gelblich grau, sehr feinkörnig.

$h = 15,71$ Mm. $s = 2,130$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,09	6,555	75,01	67,26	99,11	7,01	74,30	65,59
93		6,395	74,79	65,61		—	—	—
83		6,31	75,44	68,34		6,95	73,93	63,71
63		6,34	75,79	70,21		6,92	74,30	65,25
			Mittel	67,855				64,85
			Reducirt	66,58				62,59

12. Sandstein der Kreideformation Strehlen bei Dresden. Graue, ziemlich grobkörnige Massen, sehr kreidehaltig. Zwei Exemplare *a* und *b*.

a) $h = 20,10$ Mm. $s = 2,324$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,33	6,40	71,25	66,06	99,11	7,12	71,05	68,17
93		6,40	70,25	62,265		7,00	69,82	62,97
83		6,37	70,66	63,70		—	—	—
73		—	—	—		6,98	69,75	62,65
63		6,32	70,68	63,62		6,935	70,77	66,45
			Mittel	63,91				65,06
			Reducirt	62,59				62,94

b) $h = 11,70$ Mm. $s = 1,945$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	99,11	6,52	76,47	55,51	99,31	6,95	74,565	49,02
93		—	—	—		6,93	73,97	47,01
83		6,585	74,79	49,34		6,76	73,62	45,50
73		6,51	75,23	50,68		6,69	74,38	47,71
63		6,475	75,72	52,375		6,67	73,69	45,49
			Mittel	51,98				46,95
			Reducirt	51,06				45,99

13. Sandstein von Postelwitz bei Schandau. Röthlich gelb. Grofse Körner. Sehr porös.

$h = 22,21$ Mm. $s = 1,997$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	99,63	7,465	61,00	43,47
93	—	7,46	60,74	42,93
83	—	7,50	62,15	46,05
63	—	7,42	63,365	48,81
			Mittel	45,315
			Reducirt	43,62

14. Sandstein mit Kaolin-Cement. Lagert unmittelbar auf Granit. Heppenheim, Bergstrafse. Röthlich grau. Sehr grobe Körner mit sehr grofsen Zwischenräumen.

$h = 13,15$ Mm. $s = 1,951$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	99,55	7,28	69,08	39,18
93		7,44	68,53	38,22
83		7,675	68,48	38,49
73		7,54	69,03	39,50
			Mittel	38,85
			Reducirt	37,61

15. Tafelschiefer von Carlsbaden in Böhmen. Schwarze homogene Massen mit sehr deutlicher Schieferung. Zwei parallel zu derselben geschliffene Exemplare *a*) und *b*). *b*) war weniger homogen und an der einen Endfläche zerspalten.

a) $h = 30{,}42$ Mm. $s = 2{,}731$. *b*) $h = 10{,}79$ Mm. $s = 2{,}687$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,87	7,69	56,20	47,53	99,54	7,435	74,76	46,62
93		7,80	56,89	49,19	—	7,47	74,61	46,22
83		7,66	56,39	47,90	—	7,47	74,14	44,71
73		—	—	—	—	7,415	73,79	43,52
63		7,50	57,35	49,83	—	—	—	—
			Mittel	48,61				45,27
			Reducirt	48,10				44,79

16. Thonschiefer aus dem Schwarzathal, Thüringen. Grünlich grau. Mit weifsen Punkten und Adern durchzogen. Sehr deutlich schieferig. Am Rand der einen Endfläche etwas zersplittert.

$h = 13{,}49$ Mm. $s = 2{,}685$.

Abstand	t_1	τ	αu	$\frac{k}{c}$
103	99,37	6,90	69,87	41,71
93		6,955	69,51	40,95
83		6,955	69,73	41,47
73		6,89	70,51	43,30
63		6,72	70,34	42,53
			Mittel	41,99
			Reducirt	42,02

17. Thon. Grauweifse dichte, möglichst homogene Massen. 5 Exemplare *a*) bis *e*).

a) $h = 31,53$ Mm. $s = 2,025$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	100,00	7,485	37,73	21,71	99,63	8,04	36,92	21,29
93		7,49	37,97	21,95		—	—	—
83		—	—	—		8,07	36,69	21,08
73		7,495	38,41	22,38		8,075	37,05	21,435
63		7,30	38,83	22,72		8,08	37,45	21,82
			Mittel	22,19				21,41
			Reducirt	22,02				21,61

b) $h = 23,27$ Mm. $s = 2,0125$. *c*) $h = 14,54$ Mm. $s = 2,010$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$ [1]
103	99,78	7,99	46,65	24,05	99,85	7,62	61,94	29,74
93		8,01	46,17	23,56		7,505	61,04	28,35
83		8,01	45,75	23,17		7,44	61,53	28,97
73		7,915	46,125	23,46		7,32	61,43	28,72
63		—	—	—		7,075	61,17	28,15
			Mittel	23,56				28,79
			Reducirt	23,56				28,22

d) $h = 9,65$ Mm. $s = 1,9725$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	99,56	7,69	65,88	24,46	99,63	8,085	66,00	24,93
93		7,64	66,20	24,84		8,08	66,59	25,75
83		—	—	—		8,085	66,42	25,52
73		7,67	66,52	25,31		—	—	—
63		—	—	—		8,09	66,49	25,61
			Mittel	24,87				25,45
			Reducirt	24,62				25,39

1) Die gröfsere Abweichung dieser Thonplatte von den übrigen wurde bereits bei den Vorversuchen wahrgenommen.

e) $h = 7{,}36$ Mm. $s = 1{,}996$.

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103		—	—	—	99,58	7,38	71,13	24,84
93	99,45	7,72	69,94	23,62		7,39	71,345	25,22
83		—	—	—		7,39	71,60	25,62
63		7,70	70,195	23,97		7,35	71,55	25,49
			Mittel	23,795				25,29
			Reducirt	23,795				24,70

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103	99,67	7,935	71,50	26,01
93		7,92	71,24	25,56
83		7,91	70,78	24,82
73		7,89	70,74	24,74
63		7,90	71,11	25,34
			Mittel	25,29
			Reducirt	25,38

B. Holzplatten.

18. Eichenholz. Drei in den verschiedenen Richtungen geschnittene Exemplare:

a) die Seitenfläche parallel der Faser,
b) senkrecht zur Faser, parallel den Jahresringen,
c) senkrecht zur Faser, senkrecht zu den Jahresringen.

a) $h = 10{,}29$ Mm. $s = 0{,}6206$. *b)* $h = 9{,}90$ Mm. $s = 0{,}5679$.

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103	99,57	8,69	53,55	14,76	99,65	8,595	40,33	7,870
83		8,745	53,55	14,78		8,605	39,84	7,702
73		8,75	53,68	14,87		8,61	40,74	8,017
63		8,765	53,69	14,88		8,605	40,665	7,991
			Mittel	14,82				7,895
			Reducirt	14,46				7,703

c) $h = 9{,}69$ Mm. $s = 0{,}5711$.

Abstand	t_1	τ	au [1])	$\frac{k}{c}$
103	99,65	8,805	36,93	6,637
93		8,795	36,865	6,613
83		8,535	38,23	7,003
73		8,57	38,23	7,009
63		8,58	38,89	7,222
			Mittel	6,897
			Reducirt	6,725

19. Buchsbaumholz. Drei ebenso wie bei 18 bezeichnete Exemplare *a)*, *b)*, *c)*. *c)* hatte sich beim Erhitzen stark gebogen.

a) $h = 9{,}72$ Mm. $s = 0{,}7903$. *b)* $h = 10{,}02$ Mm. $s = 0{,}7544$.

Abstand	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	au	$\frac{k}{c}$
103	99,65	8,70	50,23	11,99	99,73	8,295	42,71	8,784
93		8,70	50,62	12,20		—	—	—
83		8,69	51,17	12,50		8,30	42,33	8,638
73		8,705	51,06	12,45		8,295	42,36	8,650
93		8,72	51,68	12,80		8,30	42,65	8,762
			Mittel	12,39				8,7085
			Reducirt	12,08				8,595

1) Die grofsen Verschiedenheiten von au in den verschiedenen Abständen bei dieser und einigen folgenden Platten rühren nicht etwa davon her, dafs mit den Messungen zu früh angefangen wurde, sondern müssen eine etwas fehlerhafte Bestimmung der ihnen zugehörigen Strahlungsconstante zur Ursache haben. Durch mehrfache Wiederholung einer Beobachtung im gleichen Abstande der Thermosäule zeigte sich, dafs auch bei den am schlechtesten leitenden Holzplatten nach Verlauf von 2 Stunden, nachdem der Dampfstrom durch die Kupferbüchse begonnen hatte, der stationäre Zustand vollständig erreicht war, vor welcher Zeit bei ihnen nie beobachtet wurde. Die Steinplatten hatten bereits nach $\frac{1}{2}$ Stunde einen beinahe, nach 1 Stunde in der Regel einen völlig stationären Temperaturzustand.

c) $h = 9{,}50$ Mm. $s = 0{,}7557$.

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103	99,39	8,25	37,73	6,711
83		8,27	38,21	6,860
73		8,34	38,21	6,869
63		8,33	38,33	6,907
			Mittel	6,837
			Reducirt	6,724

20. Ahornholz. Drei ebenso wie bei 18 bezeichnete Exemplare *a*), *b*), *c*).

a) $h = 10{,}08$ Mm. $s = 0{,}6344$. *b*) $h = 10{,}39$ Mm. $s = 0{,}6070$.

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103	99,37	8,30	57,50	17,27	99,34	8,295	37,66	7,328
93		8,30	57,02	16,875		8,31	37,66	7,330
83		8,305	57,615	17,36		8,31	38,27	7,537
73		8,325	57,60	17,36		8,32	38,17	7,503
63		8,32	58,62	18,22		8,30	38,49	7,610
			Mittel	17,42				7,462
			Reducirt	17,19				7,402

b) $h = 10{,}39$ Mm. $s = 0{,}6070$. *c*) $h = 9{,}84$ Mm. $s = 0{,}57125$.

Abstand	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$	t_1	τ	$a u$	$\frac{k}{c}$
103	99,55	7,975	38,99	7,703	99,29	8,30	40,01	7,723
93		—	—	—		8,315	39,62	7,5955
83		7,97	39,23	7,786		8,305	40,19	7,784
73		—	—	—		8,30	40,25	7,804
63		7,925	39,61	7,912		8,30	40,54	7,9075
			Mittel	7,800				7,763
			Reducirt	7,827				7,661

Aus den zusammengestellten Tabellen ist ersichtlich, daſs die Werthe der Leitungsfähigkeiten für verschiedene Exemplare einer Substanz, wenn dieselben nicht besondere Unterschiede zeigen, nicht schlechter mit einander übereinstimmen, als die einzelnen für das gleiche Exemplar erhaltenen. Daſs in den letzteren noch so groſse Abweichungen vorhanden sind, liegt daran, daſs ein kleiner Fehler in der Bestimmung von t_2 einen sehr bedeutenden Einfluſs auf das Resultat ausübt. Zwar gelang es bei der beschriebenen Methode stets, die unteren Endflächen der Platten auf ganz constanter Temperatur zu erhalten, denn zwei durch mehrere Stunden getrennte Beobachtungen derselben ergaben nie gröſsere Abweichungen als zwei schnell aufeinanderfolgende; jedoch ihre Berechnung als Quotient zweier Galvanometerausschläge, die doch nicht so sichere Temperaturbestimmungen wie ein Thermometer zulassen, muſs nothwendig kleine Fehler im Gefolge haben. Indessen verschaffte die Wiederholung der Beobachtung in verschiedenen Bestrahlungszeiten und verschiedenen Entfernungen der Thermosäule eine gröſsere Anzahl von einander unabhängiger Werthe, deren Mittel t_2 mit ziemlicher Genauigkeit darstellen möchte.

Wie auch leicht durch Rechnung ersichtlich ist, kann der Fehler infolge der Annahme des Newton'schen Erkaltungsgesetzes keinen gröſseren Einfluſs auf das Endresultat haben, als ein kleiner Fehler in der Bestimmung der Temperatur t_2, die nämlich noch mit dem Quotienten zweier sehr wenig von einander verschiedener Gröſsen zu multipliciren wäre. Die eine von diesen hängt von t_1, die andere von t_2 ab, und ihr Quotient unterscheidet sich um so weniger von 1, je kleiner die Differenz $(t_1 - t_2)$ ist, je mehr dieselbe sich also durch einen gleichen Zuwachs von t_2 ändern würde. In jedem Falle dürfte die Unsicherheit der Resultate, die durch die Verschiedenheit der einzelnen Platten von demselben Material bewirkt wird, die Ungenauigkeit in der Berechnung weit überragen.

Die aus allen angegebenen Messungen resultirenden Mittelwerthe der Leitungsfähigkeiten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher die für die am besten von den untersuchten Substanzen leitende, Marmor aus den Pyrenäen, erhaltene Zahl = 1000 gesetzt worden ist. Ausgeschlossen sind nur die für die Sandsteinplatte 12*b*), für die Schieferplatte 15*b*) und die Buchsbaumplatte 19*c*) gefundenen Werthe, weil bei denselben keine vollständige Berührung mit der Erwärmungsbüchse resp. der Kupferscheibe erzielt werden konnte.

Substanz	Specifisches Gewicht	Wärme-leitungs-vermögen
Marmor aus den Pyrenäen . . .	2,616	1000
Sächsischer albithaltiger Granit . .	2,629	804
Carrarischer Marmor	2,668	769
Marmor aus Italien (Fundort unbestimmt)	2,682	763
Basalt von Idar bei Oberstein an der Nahe	2,712	726
Seeberger, besonders feinkörniger Sandstein	2,130	721
Granit vom Thüringer Wald . .	2,545	713
Sandstein der Kreideformation Strehlen	2,324	701
Rother Gneifs von Tharandt . .	2,540	696
Nephelin-Basalt von Mitterteich . .	2,853	690
Serpentin aus dem sächsischen Erzgebirge	2,418	676
Gneifs von Tharandt an der wilden Weifseritz	2,654	673
Tafelschiefer von Carlsbaden . . .	2,731	537
Sandstein von Postelwitz	1,997	487
Thonschiefer aus dem Schwarzathal	2,685	469
Sandstein mit Kaolin-Cement (Heppenheim)	1,951	420
Gemeiner Thon	2,003	275

Substanz	Specifisches Gewicht	Wärme-leitungs-vermögen
Ahornholz parallel der Faser . .	0,634	192
Eichenholz parallel der Faser . .	0,621	161
Buchsbaumholz parallel der Faser .	0,790	135
Buchsbaumholz senkrecht zur Faser, parallel den Jahresringen . . .	0,754	96
Eichenholz senkrecht zur Faser, parallel den Jahresringen	0,568	86
Ahornholz senkrecht zur Faser und zu den Jahresringen	0,571	86
Ahornholz senkrecht zur Faser, parallel den Jahresringen	0,607	85
Eichenholz senkrecht zur Faser und zu den Jahresringen	0,571	75

Die für die Gesteine erhaltenen Resultate stimmen im Grofsen und Ganzen mit den von Hopkins gefundenen überein, nur schwanken bei den letzteren für verschiedene Arten eines Gesteines die Zahlen noch viel bedeutender. Es zeigt sich, dafs im Allgemeinen die Dichte und Compactheit den Wärmedurchgang sehr begünstigt, doch hängen die Werthe der Leitungsfähigkeiten, wie schon ein Blick auf die hinzugefügten (freilich nur approximativen) specifischen Gewichte lehrt, keineswegs von ihnen allein ab. Die Steinarten von krystallinischer Textur leiten besser, als die mechanisch gemengten, die Steine mit feinen Körnern besser, als die mit groben. Bestimmtere Gesetze dürften sich jedoch wegen der ungenügend charakterisirten Beschaffenheit aller Gesteine kaum angeben lassen, wie überhaupt auch die mit der denkbar gröfsten Genauigkeit beobachteten Werthe strenge nur die Leitungsfähigkeiten der einzelnen gerade untersuchten Exemplare darstellen könnten.

Die wenigen an Hölzern angestellten Beobachtungen beweisen, dafs bei ihnen, wie es schon lange von Tyndall und Anderen festgestellt ist, ein viel schnellerer

Wärmedurchgang in der Richtung der Faser stattfindet, als in der zu derselben senkrechten. Die Unterschiede der für beide erhaltenen Werthe sind jedoch bedeutend geringer als die Unterschiede der entsprechenden von Tyndall beobachteten Galvanometerablenkungen. Bei den letzteren sind die Verhältnifszahlen für die beiden verschiedenen Richtungen viel gröfser bei den besser leitenden Hölzern als bei den schlechter leitenden, und das dürfte es schon sehr wahrscheinlich machen, dafs diese Ablenkungen nicht den Leitungsfähigkeiten selbst, sondern etwa einer höheren Potenz derselben proportional sind. In der That, denkt man sich den Wärmestrom von der erhitzten Würfelfläche aus nur in der zu dieser Fläche senkrechten Richtung (in der Richtung x) stattfindend, so hängt die Temperaturerhöhung, welche das die gegenüberliegende Fläche berührende Quecksilber in einer bestimmten Zeit erfährt, von den während derselben stattfindenden Werthen von $k\frac{\partial t}{\partial x}$ ab, wo t die Temperatur der die Wärme an das Quecksilber abgebenden Gränzfläche, k die Leitungsfähigkeit bedeutet. In einer bestimmten Entfernung von der Wärmequelle wird aber eine wahrnehmbare Temperaturerhöhung, also auch eine Temperaturdifferenz mit den nächstliegenden Theilchen um so schneller eintreten, eine je gröfsere Leitungsfähigkeit die betrachtete Substanz besitzt. Während der ersten Zeit des Wärmedurchganges wird also $\frac{\partial t}{\partial x}$ mit dem Werthe von k gleichzeitig zunehmen. — Noch geringer als bei den obigen Zahlen sind die von Knoblauch[1]) nach der Sénarmont'schen Methode erhaltenen Verhältnisse der Leitungsfähigkeiten in den verschiedenen Richtungen der Hölzer. Doch sind sie, wie bei diesen, für Ahornholz und Eichenholz gröfser als für Buchsbaumholz (nach Knoblauch sind diese drei Verhältnifszahlen etwa 1 : 1,45, 1,45, 1,25; nach den obigen Beobachtungen: 1 : 2,20, 1,72, 1,41).

1) Pogg. Ann. Bd. CV, S. 623.

Ueber die Verschiedenheit der Leitungsfähigkeit der Hölzer in den beiden Hauptrichtungen senkrecht zur Faser läſst sich aus den obigen Daten noch nichts Bestimmtes sagen, wie auch Tyndall bemerkt[1]), daſs es ihm nur mittelst groſser Sorgfalt und in den meisten Fällen erst nach zahlreichen Versuchen gelungen sey, die gröſseren Werthe in der Richtung senkrecht zu den Holzschichten wahrzunehmen. Ich beabsichtige hierüber, so wie über die Leitungsfähigkeit der Gesteine bei verschiedenen Temperaturen, verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt u. s. f. später noch weitere Untersuchungen anzustellen.

Nur von wenigen in dieser Untersuchung vorkommenden Substanzen sind die Werthe der Leitungsfähigkeiten bisher in absolutem calorischen Maaſse bestimmt worden. Neumann findet für einen grobkörnigen Granit $\frac{k}{CD} = 0{,}656$ (C = specifische Wärme, D = specifisches Gewicht); setzt man also für denselben $D = 2{,}63$ und $C = 0{,}186$, das Mittel aus drei Beobachtungen von Mallet[2]), so ergiebt sich $k = 1{,}34$ in den (Ångström'schen) Einheiten: Gramm, Minute, Quadratcentimeter, Centimeter, 1° C. Bei einem Serpentin von Zöplitz ist nach Neumann $\frac{k}{CD} = 0{,}356$, und da CD für beide Steinarten sich nicht so wesentlich unterscheiden dürfte, so wäre das Verhältniſs ihrer beiden Leitungsfähigkeiten ein sehr viel gröſseres als nach den obigen Zahlen. Für feuchten Thon ist nach Ångström[3]) $k = 0{,}2264$; und drückt man die von Despretz gefundene relative Zahlenreihe durch Gleichsetzung des Werthes für Blei mit dem Péclet'schen im absoluten Maaſse aus, so ergiebt sich nach derselben für Marmor $k = 0{,}29$; setzt man aber die Despretz'schen Werthe für Kupfer, Zink

1) Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung, von John Tyndall, deutsch herausgegeben durch H. Helmholtz und G. Wiedemann. Zweite Auflage S. 267.

2) Ueber vulkanische Kraft.

3) Pogg. Ann. CXIV, S. 513.

oder Eisen gleich denen von Neumann oder Ångström, so schwanken die daraus immer in den gleichen Einheiten berechneten Zahlen von k für Marmor zwischen 0,62 und 1,75.

Alle diese Werthe dürften daher zu unsicher seyn, um als Grundlage für die Umrechnung der obigen Zahlenreihe dienen zu können. Auch die Werthe der Emissions- und Luftberührungsconstante, aus denen man ebenfalls nach der hier beschriebenen Methode absolute Zahlen der Leitungsfähigkeiten erhalten könnte, sind bis jetzt wohl für keine Substanz mit genügender Sicherheit bestimmt worden. Man wird sich daher vorläufig mit den relativen Werthen der Wärmeleitungsfähigkeiten der Gesteine begnügen müssen und für die absoluten Gröſsen derselben aus den wenigen beobachteten Zahlen nur die oberen und unteren Grenzen feststellen können.

Zum Schlusse sey es mir gestattet, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. G. Wiedemann, sowie Hrn. Dr. E. Wiedemann für die gütige Unterstützung in Rath und That, welche sie mir bei Ausführung dieser Arbeit zu Theil werden lieſsen, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Leipzig, den 11. Juli 1877.

II. *Ueber absolute Graduirung elektrischer Inductionsapparate und über elektrische Zeitmessung mit Hülfe des eben aperiodisch sich bewegenden Magnetes;* von *Dr. Arthur Christiani in Berlin.*

(Vorgetragen in der physik. Gesellschaft zu Berlin am 27. April 1877.)

I. Theoretischer Theil.

§. 1.

Das Potential zweier Inductionsspiralen auf einander, und somit auch das Zeitintegral des zugehörigen Inductionsstromes, ist auf absolutes Maafs reducirbar, indem sich ein gewisser Werth dieser Gröfse darstellen läfst als Function der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrementes des unter Dämpfung periodisch schwingenden Magnetes.

Es mögen sich beziehen die Indices:

λ auf einen reellen, endlichen Werth des logarithmischen Decrementes,

π auf den primären oder inducirenden Stromkreis,

σ auf den secundären oder inducirten Stromkreis,

c auf einen constanten Strom von beständiger Dauer.

Ferner werde bezeichnet durch:

A die elektromotorische Kraft einer constanten Kette;

W ein Widerstand;

Q das Potential der beiden Inductionsspiralen auf einander, wenn beide vom Strome Eins durchflossen gedacht werden („das Inductionspotential“);

s der Ausschlag eines Inductionsöffnungsschlages für $\varepsilon = n$ (siehe unten),

F die beständige Ablenkung eines constanten Stromes, beide Gröfsen gemessen an der Wiedemann'schen Bussole;

μ das Drehungsmoment des Stromes Eins im Multiplicator dieser Bussole auf den Magnetspiegel in seiner Ruhelage;
m das magnetische Moment,
M das Trägheitsmoment des Magnetspiegels;
H die horizontale Componente des Erdmagnetismus;
S die horizontale Componente des Hau y'schen Stabes[1]);
i die Intensität des inducirten Stromes als Function der Zeit.

Es ist alsdann, welches auch der Werth von λ seyn möge, also auch, wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$, aus der vollständigen Bewegungsgleichung des Magnetes:

$$M \frac{d^2 \alpha}{d t^2} + b^2 \frac{d \alpha}{d t} + m (H - S) \sin \alpha - \mu \frac{A_e}{W_e} = 0$$

die Ablenkung:

$$F_e = \frac{\mu A_e}{m (H - S) W_e};$$

und die Ablenkung, welche der inducirende Strom erzeugt, ist:

$$F_x = \frac{\mu A_x}{m (H - S) W_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I);$$

Wird unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden und $\varepsilon = n$ gemacht in der Differentialgleichung der Bewegung des gedämpften Magnetes:

$$\frac{d^2 \alpha}{d t^2} + 2 \varepsilon \frac{d \alpha}{d t} + n^2 \alpha = 0,$$

in welcher: $2 \varepsilon = \frac{b^2}{M}$; $\qquad n^2 = \frac{m (H - S)}{M} \quad . \quad (II)$

ist, so haben wir ferner:

$$s = \frac{\mu}{M \varepsilon e} \int_0^\infty i \, dt \; (III) \quad \text{oder} \quad s = \frac{\mu A_x Q}{M \varepsilon e \, W_x \, W_\sigma} \; (IV),$$

worin:

$$Q = \frac{1}{g^2} \iint \frac{dl \, dl'}{r} \cos (l l').$$

1) Siehe hierzu, wie überhaupt zum Folgenden: E. du Bois-Reymond „über aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete" in: Monatsber. der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869, S. 807 ff.

Dabei bedeutet g die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und dl und dl' sind die Leiterelemente des secundären und primären Kreises, l und l' die Richtungen der Ströme in ihnen und r der Abstand je zweier Leiterelemente dl und dl' von einander. Das Element des Doppelintegrales hat die Dimension einer Länge und der Factor vor den Integralzeichen, das reciproke Quadrat einer Geschwindigkeit, ist von der Dimension: $\frac{\text{Zeit . Zeit}}{\text{Länge . Länge}}$, also erscheint Q von der Dimension:

$$\text{Dim: } Q = \frac{\text{Zeit . Zeit}}{\text{Länge}} \text{ und Dim: } \frac{Q}{W} = \text{Zeit.}$$

Die Zeit t_{max}, welche ein eben aperiodisch ($\varepsilon = n$) sich bewegender Magnet braucht, um in Folge eines momentanen Stromstofses aus seiner Gleichgewichtslage in die Elongation: $x_{max} = s$ überzugehen, ist nach Hrn. E. du Bois-Reymond (l. c. S. 828):

$$t_{max} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{V}).$$

Es folgt somit:

$$Q = \frac{s \; M \; e \; W_\sigma}{F_x \, m \, (H - S) \, t_{max}} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{VI}).$$

Bedeutet λ das logarithmische Decrement und T_λ die Schwingungsdauer des periodisch schwingenden, gedämpften Magnetes, ist also:

$$\lambda = \varepsilon \tfrac{1}{2} T_\lambda = \frac{\pi \varepsilon}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}$$

und wird: $T_{\lambda=0} = T_0$ geschrieben, so bestehen andererseits die Relationen:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{m(H-S)}} = \frac{2\pi}{n}; \qquad T_0 = \frac{T_\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}};$$

oder es ist, wenn a_1 und a_2 die aufeinanderfolgenden Amplituden sind und wenn man sich der Briggs'schen Logarithmen bedient:

$$T_0 = \text{num} \left[\log T_\lambda - \left\{ \tfrac{1}{2} \log \left\{ 1 + \text{num} \left[2 \left[\log(\log a_1 - \log a_2) - 0{,}1349342 \right] \right] \right\} \right\} \right].$$

Nun ist wichtig zu bemerken, dafs für: $\varepsilon = n$ gilt:

$$t_{max} = \frac{T_0}{2\pi} = \frac{T_\lambda}{2\pi\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}} \quad . \quad . \quad \text{(VII)}.$$

Es folgt daraus für $\varepsilon = n$:

$$\frac{Q}{W_\sigma} = \frac{s e t_{max}}{F_x} = \tau.$$

Auch ist, wenn $\varDelta$ die Ablenkung bedeutet, welche durch den Strom Eins hervorgebracht wird:

$$\int_0^\infty i\,dt = \frac{s e t_{max}}{\varDelta} = J_x \tau,$$

wobei $J_x = \frac{A_x}{W_x}$ gesetzt wurde.

In der That ist also: $\frac{Q}{W_\sigma} = \tau$ eine Zeit, und zwar die Schliefsungsdauer, bei welcher ein zeitmessender Strom von der Intensität des inducirenden Stromes den gleichen Ausschlag hervorbringen würde, wie der Inductionsöffnungsschlag ihn unter den gegebenen Verhältnissen factisch hervorbringt. Denn: „ist F die Ablenkung durch den zeitmessenden Strom in beständiger Gröfse, x der Ausschlag durch denselben Strom während der kleinen Zeit τ, so findet man für diese leicht den Ausdruck“:

$$\tau = \frac{x e t_{max}}{F}$$

(du Bois-Reymond l. c. S. 852).

Die Gröfse: $\frac{s}{F_x}$ in dem für das Inductionspotential Q abgeleiteten Ausdruck:

$$Q = \frac{s e t_{max}}{F_x} W_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

ist eine reine Zahl.

Wir setzen für einen bestimmten Werth von s, den wir durch s' bezeichnen wollen, fest, dafs:

$$\frac{s'}{F_x} = \alpha = \text{const};$$

worin α eine ein für alle Male *gegebene* constante Zahl bedeutet (s. unten S. 574).

Nachdem wir experimentell F_x für den gegebenen Fall bestimmt haben, ändern wir die relative Lage der beiden Spiralen des Inductoriums so lange, bis s den Werth:

$$s' = \alpha F_x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IX)}$$

erreicht. Bei der üblichen Einrichtung der Inductorien (Schlitteninductorien du Bois-Reymond's), bei welcher die secundäre Rolle mit der primären conaxial ist und bleibt, entspricht dem Werthe s' alsdann ein ganz bestimmter Abstand x' der Rollen von einander. Es möge nun der Widerstand des secundären Kreises in Siemens-Einheiten und die Zeit in Secunden gegeben werden, also wenn a und $\mathfrak{a}$ Zahlen bedeuten, sey:

$$W_\sigma = a\,(1^{SE}); \qquad t_{max} = \mathfrak{a}\,(1^{scd}).$$

Dann definiren wir Q_0 „die Einheit des Inductionspotentiales“ oder „die Inductionseinheit“ durch:

$$Q_0 = \alpha\, e\,(1^{SE})\,(1^{scd}),$$

so dafs, wenn Q' den zu s' gehörenden Werth des Inductionspotentiales bedeutet, aus Gleichung (VIII) wird:

$$Q' = a\,\mathfrak{a}\,Q_0 \quad \text{oder auch} \quad Q' = a\,\mathfrak{a}\,(1^{Q_0}) \quad \text{(X)},$$

d. h. also: sobald a und $\mathfrak{a}$ ermittelt sind, ist Q' gleich einer bekannten Anzahl von Inductionseinheiten.

Giebt man, was ja leicht angeht, auch dem a ein für alle Male denselben Werth, so ist:

$$Q' = \text{const.}\,\mathfrak{a} = f\,(T_\lambda, \lambda).$$

§. 2.

Mit der Bestimmung von $\mathfrak{a}$ und x' oder, was dasselbe, mit der von t_{max} und x' und nach Herstellung der in meinem Werke: „über irreciproke Leitung elektrischer Ströme“ (s. Pogg. Annal. Bd. 158, S. 163 Anmerkung) besprochenen „Potentialcurve“ ist die absolute Graduirung des Inductoriums als vollzogen zu betrachten. Man zeichne sich

die Potentialcurve für einen beliebigen, der Empfindlichkeit des Galvanometers entsprechenden Parameter $\frac{A_x}{W_x W_\sigma}$; dann ist, wenn Q_x den Werth des Inductionspotentiales für den beliebigen Rollenabstand x und s_x die zugehörige Ordinate bedeutet:

$$Q_x = \frac{s_x}{s'} Q' = \frac{s_x}{s'} a\alpha (1^{Q\cdot}) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XI)},$$

s' ist dabei die zu der vorher ermittelten Abscisse x' gehörige Ordinate der Potentialcurve.

Mit Q_{max} werden wir im folgenden denjenigen Werth des Inductionspotentiales bezeichnen, welcher *bei gänzlich übereinandergeschobenen Rollen, aber ohne Eiseneinlage* stattfindet. Q_{max} definirt die „*Leistungsfähigkeit eines Inductoriums*“.

§. 3.

Die Bestimmung von α oder von t_{max} läfst sich dem Vorstehenden zu Folge sehr genau ausführen, indem wir *den Hauy'schen Stab an der Stelle belassen, an welcher er $\varepsilon = n$ macht*, aber der Dämpfung, also auch dem λ, nach einander verschiedene Werthe geben, der Art jedoch, dafs der Magnetspiegel periodisch schwingt: wir bestimmen die jedesmalige Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement nach bekannten Methoden, und berechnen dann t_{max} aus der für dasselbe aufgestellten, für $\varepsilon = n$ gültigen Formel (VII). Zu dieser Bestimmung des t_{max} bedarf man jedoch, ebenso wie zur Graduirung der Inductorien nach obiger Methode, der Präcisirung des Abstandes, in welchem der Hauy'sche Stab sich vom Magnetspiegel befinden mufs, damit genau $\varepsilon = n$ werde.

So lange, wie bisher, der Stababstand: ($\varepsilon = n$) experimentell definirt wird als derjenige Abstand, bei welchem die zweite Elongation des Magnetspiegels für die Wahrnehmung verschwindet, bleibt die Fixirung des Zustandes der „eben eingetretenen Aperiodicität“, wenn auch in ziemlich engen, übrigens von der Feinheit der Ablesung ab-

hängigen Grenzen, arbiträr, und es dürfte daher wünschenswerth erscheinen, bei der Beurtheilung, ob der Zustand: $(\varepsilon = n)$ wirklich vorliege, noch ein anderweitiges Beobachtungskriterium zu Rathe ziehen zu können.

Zu einem solchen gelangt man durch folgende Betrachtung:

Wenn ein unter Dämpfung periodisch schwingender Magnet aus seiner Ruhelage abgelenkt wird durch einen Strom von einer im Vergleich zur Schwingungszeit des Magnetes sehr kurzen Dauer, so ist nach W. Weber die erste Elongation:

$$\sigma = c \frac{T_0}{2\pi} e^{-\frac{\lambda}{\varkappa} \operatorname{arc\,tang} \frac{\varkappa}{\lambda}},$$

woraus nach dem frühern folgt:

$$\sigma e^{\frac{\lambda}{\varkappa} \operatorname{arc\,tang} \frac{\varkappa}{\lambda}} = c\, t_{max} = \frac{c}{\varepsilon}.$$

c ist hierin die von der Dämpfung unabhängige Geschwindigkeit, welche der Stromstoſs dem Magnetspiegel ertheilt. Nun ist aber für $\varepsilon = n$: $\frac{c}{\varepsilon e} = s$ (s. du Bois-Reymond l. c. Formel (XXXIV), also haben wir:

$$s = \sigma e^{\frac{\lambda}{\varkappa} \left\{ \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{\varkappa}{\lambda} \right) - \frac{\pi}{\lambda} \right\}}.$$

Wenn also ein beliebig gewählter Inductionsstrom unter einer beliebigen dem Werthe λ entsprechenden Dämpfung dem periodisch schwingenden Magnete die erste Elongation σ ertheilt, so muſs, damit nach der Aperiodisirung $\varepsilon = n$ sey, der Ausschlag *desselben* Inductionsstromes obigen Werth s annehmen.

Für verschwindende Werthe von λ muſs seyn:

$$\sigma_{\lambda=0} = e\, s \; (= \sigma_0)$$

und für kleine Werthe von λ wird seyn:

$$\sigma \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = e\, s \; (= \sigma_\lambda).$$

Es wird also auch seyn müssen:

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_\lambda}{2} = es,$$

wenn $\varepsilon = n$ seyn soll.

§. 4.

Die Bestimmung von t_{max} gelingt noch in einer anderen als in der soeben angegebenen Weise.

Da die Auswerthung von t_{max} von Interesse ist, nicht allein wegen der dadurch ermöglichten, leichten Bestimmung des Inductionspotentiales, sondern auch deshalb, weil man im Besitz der Kenntnifs von t_{max} nunmehr den aperiodisch sich bewegenden Magnet zur elektrischen Zeitmessung wird verwenden können (siehe du Bois-Reymond l. c. S. 852), so ist die Aufstellung zweier verschiedener, genaue Werthe liefernder Methoden von Belang, um so mehr als eine directe, auch nur einigermaafsen scharfe Bestimmung von t_{max} unmöglich ist.

Die gedachte, zweite Methode ergiebt sich, wie folgt.

Wenn ein momentaner Stofs auf den ($\varepsilon = n$) aperiodischen Magnet in der Ablenkung ξ wirkt und ihm die Geschwindigkeit:

$$-c$$

ertheilt, so ist

$$x = e^{-\varepsilon t}\{\xi - t(c - \varepsilon\xi)\} = e^{-\frac{2\pi}{T_0}t}\left\{\xi - t\frac{2\pi}{T_0}(es - \xi)\right\}$$

und:

$$-\frac{dx}{dt} = e^{-\frac{2\pi}{T_0}t}\frac{2\pi}{T_0}(es - \xi) - \frac{2\pi}{T_0}e^{-\frac{2\pi}{T_0}t}\left\{\frac{2\pi}{T_0}t(es - \xi) - \xi\right\}.$$

Ist nun für einen endlichen Werth t' der Zeit $-\frac{dx}{dt} = 0$, so folgt:

$$t' = \frac{T_0}{2\pi}\cdot\frac{es}{es - \xi},$$

also:

$$-x_{max} = e^{-\frac{es}{es-\xi}}(es - \xi).$$

Für $\xi = 0$ wird: $-x_{max} = e^0 s = s$.

Für $\xi = es = \frac{c}{\varepsilon}$ wird: $-x_{max} = 0$ (vergl. du Bois Reymond l. c. S. 844 bis 847).

Für $\xi = s$, *und dieses ist der uns interessirende Fall,* wird:

$$-x_{max} = e^{-\frac{e}{e-1}}(e-1)\,s = 0{,}353\,s.$$

Man denke sich, daſs ein Pendel, dessen Schwingungsdauer durch $P_T = t_2 - t_1$ gegeben sey, aus einer gewissen Ablenkung fallend schwinge und daſs dasselbe zur Zeit t_1, wo der $(\varepsilon = n)$ aperiodische Magnet sich in seiner Ruhelage befinden soll, einen inducirenden Strom öffne. Der Inductionsöffnungsstrom erzeuge den Ausschlag $s = \frac{c}{\varepsilon e}$. Ferner soll zur Zeit t_2 das Pendel denselben inducirenden Strom bei unveränderten übrigen Verhältnissen schlieſsen; dann wird die dem Magnete zur Zeit t_2 durch den Schliessungsschlag ertheilte Geschwindigkeit seyn:

$$-c = -\varepsilon e s.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daſs das Inductorium keinen Eisenkern enthält [1]).

Nun werde die Länge des Pendels so lange variirt, bis *genau* $t_2 - t_1 = t_{max}$ wird; dann ist der Bedingung genügt, unter welcher die Gleichung $-x_{max} = 0{,}353\,s$ *genau* gilt, nämlich der Bedingung, daſs dem in der Ablenkung: $\xi = s = \frac{c}{\varepsilon e}$ *ruhenden* Magnete durch einen momentanen Stoſs eine Geschwindigkeit: $-c = -s\varepsilon e$ ertheilt wird.

Für jeden anderen Werth der Schwingungsdauer des Pendels $t_2 - t_1 \gtrless t_{max}$ fällt auch die Elongation

$$-x_{max} \gtrless 0{,}353\,s$$

aus, weil dann der Magnet von dem Inductionsschlieſsungsschlage getroffen wird zu einer Zeit und bei einer Ablenkung, in welcher er $\left\{\begin{matrix}\text{bereits negative}\\ \text{noch positive}\end{matrix}\right\}$ Geschwindigkeit hat,

1) S. „über irreciproke Leitung" S. 30 und 62.

und weil diese letztere sich zu der durch den Stofs ertheilten Geschwindigkeit: — *c* algebraisch hinzuaddirt. — Auf diese Weise ist es gelungen, den *wegen seines je einmaligen Auftretens* der scharfen Zeitmessung unzugänglichen und in gewissem Sinne aperiodischen Vorgang gleichsam zu übersetzen, ihn darzustellen als das Element eines periodischen Vorganges *von beliebiger Beobachtungsdauer* und somit von scharfer Bestimmbarkeit seiner gleichwerthigen Theile: *das stromschliefsende Pendel dient als Multiplicator der zu bestimmenden Zeit.*

II. Experimenteller Theil.

§. 5.

Ueber die Aenderungen, welche man zur Bestimmung von t_{max} nach der ersteren der von uns gegebenen Methoden an der Dämpfungsvorrichtung der Bussole vorzunehmen hat, sey Folgendes bemerkt.

Die Wiedemann'schen Bussolen tragen in der Ausführung Sauerwald-Plath [1]) ihren cylindrischen Kupferdämpfer an einem ℧-förmigen Ansatze, welchen ich der Kürze halber als „den Schacht" bezeichnen will. Von diesem Schachte läfst sich der Dämpfer abschrauben, und zwar kann dieses, wenn man die bisher vorhandenen Schrauben durch solche mit höheren Köpfen ersetzt, in der Weise geschehen, dafs weder die Bussole verrückt noch der strommessende Magnet berührt wird. Man hat alsdann zunächst nur den kleineren Theil des Dämpfers abzuschrauben: es ist der gröfsere Theil des Dämpfers das an dem Schachte befestigte Stück. Dieses bleibt somit allein hängen und birgt dabei noch den Magnet vollständig in sich, wenn er sich in dem magnetischen Meridiane befindet.

Wenn man unter Beachtung der Anwesenheit des Hauy'schen Stabes es vermeidet den Schnurlauf der Com-

1) Th. Edelmann hat Spiegelgalvanometer mit verstellbarer Dämpfung construirt. S. Carl's Repertor. VIII, S. 357—368.

pensationsvorrichtung zu verziehen, wird der Magnet nur wenig abgewichen seyn. Unter Fixirung des größeren Theiles des Dämpfers mittels der linken Hand entfernt man nunmehr mit der rechten die beiden neuen Schrauben des Schachtes, worauf auch der *größere* Theil des Dämpfers sich abnehmen läſst, ohne daſs der strommessende Magnet berührt wird. Der Schacht bleibt also an der Bussole hängen und aus ihm ragt der Magnet am Faden oder am Spiegelgestänge hervor. Zum Schutz gegen Luftzug von Oben setze man alsdann das alte, hölzerne Spiegelhäuschen auf (neuerdings wird ein Häuschen von Messing den Bussolen beigegeben). Von unten her wird ein cylindrischer Glasbecher von 75 bis 80 Mm. Höhe und 65 bis 70 Mm. Durchmesser mit abgeschliffenem Rande über Magnet und Schacht gestreift und durch ein untergeschobenes Filzstück gegen den den Schacht tragenden kreisförmigen Schild gepreſst.

Unter diesen Umständen erhält das logarithmische Decrement nur einen auſserordentlich kleinen Werth und wir dürfen und wollen diesen Zustand der Bussole als den von Dämpfung freien bezeichnen. Wir werden also die Schwingungsdauern des Magnetes, welche unter diesen Umständen stattfinden, durch das Symbol T_0 geben.

Eine zweite Reihe von Werthen endlicher Schwingungsdauern erhalten wir durch Herstellung desjenigen Zustandes der Bussole, den ich der Kürze wegen als „halbe Dämpfung" bezeichnen will, bei welchem der gröſsere Theil des Kupferdämpfers am Schachte hängen bleibt und der kleinere Theil des Dämpfers durch einen ihm gleichgestalteten Holzring ersetzt wird. Der so gebildete Holz-Kupferdämpfer wird seitlich geschlossen durch die zum Dämpfer gehörenden bekannten Messingkapseln. Ich setze nämlich voraus, daſs man mit einem Glasspiegelringsystem arbeitet: ein solches hat ja so viele Vorzüge vor den magnetischen Spiegeln. Diese Voraussetzung erlangt allerdings ihre volle Bedeutung erst bei der Herstellung des dritten oder *„vollen"* Dämpfungszustandes an der Bussole.

Bei diesem wird das hölzerne Spiegelhäuschen durch das von Messing ersetzt; es wird ferner der vollständige Kupferdämpfer angebracht und endlich wird dieser durch *massive* Kupfercylinder seitlich geschlossen, welche dem Magnete einen nur um ein Geringes gröfseren Spielraum frei lassen als zur gröfsten Elongation (500^{sc}) bei $2600{,}0^{mm}$ Scalenabstand nöthig ist.

§. 6.

Im Folgenden bezeichnet:

m den Modul der Briggs'schen Logarithmen,

K den Abstand der Symmetrieaxe des Hauy'schen Stabes von der dem Stabe parallelen Ebene des magnetischen Meridians,

A den Abstand des Mittelpunktes des Hauy'schen Stabes vom Mittelpunkt des Magnetringes, beide Gröfsen in Millimetern,

$\mathfrak{T}_0$ die Beruhigungszeit ohne Hauy'schen Stab,

$\mathfrak{T}_m$ die mit Hauy'schem Stab, beide beim Fallen des Magnetringes aus der Ablenkung $= 510^{sc}$ bei einem Abstande der Scala vom Spiegel gleich: $2615{,}0^{mm}$ gemessen. Das Gewicht des Ringspiegelsystemes betrug $2{,}49^{grm}$.

Aus den Untersuchungen ergab sich folgende Tabelle[1]).

1) Vergl. du Bois-Reymond l. c. S. 837.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
						Bei halber Dämpfung		Bei voller Dämpfung	
K	A	T_0	t_{max}	$\mathfrak{T}_m$	$\iota = n$	T_λ	$l = \lambda m$	T_λ	$l = \lambda m$
millim.	millim.	secd.	secd.	secd.		secd.	Zahl	secd	Zahl
297	—	8,43	—	—	—	imaginär		imaginär	imaginär
298,5	312,0 (A'_1)	8,03	1,278	13,0	bei halber Dämpfung	∞	∞		
300,0	—	7,68	—	—	—	< ∞	< ∞		
305,0	—	6,74	—	—	—	do.	do.		
312,5	—	5,95	—	—	—	do.	do.		
314,0	327,0 (A'_2)	5,82	0,9267	7,3	bei voller Dämpfung	8,4	1,42597	∞	∞
315,5	—	5,67	—	—	—	—	—	< ∞	< ∞
324,0	336,7	5,48	(0,870)	—	—	—	—	do.	do.
340,0	—	4,5	—	—	—	—	—	do.	do.
370,0	—	3,87	—	—	—	—	—	do.	do.
∞	∞	2,74	(0,435)	$=\mathfrak{T}_0 = 8,4$ bei voller Dämpfung	bei nicht bekannter Dämpfung	2,9	0,488	3,1	0,69358

Die Reiben I und III dieser Tabelle zeigen, wie T_0, die Schwingungsdauer des ohne Dämpfung schwingenden Magnetes, abnimmt mit abnehmender Astasie. Die Aufstellung war derartig, dafs:

$$A = \sqrt{K^2 + 8281},$$

also auch, wenn A' und K' diejenigen Werthe von A und K bedeuten, bei denen die Aperiodicität eben eintrat, war:

$$A' = \sqrt{K'^2 + 8281}.$$

Man sieht aus der Tabelle, dafs dieser Fall $\varepsilon = n$ zwei Mal eintrat, nämlich für $A'_1 = 312{,}0$ bei halber Dämpfung und für $A'_2 = 327{,}0$ bei voller Dämpfung. Könnten wir mit der Variation der Dämpfung an der Bussole in ähnlicher Weise continuirlich vorgehen, wie mit der Verrückung des Hauy'schen Stabes, so würden wir für jeden Abstand des Stabes $A > 312{,}0$ ja auch für jeden Abstand $A > 327{,}0$ $\varepsilon = n$ machen können. Bei den Siemens'schen Glockenmagneten gelingt dies bekanntlich sogar für $A = \infty$, d. h. wenn gar kein Stab vorhanden ist.

Da $T_0 = 2\pi \, . \, t_{max}$, so zeigen die Reihen I und III auch, wie t_{max} mit abnehmender Astasie sich ändert, und es würde also, könnten wir die Dämpfung genügend grofs machen, $t_{max} = 0{,}435$ für $A = \infty$ werden.

Es möge hier noch hervorgehoben werden, dafs, wenn A von ∞ bis 336,7 abnimmt, t_{max} nur den doppelten Anfangswerth erreicht. Schliefslich ersieht man noch aus der Tabelle, dafs, abgesehen von der geringeren Astasie, also von dem geringeren Einflufs der Declinationsschwankungen, der Zustand $\varepsilon = n$ bei voller Dämpfung noch *den* Vorzug hat vor dem bei halber Dämpfung auftretenden, eine doppelte Bestimmung von t_{max} zu gestatten, nämlich erstens aus dem Werthe T_0 und zweitens aus den Werthen T_λ und λ für halbe Dämpfung. Beide Bestimmungen werden selbstverständlich (s. §. 3) ausgeführt für:

$$A = 327{,}0.$$

Zu den Bestimmungen von T_0, sowie zu den später zu erwähnenden Bestimmungen der Pendelschwingungen,

namentlich aber zu den Bestimmungen von T_λ, ist ein Chronoskop sehr bequem, wo nicht unentbehrlich. Ich bediente mich eines solchen aus der Werkstatt des Hrn. Moritz Grofsmann zu Glashütte in Sachsen. Diese Chronoskope sind in Taschenuhrform ausgeführt und scheinen übrigens noch wenig im Gebrauch zu seyn, leisten aber Vorzügliches.

§. 7.

Um die zweite Art der Bestimmung von t_{max} auszuführen, habe ich das in Fig. 4, Taf. VIII abgebildete Pendelrheotom construirt. Die Figur zeigt den Apparat in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse [1]) und in der zum Versuche bereiten Anordnung. Auf einem durch drei Stellschrauben *ABC* horizontal zu richtenden Grundbrette befindet sich der Pendelträger *T*, an welchem das Pendel frei aufgehängt ist. Dasselbe schwingt in der das Grundbrett halbirenden Verticalebene, welche senkrecht zur Linie *AB* steht, und besteht aus einer runden, am unteren Ende jedoch keilförmig zugeschärften Messingstange, an welcher eine Hülse durch die Schraube *z* in beliebiger Höhe festgestellt werden kann. Ueber diese Hülse ist eine durchbohrte Messingkugel geschoben: die Mikrometerschraube *x* dient dazu, die Höhe dieser Kugel auf der Hülse um kleine Gröfsen zu ändern.

In der Mitte zwischen den Stellschrauben *A* und *B* befindet sich eine durch den Träger *T* in der Figur halbverdeckte, hohle, eine Spiralfeder enthaltende Messingsäule (Fig. 5), über welche eine oben in den abgeplatteten Druckknopf *d* endigende Messingröhre gestülpt ist. Ueberwindet man durch Druck auf *d* die Kraft der eingeschlossenen Feder, so bewegt sich der an der vorderen Seite des übergeschobenen Messingrohres befindliche Fortsatz *o* vertical

1) Bei den hier angegebenen Dimensionen reicht der Apparat aus, um Werthe von t_{max} bis zur Höhe von etwas über 1 Secunde zu bestimmen. Zur Bestimmung höherer Werthe von t_{max}, müfste die Pendelstange länger seyn.

nach unten und zwar ohne Drehung. Um Letztere zu vermeiden, ist die übergeschobene Hülse an der einen Seite der Länge nach aufgeschnitten und an der inneren Säule ein in diesen Einschnitt eingreifender Vorsprung angebracht. Der Fortsatz *o* endet oben lyraförmig. Hinter den quergespannten, in der Mitte etwas eingebogenen Draht der Lyra ist das äufserste Ende der Pendelstange gelegt. Nach unten ruht der Fortsatz *o* auf dem um *K* drehbaren Hebel *hh'*. Das Ende *h'* dieses Hebels hält die aus ihrer Mittellage abgelenkte Pendelstange eines Mälzel'schen Metronomes in der äufsersten Elongation fest. Das Metronom ist auf nahezu die doppelte Schwingungsdauer wie das stromschliefsende Pendel eingestellt und so orientirt, dafs die Schwingungsebene seines Pendels der des stromschliefsenden Pendels parallel ist.

Nahezu in der Mitte des Grundbrettes erhebt sich auf der aufgeschraubten Messingplatte *s* eine kleine, die Walze *v* (Fig. 6) in einem gabelförmigen Lager tragende Säule. Nach oben wird die Walze *v* durch Stifte im Lager zurückgehalten; von unten drückt eine schwache Feder gegen dieselbe, so dafs sie sich mit einer gewissen Reibung dreht. An dieser Walze sind zwei Fortsätze bemerkbar: der eine *r* taucht gerade durch die Oberfläche des in dem Näpfchen *n* befindlichen Quecksilbers, wenn der andere Fortsatz *e* genau in diejenige zur Schwingungsebene des Pendels senkrechten Ebene eingestellt ist, welche die Gleichgewichtslage des Pendels enthält. Auf einer durch die Elfenbeinplatte *i* von *s* isolirten Messingplatte bewegt sich in schwalbenschwanzförmiger Führung der Schlitten *s'*, auf welchem eine die Walze *v'* tragende Säule sich befindet. Die Walze *v'* ist in derselben Weise gelagert, wie *v*, auch trägt sie ebenfalls zwei Fortsätze, von denen der eine *e'* dem Fortsatze *e* entspricht; der zweite *r'*, welcher dem *r* entspricht, mufs jedoch etwas anders und zwar so gestaltet seyn, wie die Figur zeigt. Bei *m* befindet sich die Oeffnung eines mit der oberen Fläche des Grundbrettes abschneidenden, in dasselbe eingelassenen, kreisförmig (der Krümmung von *r'*

entsprechend) gebogenen Glasrohres. Unten ist dasselbe geschlossen. Es dient als dem Näpfchen *n* entsprechendes Quecksilbergefäſs und ist bis an den Rand mit Quecksilber gefüllt. Wenn die Spitze des Hakens *r'* genau ebensoviel *über* der Quecksilberkuppe des Näpfchens *m* steht, als der Haken *r* unter die Oberfläche des Quecksilbers in *n* taucht, so liegen die Fortsätze *e'* und *e* in derselben zur Schwingungsebene des Pendels senkrechten Ebene. — Der Schlitten *s'* wird zurückgezogen mittels seiner Deichsel, über welche eine Spiralfeder gestreift ist. Die Deichsel ist durch eine Oeffnung der die schwalbenschwanzförmige Führung des Schlittens abschlieſsenden Messingplatte *p* gesteckt. Gegen diese Platte *p* und gegen den Schlitten *s* stemmt sich die Spiralfeder, wenn der Schlitten an der Deichsel gegen das Metronom hingezogen wird. Vorn am freien Ende ist die Deichsel fein hakenförmig eingeschnitten. Das Winkelstück *w*, welches sich um eine horizontale, zur Schwingungsebene des Pendels senkrechte Axe, um die Schraube *ϱ*, dreht und welches an seiner dem Metronome zugewandten Fläche ein polirtes Stahlstückchen behufs Verminderung der Reibung trägt, hält mit dem Stahlstückchen in den Deichselhaken greifend den Schlitten in der „gespannten Stellung“ fest. An das Winkelstück *w* ist der Arm *t* und an diesem wieder der Fortsatz *u* verstellbar befestigt. Der Fortsatz *u* steht senkrecht zur Schwingungsebene der Metronompendelstange.

Die Drähte *a* und *c* in der Figur stellen die Enden des primären oder inducirenden Kreises dar. Draht *c* taucht in das Näpfchen *n*, dessen Quecksilber durch den Draht *b* mit dem des röhrenförmigen Näpfchens *m* verbunden ist. Draht *a* theilt sich in zwei feindrähtige Spiralen a_1 und a_2, welche zu den Walzen *v* und *v'* führend in die Fortsätze *r* und *r'* endigen. Beim Anfange des Versuches sind die Fortsätze *e* und *e'* in die Gleichgewichtsebene des Pendels eingestellt: es taucht also *r* den primären Strom schlieſsend in *n*, während *r'* das Quecksilber in *m* nicht be-

rührt, und zwar geschieht dies Letztere schon deshalb nicht, weil der Schlitten zurückgezogen ist. Drückt man jetzt auf den Knopf *d*, so wird das stromschliefsende Pendel frei. Dasselbe kommt nach einer Zeit gleich $\frac{1}{4}P_T$ in der Gleichgewichtslage an, trifft hier den Fortsatz *e* und öffnet somit, *r* aus *m* hebend, den inducirenden Strom. Gleichzeitig mit dem Freiwerden des stromschliefsenden Pendels durch den Druck auf *d* wird auch der Arm *h'* von der Pendelstange des Metronomes abgezogen. Nach einer Zeit $= \frac{3}{4}P_T$ gelangt das stromschliefsende Pendel zum zweiten Male zur Gleichgewichtslage und passirt dieselbe, ohne ein Hindernifs vorzufinden, da der Fortsatz *e* beim ersten Durchgange umgeschlagen wurde, der Fortsatz *e'* aber wegen der gespannten Stellung des Schlittens nicht durch die Schwingungsebene schneidet. Nach einer Zeit $= \frac{4}{4}P_T$ hat das Metronompendel seine halbe Schwingung (ein Hin- und Hergang als eine Schwingung gerechnet) beendet und stöfst an den Arm *u* mit einer Kraft, welche ausreicht, die Hemmung des Schlittens auszulösen. Der Schlitten schiefst durch die Feder getrieben vor, wodurch *e'* in die Schwingungsebene einschneidet und vom stromschliefsenden Pendel nach einer Zeit $= \frac{5}{4}P_T$ so getroffen wird, dafs *r'* in *m* tauchend den inducirenden Strom schliefst. Die Reibung der Walze *v'* im Lager ist grofs genug, eine Drehung von *e'* beim Vorschiefsen des Schlittens zu verhindern. Die Widerstände der Drähte endlich sind so abgepafst, dafs der inducirende Strom denselben Werth hat, gleichviel ob er durch *r* oder durch *r'* geschlossen wird.

Die Zeit Θ, welche zwischen Oeffnung und Schliefsung des inducirenden Stromes vergeht, ist sehr genau gleich der Schwingungsdauer des stromschliefsenden Pendels. Wenn ω und ω_1 zwei sehr kleine Gröfsen erster Ordnung und wenn $\omega_1 - \omega = \omega'$ eine sehr kleine Gröfse zweiter Ordnung ist, so können wir setzen:

$$\Theta = (\tfrac{5}{4}P_T + \omega_1) - (\tfrac{1}{4}P_T + \omega) = P_T + \omega';$$

ω' verschwindet gegen P_T vollkommen, wenn das Pendel-

$$J_n = 0{,}001\, J_x \quad \text{und}$$
$$\mu_t = 0{,}01\, \mu_{max},$$

so ist:

$$0{,}00001\, J_x\, \mu_{max} = F_t.$$

Nun dürfen wir aber:

$$J_x\, \mu_{max} = F_x$$

setzen, wenn wir nachher die inducirten Ströme bei ganz über den Dämpfer geschobener Hydrorolle messen. Es wird dann:

$$F_x = 100000\, F_t \quad \text{und} \quad \alpha\, F_x = 0{,}1\, F_t = s'.$$

Nachdem wir also F_t abgelesen, haben wir nur (durch Aenderung der relativen Lage der Inductionsrolle) der letzteren Gleichung zu genügen, um die Lage von Q' d. h. x' zu erhalten.

§. 10.

Ich gebe schliefslich noch folgende Zahlenbeispiele.

Der Widerstand w_2 der benutzten Nebenschliefsung LC (es wurde der sogenannte lange Compensator hierzu verwendet) betrug $w_2 = 2{,}532^{SE}$; (20° C.).

Der Widerstand der Hydrorolle war: $2459{,}00^{SE}$; (20° C.). Der Widerstand der nöthigen Zuleitungsdrähte ($LabB$ und $BdcC$ in der Fig. 9, Taf. VIII, welche die Anordnung der Apparate schematisch darstellt) war: $0{,}311^{SE}$; (20° C.).

Diesen Zuleitungsdrähten wurde aus dem Stöpselrheostate Rh_t hinzugefügt der Wiederstand $70{,}0^{SE}$, so dafs, wenn w_1 den Widerstand der Nebenschliefsung zu LC bedeutet, war: $w_1 = 2529{,}311$, also $\frac{w_1}{w_2} + 1 = 1000$.

Nun ist aber nach Hrn. Kirchhoff's Formeln:

$$\left(\frac{w_1}{w_2} + 1\right) J_n = J_x,$$

also, wie wir wollten:

$$J_n = 0{,}001\, J_x.$$

Der seines Kreuzes beraubte Pohl'sche Gyrotrop w war hierbei in der Richtung des oberen Pfeiles umgekippt, auch war aus seinen Näpfchen a und c die (punktirt ge-

zeichnete) Leitung entfernt. Die Hydrorolle war behufs Messung von J_n bis in die Lage l vom Spiegel abgerückt, welche Abrückung durch die punktirte Figur unter der Bussole B angedeutet seyn soll. Die Noë'sche Sternsäule [1]) N lieferte den Strom J_x. Es wurden zwei Inductorien untersucht:

I.	II.
Inductorium mittlerer Dimension (Index: I)	Inductorium kleinerer Dimension (Index: II)

und zwar geschah die Untersuchung zunächst bei voller Dämpfung, also für:

$$t_{max} = 0{,}9267^{scd} \text{ oder für } \alpha = 0{,}9267.$$

Der Widerstand w_σ der secundären Rollen inclusive der Zuleitungsdrähte betrug:

$$(w_\sigma)_I = 293{,}0^{SE}; \quad (w_\sigma)_{II} = 365{,}0^{SE}.$$

Hinzugefügt wurden (nach Willkür) aus dem Rheostate Rh_{II} (s. Fig.) die Widerstände:

$32{,}0^{SE}$; $1000{,}0^{SE}$, so dafs also: $a_I = 2784{,}0$; $a_{II} = 3824{,}0$ war.

Abgelesen wurden die Ausschläge:

$$(F_l)_I = 310{,}0^{sc}\ ; \ (F_l)_{II} = 326{,}0^{sc}$$

und gefunden wurde:

$$s'_I = 31{,}0^{sc}\ ; \ \tfrac{1}{2} s'_{II} = 16{,}3^{sc} \text{ [2])}$$

beim Abstande x der secundären Rolle von der primären:

$$x'_I = 4{,}75^{cm}; \ x_{II} = 0.$$

Es war also:

$$(Q'_{4,75})_I = 2784 \,.\, 0{,}9267^{Q_0} = 2579{,}93^{Q_0}$$

und:

$$(Q_0)_{II} = (Q_{max})_{II} = \tfrac{1}{2} Q'_I = 1912 \,.\, 0{,}9267^{Q_0} = 1771{,}85^{Q_0}.$$

Ferner fand sich:

$$(Q_{max})_I = 6145{,}93^{Q_0}.$$

1) Siehe den Zusatz zu dieser Abhandlung S. 579.

2) Dies ist der höchste erreichbare Ausschlag; x' ist für das Inductorium II imaginär, eben so Q', wir schreiben daher $Q'_{II} = Q'_I$.

Ich bemerke hierzu noch Folgendes: Sämmtliche Messungen sind bei 20° C. ausgeführt. Es ist dies nöthig zu berücksichtigen, da der Werth des Inductionspotentiales, allerdings nur in sehr geringem Maafse, mit der Temperatur sich ändert.

Bei der Messung des Inductionsstromes ist die Hydrorolle in das Maximum ihrer Wirkung eingestellt, die Wippe w in Fig. 9 in der Richtung des unteren Pfeiles umgekippt, die (punktirte) leitende Verbindung zwischen a und c hergestellt und aus dem Rheostate Rh_I ein Widerstand $= 2459{,}0^{SE}$ in die Strecke La eingeschaltet, letzteres, damit der inducirende Strom *genau* den vorher bestimmten Werth J_π erhalte. Der inducirte Strom entsteht bei Oeffnung des in den primären Kreis eingeschalteten Quecksilberschlüssels S_I, wenn der in dem secundären Kreise befindliche Schlüssel S_{II} geschlossen ist.

Dieselben Inductorien I und II wurden auch noch bei halber Dämpfung graduirt. Diese Untersuchung bildet eine von der vorhergegangenen durchaus unabhängige; sie ist eine gleichsam mit einer völlig anderen Bussole ausgeführte und kann daher als Controle für die erstere Untersuchung dienen. Es wurde zunächst ein beliebig gewählter Abstand der Rollen von einander und zwar der Abstand:

$$x = 2{,}75$$

als derjenige ausersehen, für welchen das Potential Q bei halber Dämpfung bestimmt werden sollte. Sodann wurde bei noch vorhandener voller Dämpfung das Verhältnifs der Ausschläge für die Abstände der Rollen: 0 und 2,75 durch den Versuch ermittelt. Es fand sich für Inductorium II:

$$\frac{s_0}{s_{2,75}} = \frac{60{,}5^{sc}}{41{,}5^{sc}} = 1{,}458.$$

Da nun nach Formel (XI) (S. 561):

$$Q_x = \frac{s_x}{s'} Q',$$

so folgt *aus der Graduirung bei voller Dämpfung*:

$$Q_{2,75} = \frac{s_{2,75}}{s_0} Q'_0 = \frac{1771,85^{Q_0}}{1,458} \quad \text{oder:}$$

$$Q_{2,75} = 1215,2^{Q_0}.$$

Nunmehr wurde *bei halber Dämpfung* $\varepsilon = n$ gemacht und eine derartige Ablenkung F_t beobachtet, dafs

$$F_x = 82000000$$

wurde. Ferner fand sich: $s_{2,75} = 20,5$, wenn:

$$W_\alpha = 3803,0^{SE}$$

gemacht war. Es war also:

$$\frac{s_{2,75}}{F_x} = 0,25\,\alpha,$$

so dafs man *in der That* erhielt:

$$Q_{2,75} = 3803 \,.\, 1,278 \,.\, 0,25^{Q_0} = 1215,059^{Q_0}.$$

Eine ebenso gute Uebereinstimmung der beiden Graduirungsresultate ergab sich für das erste Inductorium.

III. *Ueber Behandlung Noë'scher Sternsäulen; von Dr. A. Christiani.*

Die Noë'schen Thermoketten (vgl. §. 10 der vorigen Abhandlung) eignen sich wegen ihrer grofsen Constanz und wegen der fehlenden Polarisation vorzüglich zu Präcisionsarbeiten, wenn man gewisse Vorsichtsmaafsregeln beobachtet und eine kleine aber wichtige Aenderung an ihnen vornimmt. Die Vorsichtsmaafsregeln bestehen einfach darin, dafs man die Säulen an einem vor stofsweisen Luftzügen gehörig geschützten Ort aufstellt, die Spiritusflamme[1]) *centrirt* und so hoch steigen läfst, dafs sie sämmtliche Heizstifte gleichmäfsig umspülend über dieselben noch hervorragt. Ein Hin- und Herlecken der

1) 96 Proc. Spiritus.

Flamme darf durchaus nicht stattfinden. Damit man nicht eiumal unversehens die Säule gegen die Flamme verrückt, wodurch leicht Elemente verbrannt werden, thut man gut, die Säulen in kreisrunde, für sie abgepafste Aushöhlungen eines etwa 4^{cm} dicken Brettes zu stellen. Die Tiefe der Aushöhlungen mufs gerade so grofs seyn, dafs der unter den cylinderförmig aufgerollten Kühlplatten hervorragende Rand der Säulen in ihnen aufgenommen wird. In der Mitte der Aushöhlungen befindet sich zweckmäfsig ein die ganze Dicke des Brettes durchsetzendes Loch von der Stärke eines Fingers. Man benutzt dasselbe, um von der Unterseite des erhöht aufgestellten Brettes her die Spirituslampe zu centriren. Das mit Handgriffen versehene Brett gestattet den leichten und dabei sicheren Transport einer Batterie von Sternsäulen.

Was die Aenderung an den Säulen betrifft, so habe ich an Stelle der die Heizstifte umkleidenden kupfernen Schutzröhrchen solche von Platin gesetzt und, da diese Röhrchen dünner ausfielen, die obere der centralen Glimmerplatten etwas vergröfsert, um der elektromotorischen Kraft dieselbe Gröfse zu erhalten, die sie zuvor hatte. Zur Bekleidung der Heizstifte bedarf man einer Platinplatte von 2,5^{grm} Gewicht, 65,0^{mm} Länge, 26,0^{mm} Breite: der zwanzigste Theil dieser Platte liefert ein Heizstiftröhrchen von genügender Stärke. Die Kupferröhrchen wurden als unbrauchbar beseitigt, weil sie bei längerem Gebrauch der Säule verbrennen und sich an ihnen dann leicht von Heizstift zu Heizstift hinspinnende Rufs- und Asche-Dendriten ansetzen, welche die Constanz der Kette stören. Die Entfernung der abgebrannten Kupferröhrchen, zu welcher man sehr bald genöthigt wird, ist wegen der Sprödigkeit des positiven Metalles sehr mifslich auszuführen. Diese Uebelstände fallen bei den Platinröhrchen fort.

IV. *Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetz der Elektrodynamik; von H. Lorberg in Strafsburg i. E.*

§. 1. Die Magnetinduction nach dem Weber'schen Grundgesetz.

Ein fundamentaler Gegensatz zwischen dem Weber'schen Grundgesetz und dem von Hrn. Clausius im 82. Bande des Borchardt'schen Journals für Mathematik aufgestellten neuen Grundgesetz der Elektrodynamik besteht darin, dafs letzteres die zwischen zwei Elektricitätstheilchen wirkende Kraft nicht blos von ihren *relativen*, sondern von ihren *absoluten* Bewegungen abhängig macht; daraus folgt z. B., dafs auf der Oberfläche eines körperlichen Leiters, welcher mit einem geschlossenen Strom oder einem Magneten fest verbunden ist und zugleich mit diesem bewegt wird, eine Vertheilung statischer Elektricität stattfindet, dafs also auch ein um seine Axe rotirender Magnet lediglich in Folge dieser Rotation elektrisirt wird. Dieselbe Folgerung aber leitet auch Hr. Riecke in einem kürzlich veröffentlichten Aufsatz [1]) (S. 125) aus Formeln für die durch einen bewegten Magnetpol inducirte elektromotorische Kraft ab, welche denjenigen widersprechen, die man aus dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik in Verbindung mit der Annahme von Molecularströmen erhält. Es dürfte daher nicht ganz überflüssig erscheinen, zunächst letztere Formeln kurz abzuleiten.

Ich bezeichne im Folgenden immer mit $\frac{\delta}{dt}$ und $\frac{\delta'}{dt}$ zeitliche Differentialquotienten, welche sich auf eine Bewegung der fest mit einander verbunden gedachten Punkte (x, y, z)

1) „Zur Theorie der unipolaren Induction und der Plücker'schen Versuche." Wied. Ann. Bd. I.

und (x', y', z') („gemeinschaftliche Bewegung") beziehen; sind ξ, η, ζ die Geschwindigkeits-Componenten der gemeinschaftlichen Verschiebung, α, β, γ die (im Folgenden als constant betrachteten) Drehungsgeschwindigkeiten um die Coordinatenaxen, so sind die ganzen Geschwindigkeits-Componenten

$$(a) \begin{cases} \frac{\delta x}{dt} = \xi + \beta z - \gamma y, \quad \frac{\delta y}{dt} = \eta + \gamma x - \alpha z, \quad \frac{\delta z}{dt} = \zeta + \alpha y - \beta x \\ \frac{\delta x'}{dt} = \xi + \beta z' - \gamma y' \text{ etc.,} \end{cases}$$

woraus noch folgt

$$(b) \quad \frac{\delta x'}{dt} = \frac{\delta x}{dt} + \beta(z' - z) - \gamma(y') - y, \quad \frac{\delta r}{dt} + \frac{\delta' r}{dt} = 0.$$

Ferner seyen die auf einen geschlossenen Strom s' ausgedehnten Integrale

$$(c) \quad \int \frac{dx'}{r} = A, \quad \int \frac{dy'}{r} = B, \quad \int \frac{dz'}{r} = C.$$

Nach dem Weber'schen Grundgesetz ist die x-Componente der elektromotorischen Kraft, welche ein ruhendes Stromelement ds' auf die positive Elektricitäts-Einheit in dem bewegten Leiterpunkt (x, y, z) hervorruft,

$$(1) \quad X = \frac{4}{\varkappa^2} J' ds' \left[\frac{dr}{ds'} \frac{\delta \frac{1}{r}}{dt} + \frac{2}{r} \frac{d}{ds'} \left(\frac{\delta r}{dt} \right) \right] \frac{dr}{dx}$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2} J' ds' \left[\frac{\delta}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta r}{dt} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\delta r}{dt} \right) + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \left(\frac{d}{dx} \frac{\delta r}{dt} - \frac{\delta}{dt} \frac{dr}{dx} \right) \right],$$

oder wenn wir nach (b) die Bewegung des Stromelementes ds' einführen, welche dasselbe, wenn es mit dem Punkt x gemeinschaftlich bewegt würde, haben würde,

$$(1a) \quad X = \frac{4}{\varkappa^2} J' ds' \left[- \frac{\delta'}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{dx} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta' r}{dt} \right) - \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\delta' r}{dt} \right) \right].$$

Für die elektromotorische Kraft X_1 des bewegten Stromelementes ds' auf den ruhenden Leiterpunkt x erhalten wir den Ausdruck (1), nur $\frac{\delta'}{dt}$ statt $\frac{\delta}{dt}$ gesetzt, also

$$(2)\quad X_1 = \frac{4}{\varkappa^2} J' ds' \left[\frac{\delta'}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt}\right) + \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{\delta' r}{dt}\right)\right] = -X.$$

Haben also das Stromelement ds' und der Leiterpunkt x eine gemeinschaftliche Bewegung, so ist die ganze elektromotorische Kraft

$$X + X_1 = 0.$$

Dieser Satz, welcher sich schon aus dem bloſsen Anblick des Weber'schen Grundgesetzes ergiebt, und welchen Weber in seiner ersten Abhandlung über elektrodynamische Maaſsbestimmungen (S. 352) in den Worten ausgesprochen hat: „Man kann daher allen elektrischen Massen ohne Aenderung ihrer Wirkungen, folglich auch ohne Aenderung der von ihnen abhängigen Induction, eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung beilegen", gilt also nicht blos für eine gemeinschaftliche Verschiebung, sondern auch für eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe mit gleicher Winkelgeschwindigkeit; im letztern Falle kann man allerdings, entsprechend der Gl. (b), die Bewegung des Elementes ds durch eine der Bewegung des Punktes x gleiche Parallelverschiebung und durch eine Drehung um eine durch den Punkt x gehende Axe ersetzen; allein die letztere erzeugt ebenso wenig wie die erstere eine elektromotorische Kraft, da die hierbei stattfindende relative Bewegung ohne Aenderung der Entfernung stattfindet.

Wenden wir die Gl. (1) auf einen geschlossenen Strom an, und setzen voraus, daſs entweder der Leiterpunkt x oder der Strom bewegt wird, und daſs diese zwei Bewegungen eine gemeinschaftliche Bewegung bilden, so erhalten wir

$$(3)\quad X = -X_1 = \frac{4}{\varkappa^2} J' \int ds' \Big\{ \frac{\delta}{dt}\Big[-\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'} - \frac{d^2 r}{ds'dx}\Big]$$

$$+ \frac{d}{dx}\Big[\frac{\delta x}{dt}\Big(\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d^2 r}{ds'dx}\Big) + \ldots\Big]$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\Big(\gamma \frac{dr}{dy} - \beta\frac{dr}{dz}\Big)\Big\}$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2} J'\Big[-\frac{\delta A}{dt} + \frac{d}{dx}\Big(A\frac{\delta x}{dt} + B\frac{\delta y}{dt} + C\frac{\delta r}{dt}\Big) + \beta C - \gamma B\Big]$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2} J'\Big[\Big(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\Big)\frac{\delta y}{dt} + \Big(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\Big)\frac{\delta z}{dt}\Big].$$

Ersetzen wir den als unendlich klein angenommenen Strom s' durch ein magnetisches Molekül von dem (in elektromagnetischem Maafs gemessenen) Moment $M = \mu\, d\nu$, wo μ die Menge nord- oder südmagnetischen Fluidums, $d\nu$ die Länge der Axe bezeichnet, so ergiebt sich leicht

$$(d)\quad \frac{4}{\varkappa^2} J' A = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa} M \left(\cos(d\nu, z)\frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \cos(d\nu, y)\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) \text{ etc.}$$

$$\frac{4}{\varkappa^2} J'\Big(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa} M \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\nu\, dz},$$

also $$(4)\quad X = -X_1 = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa} M \frac{d}{d\nu}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{\delta z}{dt} - \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{\delta y}{dt}\right).$$

Diese Kraft kann man auch durch zwei Kräfte ersetzen, welche von zwei an den Enden des Linienelementes $d\nu$ befindlichen Magnetpolen $\pm\mu$ ausgehen, und von denen die erstere den Werth hat

$$(4a)\quad X = -X_1 = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\mu\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{\delta z}{dt} - \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{\delta y}{dt}\right),$$

oder wenn man nach Gl. (b) statt der Bewegung des Punktes x die damit verbunden gedachte des Pols einführt,

$$(4b)\quad X = -X_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\mu\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{\delta y'}{dt} - \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{\delta z'}{dt}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\mu\frac{d}{dx}\Big(\alpha\frac{dr}{dx} + \beta\frac{dr}{dy} + \gamma\frac{dr}{dz}\Big).$$

Für die durch Bewegung des Leiterpunktes x inducirte elektromotorische Kraft X stimmt der in Gl. ($4a$) gegebene Werth mit dem von Hrn. Riecke (S. 117) aufgestellten überein; dagegen für die durch Bewegung des Pols inducirte elektromotorische Kraft X_1 giebt Hr. Riecke (S. 111) nur den ersten Theil des in Gl. ($4b$) aufgestellten Ausdrucks. Dieser erste Theil ist, wie die Gl. ($4a$) zeigt, diejenige elektromotorische Kraft, welche der Pol induciren würde, wenn er selbst ruhte, dagegen der Leiterpunkt eine der des Pols gleiche und parallele, aber entgegengesetzte Bewegung hätte; der zweite Theil ist diejenige elektromotorische Kraft, welche der Pol induciren würde, wenn er keine fortschreitende, sondern nur eine drehende Bewegung um eine durch ihn gehende, der wirklichen Drehungsaxe parallele Axe mit der wirklichen Winkelgeschwindigkeit hätte, oder wenn er vollkommen ruhte, dagegen der Leiterpunkt sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit, aber im entgegengesetzten Sinne, um die durch den Pol gehende Axe drehte.

Oder auch: der erste Theil des Ausdrucks ($4b$) für $X_1 dt$ ist die x-Componente der ponderomotorischen Kraft eines Stromelementes von der Intensität $J' = \frac{1}{2}$, welches mit dem vom Pol in der Zeit dt durchlaufenen Wegelement zusammenfällt, auf einen Pol μ im Punkt x; der zweite Theil von $X_1 dt$ ist das Drehungsmoment um eine durch den Punkt x gehende, der x-Axe parallele Axe, welches ein an der Stelle des Pols befindliches, der Drehungsaxe paralleles Stromelement von der Intensität $J' = \frac{1}{2}$ und der Länge $w\,dt$ (wo w die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet), auf einen Pol μ im Punkte x ausübt; hiernach ist also auch, wenn man den Ausdruck ($4b$) als richtig anerkennt, der von Hrn. Riecke S. 114 aufgestellte Satz zu modificiren.

Nach den Formeln des Hrn. Riecke wird durch Drehung eines Magnetpoles um eine durch denselben gehende Axe keine elektromotorische Kraft hervorgerufen, während nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik, wenn man dasselbe mit der Annahme von Molecularströ-

men verbindet, dieselbe elektromotorische Kraft entsteht, wie wenn der Leiterpunkt sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne um die Axe dreht; daſs nach letzterer Auffassung ein Magnetpol nicht als ein punktförmiges Kraftcentrum, sondern als ein Körper betrachtet werden muſs, erklärt sich daraus, daſs derselbe als eine bloſse Abstraction aus einem magnetischen Molecül, d. h. einem unendlich kleinen Strom, auftritt, und ist ebensowenig auffällig, wie die andere Folgerung aus dem Weber'schen Grundgesetz in Verbindung mit der Annahme von Molecularströmen, daſs die ponderomotorische Kraft eines Stromelements auf einen Magnetpol nicht durch den Pol, sondern durch das Stromelement geht und daher ein Drehungsmoment um eine durch den Pol gehende Axe besitzt.

Nach der Formel des Hrn. Riecke, nach welcher $X + X_1$ nur dann $= 0$ ist, wenn der Pol und der Leiterpunkt dieselbe *fortschreitende* Bewegung haben, muſs jede Drehung eines Magneten und eines fest mit ihm verbundenen Leiters Strömungen und statische Elektricitätsvertheilung in letzterem, also auch in dem Magneten selbst hervorrufen; wenn demnach Hr. Riecke (a. a. O. S. 125) in Bezug auf die Induction durch einen um seine Axe rotirenden Magneten sagt: „nach der vorhergehenden Theorie würde in jedem Punkt im Innern des Magneten eine elektromotorische Kraft inducirt; diese Kraft wäre gleich der Differenz derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche inducirt werden von dem bewegten Magnetismus in den ruhenden Leiterelementen und von dem ruhenden Magnetismus in den bewegten Leiterelementen, und es würde somit auf der Oberfläche des Magneten eine statische Vertheilung der Elektricität eintreten“: so dürfte aus der vorstehenden Ableitung hervorgehen, daſs jene Differenz (oder vielmehr Summe) $X + X_1$ nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik $= 0$ ist, wenn man dasselbe mit der Annahme von Molecularströmen verbindet; daſs also unter dieser Voraussetzung die „Lücke“, welche

Hr. Riecke in der von Weber („Resultate der Beobachtungen des magnetischen Vereins“, 1839) gegebenen Theorie der unipolaren Induction findet, indem derselbe diese im Innern des Magneten wirkende Kraft $X + X_1$ nicht berücksichtigt habe, in Wirklichkeit nicht vorhanden ist. Allerdings stimmt die Formel des Hrn. Riecke mit dem von Weber selbst (Elektrodynamische Maafsbestimmungen, 2. Abh., S. 361) aufgestellten Gesetz der Induction durch einen bewegten Magnetpol überein; indessen dürfte es fraglich seyn, ob Weber dieses Gesetz auch auf eine drehende, nicht blos auf eine fortschreitende Bewegung eines Magnetpols hat bezogen wissen wollen. Jedenfalls scheint mir, wie aus der vorstehenden Ableitung hervorgehen dürfte, das erwähnte Gesetz dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik zu widersprechen, wenn man dasselbe mit der Annahme von Molecularströmen verbindet, d. h. wenn man das von Weber wiederholt ausgesprochene Princip als gültig annimmt, dafs die Induction durch einen Magneten dieselbe ist, wie die durch einen galvanischen Strom, welcher dieselbe ponderomotorische Kraft ausübt [1]); oder, was dasselbe ist, das Gesetz widerspricht dem aus den erwähnten Voraussetzungen folgenden Princip, dafs eine gemeinschaftliche Bewegung des Inducenten und des Leiterpunktes keine elektromotorische Kraft hervorruft, ein Princip, welches Weber in den oben citirten Worten, allerdings nur in Bezug auf die „Volta-Induction“, ausspricht. Eine Entscheidung zwi-

1) In den elektrodyn. Maafsbestimmungen, 5. Abh., S. 573 heifst es: Aufser diesen verschiedenen Kräften der rein elektrischen Wechselwirkung sind auch die Kräfte betrachtet worden, welche vom Magnetismus auf die Elektricität ausgeübt werden, nämlich die elektromagnetischen Kräfte und die der magnetelektrischen Induction des gegen elektrische Massen bewegten Magnetismus, sowohl wenn der Magnetismus mit seinem Träger, als auch wenn er blos in seinem Träger bewegt wird. *Auch für diese Kräfte konnten die Gesetze aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze abgeleitet werden, wenn man nämlich nach Ampère für Molecularmagnete elektrische Molecularströme substituirte.*

schen beiden Alternativen würde natürlich nur das Experiment geben können; zu diesem Zweck habe ich in §. 4 eine Folgerung des Riecke'schen Inductionsgesetzes entwickelt.

Bei dem *Plücker'schen Versuch*, auf welchen Herr Riecke seine neue Anschauungsweise anwendet, wirkt bekanntlich ein Linearmagnet, d. h. ein Magnet, welcher näherungsweise durch eine geradlinige Reihe magnetischer Molecüle mit zusammenfallenden Axen ersetzt werden kann, inducirend auf einen geschlossenen linearen Leiter, welcher aus zwei Theilen besteht, von denen der eine b ruht, während der andere a sich entweder allein oder mit dem Magneten um die Axe des letztern dreht; bei der Form des Versuches, wie ihn Plücker angestellt und Hr. Edlund[1]) wiederholt hat, besteht der Theil a aus einem den Magneten umschliefsenden kupfernen Cylinder, auf welchem die zwei Enden des Theils b schleifen; denkt man sich a mit der Oberfläche des Magneten zusammenfallend, so hat man die von Weber sogenannte *„unipolare Induction"*. Da nach Gl. (4b) die durch Drehung eines Magnetpols um eine durch ihn selbst gehende Axe erzeugte elektromotorische Kraft die Form $X_1 = \frac{dF}{dx}$, also die längs eines Stromelementes ds genommene Kraft die Form $\frac{dF}{ds}$ hat, so ist der Integralwerth dieser Kräfte längs eines geschlossenen Leitungsdrahtes $= 0$, es wird also in einem solchen kein Strom inducirt. Bezeichnen wir demnach mit K_a und K_b den Integralwerth der elektromotorischen Kräfte, welche durch Drehung des Magneten in den ruhenden Leitertheilen a und b inducirt werden, so ist, wenn der Magnet allein gedreht wird, die ganze elektromotorische Kraft $= K_a + K_b = 0$. Wird a allein gedreht, so ist die elektromotorische Kraft $= - K_a$. Wird der Magnet und der Theil a gemeinschaftlich gedreht, so ist die elektromotorische Kraft $= K_b = - K_a$; und dasselbe

1) „Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektricität gemachte Einwürfe." Diese Ann. Bd. 156.

findet auch statt, wenn der Magnet irgend eine von der des Theils *a* verschiedene Drehung hat, da dann zu der vorigen Kraft noch diejenigen Kräfte hinzukommen, welche der mit der Differenz der Geschwindigkeiten gedrehte Magnet auf die ruhenden Leiter *a* und *b* ausübt, und deren Summe nach dem Vorhergehenden = 0 ist. Es ist also ganz gleichgültig, ob der Magnet ruht oder irgendwie gedreht wird, vollkommen übereinstimmend mit den experimentellen Resultaten des Hrn. Edlund. Die Theorie des Hrn. Riecke dagegen (a. a. O. S. 120) ist folgende: da nach seinen Formeln die Drehung des Magneten auf die einzelnen Punkte der ruhenden Theile *a* und *b* nicht elektromotorisch wirkt, so nimmt er in dem Falle, wo der Magnet und der Leiter *a* gemeinschaftlich gedreht werden, für die elektromotorische Kraft diejenige an, welche von dem als ruhend betrachteten Magneten in dem bewegten Theil *a* inducirt wird, und welche nach seinen Formeln mit der aus dem Weber'schen Grundgesetz abgeleiteten übereinstimmt; dieselbe ist also wie oben $= -K_a$, so dafs das Experiment nur dann eine Entscheidung zwischen beiden Ansichten liefern würde, wenn man die Vorgänge in den *einzelnen* Theilen *a* und *b* untersuchte und dadurch constatirte, ob der ursprüngliche Sitz der elektromotorischen Kraft der ruhende Theil *b* oder der gedrehte *a* ist. Eine solche Untersuchung läfst sich aber nur an einem *körperlichen* Leiter *a*, z. B. im Innern des Magneten selbst, ausführen, weil nur in einem solchen ungeschlossene Ströme sich durch eine Vertheilung statischer Elektricität zu erkennen geben; vgl. darüber §. 4.

§. 2. Die Induction nach dem Clausius'schen Grundgesetz.

Nach dem von Hrn. Clausius im 82. Bd. des Journals für Mathematik und in diesen Annalen, Neue Folge, Bd. I, aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetz ist die x-Componente der elektromotorischen Kraft, welche ein im Punkt (x', y', z') befindliches Stromelement $J'ds'$ auf die positive Elektricitätseinheit im Punkt (x, y, z) ausübt, wenn beide unabhängig von einander in einer durch

$\frac{\delta}{dt}$ und $\frac{\delta'}{dt}$ charakterisirten Weise bewegt werden und J' sich ändert, wenn ferner R eine unbestimmte Function von r, c' und $-c'_1$ die (im Allgemeinen als verschieden angenommenen) Strömungsgeschwindigkeiten der positiven und negativen Elektricität des Elementes ds', $h'ds'$ die in demselben enthaltene positive oder negative Elektricitätsmenge bezeichnet, und wenn

$$h'\frac{c'+c'_1}{2}=J',\quad -\frac{2}{\varkappa^2 r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d^2 R}{dx\,ds'}=f,$$

$$r\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{\delta r}{dt}+\frac{2}{r}\frac{\delta x'}{dt}-\varkappa^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta' R}{dt}\right)=\varphi$$

gesetzt wird,

$$(5)\quad X=\frac{4}{\varkappa^2}J'ds'\left[\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,ds'}\frac{\delta r^2}{dt}-\frac{dx'}{ds'}\left(\frac{\delta\frac{1}{r}}{dt}+\frac{\delta'\frac{1}{r}}{dt}\right)+\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}-\frac{d\varphi}{ds'}\right]$$
$$+2\frac{d}{ds'}[(c'-c'_1)J'f]+2f\frac{dJ'}{dt}.$$

Ich will diese Formel auf drei specielle Fälle anwenden.

α) s' sey ein ruhender, geschlossener Strom, während der Leiterpunkt x sich beliebig bewegt. Dann ist

$$X=\frac{4}{\varkappa^2}J'\int ds'\left[-\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta r^2}{dt}\right)-\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta\frac{1}{r}}{dt}\right]$$
$$=\frac{4}{\varkappa^2}J'\int ds'\left[\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{dx}\frac{\delta\frac{1}{r}}{dt}-\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds'\,dx}\frac{\delta r}{dt}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\frac{d}{ds'}\left(r\frac{\delta r}{dt}\right)\right]$$
$$=\frac{4}{\varkappa^2}J'\int ds'\left[\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{dx}\frac{\delta\frac{1}{r}}{dt}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dx}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta r}{dt}\right)-\frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\frac{\delta r}{dt}\right)\right],$$

also nach Gl. (1) gleich dem aus dem Weber'schen Grundgesetz folgenden Werth.

β) s' sey ein um seine Axe gedrehter Kreisstrom, während der Punkt x ruht. Dann ist

$$(6)\ X = -\frac{4}{\varkappa^2} J' \int ds' \left(\frac{dx'}{ds'} \frac{\delta' \frac{1}{r}}{dt} - \frac{d \frac{1}{r}}{ds'} \frac{\delta x'}{dt} \right)$$

$$= -\frac{4}{\varkappa^2} J' \int ds' \left[\frac{\delta'}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} \right) - \frac{1}{r} \frac{d}{ds'} \left(\frac{\delta x'}{dt} \right) - \frac{d \frac{1}{r}}{ds'} \frac{\delta x'}{dt} \right]$$

$$= -\frac{4}{\varkappa^2} J' \int ds' \left[\frac{\delta'}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} \right) - \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \frac{\delta x'}{dt} \right) \right] = 0,$$

da, wenn γ die Winkelgeschwindigkeit, ϱ' den Radius bezeichnet,

$$\frac{\delta'}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} \right) = \gamma \varrho' \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} \right)$$

ist. Nach dem Weber'schen Grundgesetz dagegen ist in diesem Falle, wenn wir eine gedachte gleichzeitige Drehung des Punktes x einführen, also $\frac{\delta' r}{dt} = -\frac{\delta r}{dt}$ setzen, der Gl. (2) zufolge,

$$(6a)\quad X_1 = -\frac{dF}{dx},\ F = -\frac{4}{\varkappa^2} J' \int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{\delta r}{dt} ds'$$

$$= \frac{4}{\varkappa^2} J' \left(A \frac{\delta x}{dt} + B \frac{\delta y}{dt} + C \frac{\delta z}{dt} \right).$$

γ) s' sey ein geschlossener Strom, welcher mit dem Punkt x eine gemeinschaftliche Bewegung hat. Dann ist

$$\frac{\delta r}{dt} + \frac{\delta' r}{dt} = 0,\ \frac{\delta x'}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta' r^2}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta r^2}{dt} \right),$$

also

$$(7)\quad X = \frac{dF}{dx},$$

wo F den in Gleichung (6a) gegebenen Werth hat. Das Weber'sche Grundgesetz dagegen giebt in diesem Falle $X = 0$.

Wird also ein Kreisstrom oder ein Linearmagnet um seine Axe gedreht, so ist nach dem Clausius'schen Gesetz die elektromotorische Kraft $= 0$ oder $= \frac{dF}{dx}$, je nachdem der Leiterpunkt ruht oder sich mitdreht, nach dem Weber'schen Grundgesetz dagegen im ersten Falle $= -\frac{dF}{dx}$,

im zweiten $= 0$. Das Clausius'sche Gesetz mufs in diesem Falle genau zu demselben Resultat wie das Riecke'sche Inductionsgesetz führen; denn da nach beiden die Drehung des Magneten auf den ruhenden Leiter nicht elektromotorisch wirkt, so ist die elektromotorische Kraft gleich der des ruhenden Magneten auf den gedrehten Leiter; diese ist aber nach beiden Gesetzen gleich der aus dem Weber'schen Grundgesetz folgenden, d. h. das Entgegengesetzte derjenigen Kraft, welche nach letzterem Gesetz der gedrehte Magnet auf den ruhenden Leiter ausübt, d. h. $= \frac{dF}{dx}$ nach Gl. (6a).

§. 3. Induction in einem körperlichen Leiter durch Drehung eines Kreisstromes oder Linearmagneten um seine Axe, nach dem Weber'schen Grundgesetz.

Nach dem vorigen §. entsteht, wenn ein Kreisstrom oder ein Linearmagnet sich um seine Axe dreht, nach dem Clausius'schen Gesetz in einem ruhenden Leiter keine elektromotorische Kraft, wohl aber nach dem Weber'schen Gesetz; es mufs sich also dieser Versuch, abgesehen von etwaigen praktischen Schwierigkeiten, für eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden Gesetzen verwerthen lassen. Nach dem Weber'schen Gesetz ist für einen einzelnen Kreisstrom oder eine Stromspirale, welche mit der constanten Winkelgeschwindigkeit γ um ihre Axe, die wir zur z-Axe nehmen, gedreht wird, der Gl. (6a) zufolge,

$$(8) \quad X = -\frac{dF}{dx},$$

wo für eine einzelne Windung vom Radius R' und der Coordinate $z = z'$ der Werth von F in einem Punkt mit mit den Coordinaten $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, z

$$(8a)\ \begin{cases} F=\frac{4}{\varkappa^2}J'\gamma(xB-yA)=\frac{4}{\varkappa^2}J'\gamma R'R\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi'-\varphi)}{r}d\varphi' \\ \quad =\frac{4}{\varkappa^2}J'\gamma R'R\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\psi}{r}d\psi \\ \quad =\frac{16}{\varkappa^2}J'\gamma R'R\frac{\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{R^2+R'^2+(z-z')^2}}(F-E), \end{cases}$$

wenn F und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul

$$k=\frac{R^2+R'^2+(z-z')^2-\sqrt{[R^2+R'^2+(z-z')^2]-4R'^2R^2}}{2R'R}$$

bezeichnen. Für ein magnetisches Molecül, dessen Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt und auf dieser im Punkt $z=\zeta$ liegt, wird nach Gl. (d)

$$(8b)\ F=-\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\left(x\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+y\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\frac{d^2r}{dz^2}=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}M\gamma\frac{d^2r}{d\zeta^2},$$

mithin für einen auf der Drehungsaxe zwischen $z=\zeta_0$ und $z=\zeta_1$ liegenden Linearmagneten, wenn wir $M=\mu\,d\zeta$ setzen,

$$(8c)\quad F=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma\left[\mu_1\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)_1-\mu_0\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)_0-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{d\mu}{d\zeta}\,\frac{dr}{d\zeta}\,d\zeta\right].$$

Es befinde sich nun in der Nähe des Magneten oder der Stromspirale ein ruhender körperlicher Leiter; es wird dann in demselben ein stationärer Zustand eintreten, in welchem die nach den Coordinatenaxen genommenen Stromdichtigkeiten u, v, w, sowie die Dichtigkeiten ε, e der im Innern und auf der Oberfläche verbreiteten freien Elektricität blofse Functionen der Coordinaten sind; da dann die inneren Ströme keine elektromotorische Kraft ausüben, so gelten nach Kirchhoff folgende Gleichungen, wenn Ω das Potential der freien Elektricität, k die Leitungsfähigkeit des Körpers, dN das Element der nach Innen gerichteten

Normale der Oberfläche, λ, μ, ν ihre Winkel mit den Coordinatenaxen bedeuten und

$$(9)\quad \Omega + F = H$$

gesetzt wird:

$$(10)\quad \frac{u}{2k} = -\frac{dH}{dx}, \quad \frac{v}{2k} = -\frac{dH}{dy}, \quad \frac{w}{2k} = -\frac{dH}{dz}$$

$$(11)\quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \quad (12)\quad u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = 0.$$

Daraus folgt

$$\varDelta H = 0, \quad \frac{dH}{dN} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich, wenn $d\tau$ das Volumelement, $d\sigma$ das Flächenelement des Körpers bezeichnet,

$$\begin{aligned} 0 &= \int H \varDelta H \, d\tau = \int H \left(\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 H}{dy^2} + \frac{d^2 H}{dz^2}\right) d\tau \\ &= \int \left[\frac{d}{dx}\left(H\frac{dH}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(H\frac{dH}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(H\frac{dH}{dz}\right)\right] d\tau \\ &\quad - \int \left[\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dz}\right)^2\right] d\tau \\ &= -\int H \frac{dH}{dN} d\sigma - \int \left[\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + ..\right] d\tau = -\int \left[\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + ..\right] d\tau \end{aligned}$$

mithin $H = \text{Const.} = 0$, da für $F = 0$ auch $\Omega = 0$ seyn mufs. Die Gleichungen (10) geben also

$$(13)\quad u = v = w = 0$$

und die Gl. (9) giebt

$$(14)\quad \Omega = -F.$$

Daraus folgt endlich nach Gl. (8c)

$$(15)\quad \begin{cases} \varepsilon = -\frac{1}{4\pi} \varDelta \Omega = \frac{1}{4\pi} \varDelta F \\ \quad = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\varkappa}\gamma \left[\mu_1 \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\right)_1 - \mu_0 \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\right)_0 - \int \frac{d\mu}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} d\zeta\right] \\ e = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\Omega}{dN} - \frac{d\Omega_a}{dN}\right), \end{cases}$$

wo Ω_a den im äufsern Raum stattfindenden Werth von Ω bezeichnet, der sich in bekannter Weise aus dem im Innern des Körpers stattfindenden Werth $\Omega = - F$ ergiebt. Um das Vorstehende auf ein möglichst einfaches Beispiel anzuwenden, wollen wir den Leiter als eine Kugel vom Radius h und den Linearmagneten auf der Verlängerung eines Durchmessers annehmen und μ als für alle Punkte des Magneten constant voraussetzen. Führen wir Polarcoordinaten ϱ, ϑ, φ ein und bezeichnen mit $P_n(\cos\vartheta)$ die Kugelfunction $n$ter Ordnung, so wird der dem Ende $z = \zeta_1$ entsprechende Werth von Ω nach Gl. (8c)

$$\Omega = -F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma \sum_0^\infty \left[\frac{(n-1)}{2n-1}\frac{\varrho^n}{\zeta_1^n} - \frac{n+1}{2n+3}\frac{\varrho^{n+2}}{\zeta_1^{n+2}}\right] P_n(\cos\vartheta)$$

$$\Omega_a = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma \sum \frac{h^{n+1}}{\varrho^{n+1}}\left(\frac{n-1}{2n-1}\frac{h^n}{\zeta_1^n} - \frac{n+1}{2n+3}\frac{h^{n+2}}{\zeta_1^{n+2}}\right) P_n(\cos\vartheta)$$

folglich die auf der Oberfläche durch die zwei gleichen Pole $\mu_0 = \mu_1$ entwickelte Dichtigkeit

$$(16)\quad e = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varkappa}\frac{\gamma\mu_0}{h}\sum_0^\infty\left[\frac{(n-1)(2n+1)}{2n-1}h^n\left(\frac{1}{\zeta_0^n} - \frac{1}{\zeta_1^n}\right)\right.$$
$$\left. - (n+1)h^{n+2}\left(\frac{1}{\zeta_0^{n+2}} - \frac{1}{\zeta_1^{n+2}}\right)\right] P_n(\cos\vartheta)$$

und die auf der ganzen Oberfläche entwickelte Elektricitätsmenge

$$(16a)\quad E = 2\pi h^2 \int_0^\pi e \sin\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma h^3 \mu_0\left(\frac{1}{\zeta_0^3} - \frac{1}{\zeta_1^3}\right).$$

Nehmen wir $\zeta_1 = \infty$ und setzen $\frac{h}{\zeta_0} = x$, so wird an dem dem Pol zunächstliegenden Punkte der Kugel nach Gl. (16)

$$e = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varkappa}\frac{\gamma\mu_0}{h}\left(\frac{x}{1-x} - \tfrac{1}{2}\sqrt{x}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right),$$

z. B. für $x = 1 - \frac{1}{1000}$

$$\frac{e}{\mu_0} = \frac{995\sqrt{2}}{4\pi\varkappa}\frac{\gamma}{h} = \frac{995 . \sqrt{2}}{4\pi . 439 . 10^9}\frac{\gamma}{h}.$$

Macht z. B. der Magnet 100 Umdrehungen in 1", ist also $\gamma = 100 . 2\pi$, und nimmt man $h = 1^{mm}$, so wird $\frac{e}{\mu_0} = \frac{1}{6 . 10^6}$. Das Quadrat dieser Zahl ist das Verhältniſs der Kraft, welche die auf der Flächeneinheit befindliche Elektricitätsmenge auf eine gleiche ausübt, zu der Kraft des Pols μ_0 auf einen gleichen in derselben Entfernung; ob eine Zahl von dieser Gröſsenordnung der Beobachtung zugänglich ist, wage ich im Augenblick nicht zu entscheiden.

§. 4. Induction in einem körperlichen Leiter durch gemeinschaftliche Drehung desselben mit einem Magneten, nach dem Clausius'schen Grundgesetz und dem Riecke'schen Inductionsgesetz.

In dem in der Ueberschrift bezeichneten Falle findet nach dem Weber'schen Grundgesetz keine Induction statt, wohl aber nach dem Clausius'schen. Nach letzterem ist nämlich die durch einen geschlossenen Strom s' erzeugte elektromotorische Kraft, wenn wir die Drehungsaxe zur z-Axe und den Sinn der Drehung entgegengesetzt dem bei dem vorigen Versuch annehmen, den Gl. (7) und (8a) zufolge,

$$(17) \quad X = -\frac{dF}{dx}, \quad F = \frac{4}{\varkappa^2} J' \gamma (xB - yA).$$

Für ein magnetisches Molecül vom Moment M, dessen Axe der Drehungsaxe parallel ist und von derselben den Abstand R_0 hat, ist nach Gl. (d)

$$(17a) \quad F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa} M\gamma \left(x \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + y \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa} M\gamma \left(\frac{d^2 r}{dz^2} + R_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dR_0} \right).$$

Für einen körperlichen Magneten, welcher in einem Volumelement $d\tau_0$ eine Anzahl $q\,d\tau_0$ magnetischer Molecüle enthält, deren Axen sämmtlich der Drehungsaxe parallel sind, ist also in der Entfernung R von der Drehungsaxe

$$(17b) \quad F = -\frac{\sqrt{2}}{\varkappa} \gamma R \frac{d}{dR} \int \frac{qM}{r} d\tau_0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\varkappa} \gamma \left[\frac{d^2}{dz^2} \int qMr\,d\tau_0 + \int qMR_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dR_0} d\tau_0 \right],$$

während für einen mit der Drehungsaxe zusammenfallenden Linearmagneten F durch die Gl. (8c) bestimmt ist. Dieselben Ausdrücke gelten auch unter Annahme des Riecke'schen Inductionsgesetzes, nur fällt dann in dem zweiten Ausdruck in Gl. (17b) das zweite Glied fort.

Bei dem vorliegenden Problem können wir offenbar die bisher als unbeweglich betrachteten Coordinatenaxen auch als mit dem sich drehenden Leiter fest verbunden annehmen; im stationären Zustand sind dann u, v, w, ε, e blofse Functionen der Coordinaten, von denen erstere den Gl. (11) und (12) genügen. In dem Ausdruck (5) für die elektromotorische Kraft, welche die in einem Volumelement $d\tau'$ des Leiters stattfindenden Strömungen u', v', w' in einem Punkte x des Leiters hervorrufen, fällt das vierte und fünfte Glied durch die Integration über eine Stromcurve weg, da nach Gl. (12) sämmtliche Stromcurven geschlossen sind; ebenso das letzte Glied wegen $\frac{dJ'}{dt} = 0$. Die übrigen Glieder lassen sich mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\frac{\delta r}{dt} + \frac{\delta' r}{dt} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta r^2}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta' r^2}{dt}\right) = \frac{\delta x'}{dt}$$

folgendermafsen schreiben:

$$E_x = \frac{4}{\varkappa^2} J' ds' \left[\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\frac{\delta r^2}{dt}\right)\right];$$

E_x erhält also die Form

$$(18) \quad E_x = -\frac{dG}{dx}.$$

Setzen wir also

$$(19) \quad \Omega + F + G = H,$$

so erhalten wir wieder die Gleichungen (10), (11), (12), aus denen $H =$ Const. $= 0$, also $u = v = w = 0$, mithin auch $G = 0$ folgt; wir haben also wieder die Gleichungen (13) und (14), welche eine Ansammlung freier Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters ausdrücken. Für einen mit der Drehungsaxe zusammenfallenden Linearmagneten gelten also wieder die Gleichun-

gen (15), (16), (16*a*); für einen körperlichen Magneten haben wir nach Gl. (17*b*)

$$(20)\quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi}\Delta F = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\varkappa}\gamma\frac{d^2}{dz^2}\int\frac{qM}{r}d\tau_0.$$

Lassen wir den Leiter mit dem Magneten selbst zusammenfallen, so haben wir nach Gl. (17*b*)

$$(21)\quad \Omega = -F = \frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma R\frac{d}{dR}\int\frac{q'M'}{r}d\tau'$$

$$(22)\quad \varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Omega = \frac{2\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma\left[qM + \frac{R}{2}\frac{d(qM)}{dR} + \frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dz^2}\int\frac{q'M'}{r}d\tau'\right].$$

Der Magnet sey z. B. ein um seine Axe, die z-Axe, gedrehter Cylinder von der Länge 2ζ und dem Radius R_0, dessen Mittelpunkt im Coordinatenanfang liegt; nehmen wir qM für alle Punkte des Magneten als constant an und bezeichnen mit $J^n(x)$ und $K^n(x)$ die Bessel'sche Function erster Art und diejenige zweiter Art, welche für $x = \infty$ verschwindet, also zwei partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dF}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1\right)F = 0,$$

so ergiebt sich aus Gl. (21)

$$(23)\quad \begin{cases} \Omega = -\dfrac{8\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma q M R_0 R\displaystyle\int_0^\infty K'(R_0 v)J'(Rv)\sin\zeta v\cos z v\frac{dv}{v} \\ \Omega_a = -\dfrac{8\sqrt{2}}{\varkappa}\gamma q M R_0^2\displaystyle\int_0^\infty\frac{J'(R_0 v)K'(R_0 v)}{K^0(R_0 v)}K^0(Rv)\sin\zeta v\cos z v\frac{dv}{v}, \end{cases}$$

woraus die elektrische Dichtigkeit im Innern und auf der Oberfläche des Magneten in einem Punkt (R, z)

$$(24)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi\varkappa}\gamma q M R_0\displaystyle\int_0^\infty K'(R_0 v)J^0(Rv)\sin\zeta v\cos z v\, dv \\ e = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi\varkappa}\gamma q M R_0\displaystyle\int_0^\infty\frac{K'(v)}{K^0(v)}[J^0(v)K^0(v) + J'(v)K'(v)]\sin\frac{\zeta v}{R_0}\cos\frac{zv}{R_0}dv \end{cases}$$

folgt.

Strafsburg, 24. October 1877.

V. *Ueber das Grundgesetz der Elektrodynamik; von H. Lorberg.*

§. 1. In dem vorhergehenden Aufsatz habe ich die Theorie zweier Versuche entwickelt, welche möglicherweise geeignet seyn könnten, eine experimentelle Entscheidung zwischen dem von Hrn. Clausius im 82. Bande des Borchardt'schen Journals für Mathematik aufgestellten und dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik herbeizuführen. Ich habe dort nämlich nachgewiesen:

Wenn eine Stromspirale oder ein Linearmagnet mit constanter Winkelgeschwindigkeit um seine Axe gedreht wird, so findet in einem benachbarten ruhenden Körper iu dem dabei nothwendig eintretenden stationären Zustand nach dem Weber'schen Grundgesetz eine Entwickelung von freier Elektricität im Innern und an der Oberfläche statt, nach dem Clausius'schen Gesetz dagegen gar keine Wirkung. Wenn ferner ein beliebiger geschlossener Strom oder ein Magnet mit einem körperlichen Leiter fest verbunden ist und zugleich mit diesem um eine beliebige Axe gedreht wird, so findet nach dem Clausius'schen Gesetz im stationären Zustand eine Entwickelung von freier Elektricität im Innern und auf der Oberfläche des Leiters statt, es elektrisirt sich also auch ein Magnet selbst durch bloſse Drehung um irgend eine Axe und mithin durch jede beliebige Bewegung, während nach dem Weber'schen Grundgesetz eine gemeinschaftliche Bewegung eines Stroms oder Magneten und eines Leiters keine elektromotorische Kraft inducirt.

Namentlich die letztere Consequenz des Clausius'schen Gesetzes scheint, auch ohne vorherige Controle durch das Experiment, geeignet, gegründete Zweifel an der Richtigkeit des erwähnten Gesetzes zu veranlassen. A priori kann man die Annahme, daſs nicht bloſs die relative, sondern auch die absolute Bewegung zweier Elektricitätstheilchen, etwa gegen den umgebenden Aether, eine Kraft zwischen

ihnen hervorrufen könne, allerdings nicht verwerfen; allein jedenfalls würde dann diese Kraft nur scheinbar von den Elektricitätstheilchen selbst ausgehen, und das Gesetz hätte, indem es von den dabei eigentlich wirksamen äufsern Kräften keine Rechenschaft gäbe, etwas Unbefriedigendes; auch die von Hrn. Clausius bei Ableitung seines Gesetzes gemachte Anwendung des Princips der Energie scheint nur dann hinreichend gerechtfertigt, wenn keine Zufuhr von Energie von Aufsen stattfindet.

Ich habe nun versucht den fruchtbaren Gedanken von Clausius unter der bisher üblich gewesenen und dem Weber'schen wie dem Helmholtz'schen Gesetz zu Grunde liegenden Annahme durchzuführen, dafs die zwischen zwei Elektricitätstheilchen wirkende Kraft nur von ihrer *relativen* Lage und ihrem *relativen* Bewegungszustande abhänge, dafs sie sich also so verhalte, *als ob* sie lediglich durch diese zwei Theilchen bedingt wäre. Dabei habe ich es zugleich vermieden, über die Geschwindigkeiten der zwei in einem Stromelement fliefsenden entgegengesetzten Elektricitäten von vorn herein eine bestimmte Annahme zu machen. Clausius leitet sein Gesetz unter der Annahme ab, dafs in einem Leiterelement nur die positive Elektricität strömt, während die negative mit dem Leiter fest verbunden ist, erwähnt aber, dafs man genau dasselbe Resultat auch unter der Annahme erhalte, dafs in einem Leiterelement gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität mit beliebigen, entgegengesetzten Geschwindigkeiten strömen; und in den Anwendungen, welche er in diesen Annalen N. F. Bd. I, von seinem Gesetz macht, legt er auch diese allgemeinere Anschauungsweise zu Grunde. Das Gesetz genügt in der That auch dann noch den sämmtlichen von Clausius aufgestellten Forderungen; allein dafs dasselbe auch unter dieser Annahme das *einzig mögliche* sey, ist nicht nachgewiesen und auch, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, nicht richtig. Zugleich wird die Untersuchung ergeben, dafs nur die Annahme entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeiten beider Elektricitäten

mit dem oben erwähnten Princip vereinbar ist; ein Resultat, gegen welches man aus den Erscheinungen der Elektrolyse schwerlich einen begründeten Einwurf wird herleiten können, da sämmtliche Erfahrungsthatsachen, auf welche sich die Ableitungen des elektrodynamischen Grundgesetzes stützen, sich auf Ströme in *metallischen* Leitern beziehen. Für die Doppelströmung spricht auch, dafs sie die galvanischen Ströme mit den Erscheinungen der statischen Elektricität, mit dem Entladungsstrom und der Bewegung der Influenz-Elektricität verknüpft.

Die von einem Elektricitätstheilchen e' mit den Coordinaten (x', y', z') auf ein Elektricitätstheilchen e (x, y, z) ausgeübte Kraft, wenn dieselbe blofs die ersten und zweiten zeitlichen Differentialquotienten der Coordinaten, und zwar die ersteren bis zum zweiten, die letzteren im ersten Grade enthalten soll, und wenn $\frac{d}{dt}$ sich auf die Bewegung des Theilchens e, $\frac{d'}{dt}$ auf die von e' bezieht, hat, wie Clausius nachgewiesen hat, zur x-Componente $ee'X = ee'(X_1 + X_2 + X_3)$, wo

$$(1)\begin{cases} X_1 = B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt} + (x-x')\Big[C\frac{dr}{dt} \\ \quad + C_1\frac{d^2r}{dt^2} + C_2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + C_3\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\Big] \\ X_2 = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right) + B_4\frac{d'^2x'}{dt^2} + B_5\frac{d'r}{dt}\frac{dx'}{dt} + (x-x')\Big[C_4\frac{d'r}{dt} \\ \quad + C_5\frac{d'^2r}{dt^2} + C_6\left(\frac{d'r}{dt}\right)^2 + C_7\left(\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right)\Big] \\ X_3 = E_1\frac{dr}{dx}\frac{dd'(r^2)}{dt^2} + E_2\frac{dr}{dt}\frac{dx'}{dt} + E_3\frac{d'r}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{dd'[E(x-x')]}{dt^2}. \end{cases}$$

Die vorläufig unbestimmt gebliebenen Functionen $B, B_1 \ldots$ der Entfernung r der zwei Theilchen bestimme ich durch folgende Sätze, von denen die drei ersten, im Wesentlichen auch von Hrn. Clausius benutzten, Erfahrungsthatsachen ausdrücken, während der vierte das oben erwähnte Princip ausspricht.

1) Ein ruhender und constanter, geschlossener Strom übt auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen keine Kraft aus.

2) Für die ponderomotorischen Kräfte zweier geschlossenen Ströme gilt das Ampère'sche Gesetz, wonach die bei einer beliebigen Bewegung des einen Stroms von diesen Kräften geleistete Arbeit gleich der negativen Aenderung des Potentials P der zwei Ströme ist; dabei ist

$$P = \frac{4}{x^2} JJ' \int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'} ds\, ds',$$

wo x die Constante des Weber'schen Grundgesetzes bezeichnet.

3) Für die durch Bewegung und Intensitätsänderung hervorgerufenen elektromotorischen Kräfte eines geschlossenen Stroms auf einen andern gilt das Neumann'sche Gesetz, wonach die von diesen Kräften an dem einen oder andern Strom bei der Strömung geleistete Arbeit gleich der durch die Bewegung und Intensitätsänderung eintretenden Aenderung des Potentials der zwei Ströme ist.

4) Bei einer gemeinschaftlichen Bewegung zweier Stromelemente ist die zwischen ihnen wirkende Kraft dieselbe, wie wenn sie ruhen. (Mit dem Ausdruck „gemeinschaftliche Bewegung" bezeichne ich eine solche Bewegung zweier Körper, bei welcher sich dieselben als ein einziger fester Körper bewegen.)

Das ponderomotorische und elektromotorische Elementargesetz.

§. 2. Um die vorstehenden Sätze anzuwenden, nehmen wir an, daſs in einem Stromelement ds die positive Elektricitätsmenge $e = h\,ds$ mit der Geschwindigkeit v, die negative Elektricitätsmenge $-e = -h\,ds$ mit der Geschwindigkeit $-v_1$ sich bewegt; h', v', $-v'_1$ bezeichnen dasselbe für das Stromelement ds', und die Stromintensitäten seyen definirt durch die Gleichungen $J = h\frac{v+v_1}{2}$, $J' = h'\frac{v'+v'_1}{2}$. Werden beide Stromelemente bewegt und ändern ihre Intensität, und bezeichnen $\frac{\delta}{dt}$ und $\frac{\delta'}{dt}$ die zeitlichen Differentialquotienten in Bezug auf die Bewegung von ds und ds', so haben wir in Gl. (1) für die Theilchen $+e$, $+e'$ zu setzen

$$\frac{d}{dt}=v\frac{d}{ds}+\frac{\delta}{dt},\qquad \frac{d'}{dt}=v'\frac{d}{ds'}+\frac{\delta'}{dt};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\frac{d}{ds}+v^2\frac{d^2}{ds^2}+2v\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta}{dt}\right)+\frac{\delta^2}{dt^2}.$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\ldots=v^2+2v\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{dt}+\ldots\right)+\left[\left(\frac{\delta x}{dt}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{dt}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{dt}\right)^2\right]$$

und für die Theilchen $+e$, $-e'$ ist v' durch $-v'_1$ zu ersetzen. Dadurch ergiebt sich aus Gl. (1) für die Summe der Kräfte, welche die Elektricitätsmengen $+e'$ und $-e'$ des Stromelementes ds' auf die Menge $+e$ des Stromelementes ds ausüben,

$$\begin{aligned}(2)\quad X_{\pm e',+e}=&(v'+v'_1)\Big\{\frac{d}{ds'}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)+2B_4\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta x'}{dt}\right)\\&+B_5\left(\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}+\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta' r}{dt}\right)+(x-x')\Big[C_4\frac{dr}{ds'}+2C_5\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta' r}{dt}\right)\\&+2C_6\frac{dr}{ds'}\frac{\delta' r}{dt}+2C_7\left(\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta x'}{dt}+\ldots\right)+\frac{E_1}{r}\frac{d}{ds'}\left(\frac{\delta r^2}{dt}\right)\Big]\\&+E_2\frac{dx'}{ds'}\frac{\delta r}{dt}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{\delta x}{dt}+\frac{d}{ds'}\frac{\delta}{dt}[E(x-x')]\Big\}\\&+v(v'+v'_1)\Big\{E_1\frac{dr}{dx}\frac{d^2 r^2}{ds\,ds'}+E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\\&+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2}{ds\,ds'}[E(x-x')]\Big\}+(v'^2-v'^2_1)\Big\{B_4\frac{d^2x'}{ds'^2}\\&+B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'}+(x-x')\Big[C_5\frac{d^2r}{ds'^2}+C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+C_7\Big]\Big\}\\&+\frac{d(v'+v'_1)}{dt}\Big\{B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\Big\}.\end{aligned}$$

Aus Satz 1) ergiebt sich nun

(3) $C_4=0$ und entweder (4a) $v'=v'_1$ oder

(4b) $B_5=\frac{dB_4}{dr}-C_5$, $C_6=\frac{dC_5}{dr}$, $C_7=0$.

Zu den Annahmen (4b) sieht sich Hr. Clausius genöthigt, da er $v'_1=0$ voraussetzt. Aus Satz (2) folgt

$$(5)\quad E_2=\frac{2}{\varkappa^2 r^2},\qquad E_1=\frac{1}{\varkappa^2 r^2}$$

und aus Satz (3) folgt

$$(a)\quad C_5=-\frac{dB_4}{dr}+\frac{2}{k^2r^2},\ C_6=-\frac{dB_4}{r\,dr}+\frac{B_5}{2r}-\frac{1}{2}\frac{dB_5}{dr}-\frac{1}{\varkappa^2r^2}.$$

Um den vierten Satz anzuwenden, denken wir uns, dafs ein geschlossener Strom s' und ein ungeschlossener Strom s eine gemeinschaftliche Bewegung haben, bei welcher jeder Punkt sich nach den Coordinatenaxen mit denselben Geschwindigkeiten ξ, η, ζ, deren Resultirende ϑ sey, verschiebt und sich zugleich um die Coordinatenaxen mit den Winkelgeschwindigkeiten α, β, γ dreht; wir haben also zu setzen

$$\frac{\delta x}{dt} = \xi + \beta z - \gamma y, \quad \frac{\delta y}{dt} = \eta + \gamma x - \alpha z, \quad \frac{\delta z}{dt} = \zeta + \alpha y - \beta x$$

$$\frac{\delta x'}{dt} = \xi + \beta z' - \gamma y', \text{ etc.}$$

$$\frac{\delta r}{dt} = -\frac{\delta' r}{dt} = \vartheta \frac{dr}{d\sigma} + \frac{\alpha}{r}(zy' - yz') + \frac{\beta}{r}(xz' - zx') + \frac{\gamma}{r}(yx' - xy').$$

Dann giebt Satz 4) in Verbindung mit den Gl. (a)

$$(b) \quad B_5 = 2\frac{dB_4}{dr}, \quad C_5 = -\frac{dB_4}{dr} + \frac{2}{\varkappa^2 r^2},$$

$$C_6 = -\frac{d^2 B_4}{dr^2} - \frac{1}{k^2 r^3}, \quad C_7 = 0.$$

Da die zweite und dritte dieser Gleichungen mit der vorletzten der Gleichungen ($4b$), nämlich

$$C_6 = \frac{dC_5}{dr} = -\frac{d^2 B_4}{dr^2} - \frac{4}{k^2 r^3}$$

in Widerspruch stehen, so folgt, dafs die Gl. ($4a$) stattfinden mufs, d. h. *dafs die zwei entgegengesetzten Elektricitäten sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten bewegen müssen.*

Wenden wir ferner den vierten Satz auch auf zwei Stromelemente an, indem wir das Element ds als im Coordinatenanfang befindlich annehmen und beide Elemente sich drehen lassen, so folgt

$$(6) \quad B_4 = 0,$$

wodurch die Gl. (b) übergehen in

$$(7) \quad B_5 = 0, \quad C_5 = \frac{2}{\varkappa^2 r^2}, \quad C_6 = -\frac{1}{\varkappa^2 r^3}, \quad C_7 = 0.$$

Lassen wir ferner beide Elemente sich in beliebiger Lage um die x-Axe drehen, so folgt aus Satz 4)

$$(8)\quad E = -\frac{2}{\varkappa^2 r},\qquad E_3 = -\frac{2}{\varkappa^2 r^2}.$$

Durch die Gleichungen (3), (5), (6), (7), (8) sind nun sämmtliche in dem Ausdruck (1) für X_2 und X_3 enthaltene Functionen mit Ausnahme von B_3 bestimmt, und diese Ausdrücke gehen über in

$$X_2 = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right) + \frac{1}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left[2r\frac{d'^2 r}{dt^2} - \left(\frac{d'r}{dt}\right)^2\right]$$

$$X_3 = \frac{2}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left[2r\frac{dd'r}{dt^2} - \frac{dr}{dt}\frac{d'r}{dt}\right].$$

Bezeichnen wir mit $\frac{Dr}{dt} = \frac{dr}{dt} + \frac{d'r}{dt}$ den ganzen Differentialquotienten von r bezüglich der Bewegungen beider Theilchen, so erhalten wir mithin nach Gl. (1) die ganze Kraft von e' auf $e = ee'X$, wo

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} X = \frac{1}{\varkappa^2 r^2}\frac{dr}{dx}\left[2r\frac{D^2 r}{dt^2} - \left(\frac{Dr}{dt}\right)^2\right] + A \\ A = \frac{d'}{dt}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right) + B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2 x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt} \\ \quad + r\frac{dr}{dx}\left[C\frac{dr}{dt} + \left(C_1 - \frac{2}{\varkappa^2 r^2}\right)\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(C_2 + \frac{1}{\varkappa^2 r^2}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right. \\ \quad \left. + C_3\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right]. \end{cases}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks ist das Weber'sche Grundgesetz; von den Gliedern von A kommen in der Summe der zwei Kräfte, welche von der positiven und negativen Elektricität eines Stromelementes ds' ausgeübt werden, alle mit Ausnahme des ersten zweimal mit entgegengesetzten Zeichen vor und fallen also fort. Aus dem ersten Gliede von A aber entspringt eine von der Bewegung und Intensitätsänderung unabhängige elektromotorische Kraft eines ungeschlossenen Stroms s' auf ein Stromelement ds oder ein ruhendes Elektricitätstheilchen e, nämlich

$$K_x = 2eh'v'\int\frac{d}{ds'}\left(B_3\frac{dr}{dx}\right)ds' = 2eJ'\left[B_3\frac{dr}{dx}\right]_1^2,$$

wo $[\,]_1^2$ die Differenz der Werthe an den zwei Enden des Stroms s' bedeutet; oder wenn wir mit E' die Menge

freier positiver Elektricität an den Enden bezeichnen, also $J' = \frac{1}{2}\frac{dE'}{dt}$ setzen,

$$K_x = e\left[\frac{dE'}{dt} B_3 \frac{dr}{dx}\right]_1^2.$$

K_x besteht also aus zwei von den Stromenden ausgehenden und nach r gerichteten Kräften. Ob eine solche elektromotorische Kraft eines ruhenden Stromendes auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen, welche von der elektrostatischen Kraft der an dem Stromende aufgehäuften freien Elektricität E' verschieden ist, d. h. welche nicht dem veränderlichen Werth von E', sondern der Geschwindigkeit dieser Aenderung $\frac{dE'}{dt}$ proportional ist, wirklich existirt, scheint durch die bisherigen Erfahrungen noch nicht mit Sicherheit entschieden werden zu können; eine *ponderomotorische* Kraft eines Stromendes, welche sich aus der Helmholtz'schen Potentialtheorie ergiebt, ist durch Versuche [1]) als nicht vorhanden nachgewiesen worden. Uebrigens werde ich im nächsten § zeigen, daſs wenn die elektrodynamische Kraft zweier Elektricitätstheilchen dem Princip der Energie genügen soll, $B_3 = 0$ gesetzt werden muſs.

Hiermit ist nachgewiesen, daſs unter den in §. 1 ausgesprochenen Annahmen die ponderomotorische und elektromotorische Wirkung zweier Stromelemente — abgesehen von einer etwa vorhandenen Wirkung eines Stromendes — nothwendig nach dem Weber'schen Grundgesetz erfolgen muſs.

Bestimmung der in A enthaltenen Functionen.

Das elektrodynamische Grundgesetz.

§. 3. Obwohl die in Gl. (I) enthaltene Gröſse A — mit Ausnahme des ersten Gliedes — auf die Erscheinungen an galvanischen Strömen keinen Einfluſs hat, so lassen sich doch die darin enthaltenen Functionen durch einige Nebenannahmen bestimmen, welche mir allerdings nicht

1) Schiller, Pogg. Ann. Bd. 159. — Helmholtz, Monatsberichte der Berl. Akademie. Juli 1875.

denselben Grad von Sicherheit zu haben scheinen wie die bisher benutzten. Zunächst möge nach dem Vorgange des Hrn. Clausius der Satz angewandt werden, daſs eine ruhende Elektricitätsmenge auf einen ruhenden und constanten, geschlossenen Strom keine ponderomotorische und elektromotorische Kraft ausübt. Diese Bedingung giebt

$$(9)\quad B = C = 0,\quad C_2 = \frac{1}{2r}\,\frac{d(rC_1)}{dr}.$$

Ferner wende ich mit Hrn. Clausius das Princip der Energie an, nach welchem die Arbeit, welche bei der Bewegung der zwei Elektricitätstheilchen von den zwischen ihnen wirkenden Kräften während der Zeit dt geleistet wird, ein vollständiges Differential nach der Zeit ist. Dies giebt

$$(10)\quad B_1 = B_3 = rC_1 - \frac{2}{\varkappa^2 r} = 0,\quad B_2 + rC_3 = 0.$$

Die schlieſslich noch übrig bleibende Function B_2 bestimme ich durch Anwendung des Satzes 4) auf zwei Elektricitätstheilchen, wodurch sich

$$(11)\quad B_2 = C_3 = 0$$

ergiebt. Es wird also $A = 0$.

Das Resultat der Untersuchung ist mithin folgendes: Aus den in §. 1 zu Grunde gelegten Sätzen 1) bis 4) ergiebt sich, daſs die ponderomotorische und elektromotorische Kraft zweier Stromelemente — abgesehen von einer etwaigen elektrodynamischen Kraft eines Stromendes — nach dem Weber'schen Grundgesetz erfolgen muſs, und daſs in einem Stromelement die zwei entgegengesetzten Elektricitäten sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten bewegen; und mit Zuhülfenahme der in §. 3 erwähnten Nebenannahmen ergiebt sich das Weber'sche Grundgesetz der Elektrodynamik als das einzig mögliche [1].

Strafsburg, 25. October 1877.

1) Die vollständige mathematische Behandlung dieses Gegenstandes wird in Borchardt's Journal Bd. 84 gegeben.

VI. *Theorie der Circularpolarisation;* *von Viktor von Lang.*

(Aus den Wiener Berichten Bd. LXXV, 26. April 1877, mitgetheilt vom Herrn Verfasser.)

I.

Der Zweck des Folgenden ist, die von mir vor Kurzem gegebene Theorie der Doppelbrechung [1]) auch auf circularpolarisirende Medien auszudehnen. In der erwähnten Abhandlung wird der Lichtäther als ein gewöhnliches elastisches Medium betrachtet, von den Körpermolecülen aber angenommen, daſs sie in beständigen Schwingungen begriffen sind. Die Deformation eines Elementarparallelepipeds ist daher für den Aether nicht durch seine eigenen Schwingungen allein bedingt, sondern rührt auch zum Theile von den Schwingungen der Körpermolecüle her. Gehen letztere Schwingungen nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Amplitude vor sich, so bekommen wir für die Aetherschwingungen die Erscheinungen der Doppelbrechung.

Um nun auch die Erscheinungen circularpolarisirender Krystalle auf diesem Wege zu erklären, müssen wir annehmen, daſs die Körpermolecüle nicht nur die Deformation des erwähnten Elementarparallelepipeds ändern, sondern dem letzteren auch eine Drehung zu ertheilen suchen.

Man könnte sich diese Wirkung der Körpermolecüle etwa auf folgende Art erklären in Zusammenhang mit der Anschauung, die man gegenwärtig über die moleculare Constitution circularpolarisirender Krystalle allgemein hat. Man nimmt nämlich an, daſs bei solchen Krystallen auſser der gewöhnlichen netzförmigen Anordnung der kleinsten Theilchen noch eine spiralförmige Lagerung derselben stattfindet; sey es, daſs die Molecüle beiden Anordnungen genügen, oder sey es, daſs etwa die Molecüle netzförmig,

1) Wien. Ber. LXXIII 1876. Pogg. Ann. CLIX, S. 168.

die Atome aber innerhalb der Molecüle spiralförmig angeordnet sind.

Denken wir uns eine solche spiralförmige Anordnung um die x-Axe, so wird der Aether, wenn er längs dieser Axe schwingt, sich durch die Körpertheilchen hindurchdrängen müssen und dabei einen rotatorischen Antrieb erleiden: ähnlich wie bei einem Segner'schen Wasserrade, wo die verticale Bewegung des Wassers auch eine Drehung um die verticale Richtung zur Folge hat. Es wird auch erlaubt seyn, anzunehmen, daſs dieser rotatorische Antrieb proportional sey dem jedesmaligen Ausschlage der Aethertheilchen.

Wir werden also jetzt die tangentialen Spannungen des deformirten Elementarparallelepipeds nicht mehr zu zweien gleich setzen können, sondern werden sie abwechselnd zu vergröſsern und zu verkleinern haben, um Gröſsen, die beziehungsweise proportional den Ausschlägen ξ, η, ζ sind. Wir erhalten auf diese Weise für die tangentiellen Spannungen die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= \varrho M\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)+J_1\xi, & T_1' &= \varrho M\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)-J_1\xi \\
T_2 &= \varrho M\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)+J_2\eta, & T_2' &= \varrho M\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)-J_2\eta \\
T_3 &= \varrho M\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)+J_3\zeta, & T_3' &= \varrho M\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)-J_3\zeta
\end{aligned}\right\} (1).$$

Die drei Constanten J_1, J_2, J_3 sind nicht von einander unabhängig, es können z. B. nicht zwei gleich Null seyn, ohne daſs die dritte auch verschwindet. Eine sipralförmige Anordnung nach einer Richtung bedingt ja auch schon eine ähnliche Anordnung nach senkrechten Richtungen.

Diese drei Constanten werden sich daher nicht allzuviel von einander unterscheiden, zudem sind die von ihnen abhängigen Glieder, wie die Beobachtung lehrt, stets sehr klein.

Für die normalen Spannungen haben wir die alten Werthe:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 2\varrho M\frac{d\xi}{dx} + \varrho L\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) \\ N_2 &= 2\varrho M\frac{d\eta}{dy} + \varrho L\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) \\ N_3 &= 2\varrho M\frac{d\zeta}{dz} + \varrho L\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

und zwar ist für transversale Wellen:

$$L = -2M \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wie sich schon aus dem einfachsten Falle der Lichtbewegung in einem gewöhnlichen isotropen Medium ergiebt.

Würde man die Werthe (1) und (2) direct in die Gleichungen der Elasticität

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{d^2\xi}{dx^2} &= \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3'}{dy} + \frac{dT_2}{dz} \\ \varrho\frac{d^2\eta}{dx^2} &= \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1'}{dz} \\ \varrho\frac{d^2\zeta}{dx^2} &= \frac{dT_2'}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

setzen, so würde man die für isotrope circularpolarisirende Medien geltenden Differentialgleichungen erhalten, wobei natürlich $J_1 = J_2 = J_3$ zu setzen wäre. Um jedoch den allgemeinen Fall zu erhalten, haben wir in den Gleichungen (1) und (2) für ξ, η, ζ zu setzen

$$\left.\begin{aligned} (\xi - \xi') = \xi\left(1 - \frac{\xi'}{\xi}\right), \quad (\eta - \eta') = \eta\left(1 - \frac{\eta'}{\eta}\right) \\ (\zeta - \zeta') = \zeta\left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wo ξ', η', ζ' die Ausschläge der Körpertheilchen sind, die ja auf die Deformation des Aethers ohne Einfluſs sind. Ferner setzen wir voraus, daſs die Verhältnisse $\frac{\xi'}{\xi}$, $\frac{\eta'}{\eta}$, $\frac{\zeta'}{\zeta}$ wenigstens für ein bestimmtes System dreier rechtwinkliger Axen constant seyen und schreiben

$$\left.\begin{aligned} M\left(1 - \frac{\xi'}{\xi}\right) = \mathfrak{a}^2, \quad M\left(1 - \frac{\eta'}{\eta}\right) = \mathfrak{b}^2, \quad M\left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right) = \mathfrak{c}^2 \\ J_1\left(1 - \frac{\xi'}{\xi}\right) = \varrho K_1, \; J_2\left(1 - \frac{\eta'}{\eta}\right) = \varrho K_2, \; J_3\left(1 - \frac{\zeta'}{\zeta}\right) = \varrho K_3 \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Wir erhalten so für die Spannungen folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{ll}
T_1 = \varrho\left(\mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dz} + \mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dy}\right) + \varrho K_1 \xi, & T_1' = \varrho\left(\mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dz} + \mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dy}\right) - \varrho K_1 \xi \\
T_2 = \varrho\left(\mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dx} + \mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dz}\right) + \varrho K_2 \eta, & T_2' = \varrho\left(\mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dx} + \mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dz}\right) - \varrho K_2 \eta \\
T_3 = \varrho\left(\mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dy} + \mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dy}\right) + \varrho K_3 \zeta, & T_3' = \varrho\left(\mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dy} + \mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dx}\right) - \varrho K_3 \zeta \\
N_1 = -2\varrho\left(\mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dz}\right), & N_2 = -2\varrho\left(\mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dz} + \mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dx}\right) \\
\multicolumn{2}{c}{N_3 = -2\varrho\left(\mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dy}\right)}
\end{array}\right\} \quad (7).$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (4) liefert für die allgemeinste Lichtbewegung folgende Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2\xi}{dx^2} - \mathfrak{a}^2 \Delta^2 \xi + \frac{di}{dx} = K_1\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) \\
\frac{d^2\eta}{dx^2} - \mathfrak{b}^2 \Delta^2 \eta + \frac{di}{dy} = K_2\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right) \\
\frac{d^2\zeta}{dx^2} - \mathfrak{c}^2 \Delta^2 \zeta + \frac{di}{dz} = K_3\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)
\end{array}\right\} \quad . \quad (8)$$

wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \\
i = \mathfrak{a}^2 \frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{b}^2 \frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{c}^2 \frac{d\zeta}{dz}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gesetzt ist.

II.

Wir integriren diese Gleichungen durch eine elliptisch polarisirte transversale Welle; eine solche ist gegeben durch Gleichungen von folgender Form:

$$\left.\begin{array}{l}
\xi = ah \sin\varphi + a'p \cos\varphi \\
\eta = ak \sin\varphi + a'q \cos\varphi \\
\zeta = al \sin\varphi + a'r \cos\varphi
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

unter φ den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{\lambda}(ux + vy + wz - \mathfrak{q}t)$$

verstanden, wo $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit der Lichtbewegung.

Zwischen den Richtungscosinussen u, v, w der Wellennormale und den Richtungscosinussen der beiden Ellipsenaxen, welche drei Richtungen wechselweise auf einander senkrecht stehen, bestehen Gleichungen von den Formen:

$$\left.\begin{array}{c} h^2+k^2+l^2=1; \quad hp+kq+lr=0 \\ h=qw-rv \end{array}\right\} \quad (11).$$

Substituirt man nun die Ausdrücke (10) in die früheren Differentialgleichungen und setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} F=\mathfrak{a}^2 pu+\mathfrak{b}^2 kv+\mathfrak{c}^2 lw \\ G=\mathfrak{a}^2 pu+\mathfrak{b}^2 qv+\mathfrak{c}^2 rw \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

so werden dieselben mit Berücksichtigung der Gleichungen (11)

$$\left.\begin{array}{l} a(\mathfrak{a}^2 h-\mathfrak{q}^2 h-Fu)\sin\varphi+a'(\mathfrak{a}^2 p-\mathfrak{q}^2 p-Gu)\cos\varphi \\ \qquad\qquad =-K_1\frac{\lambda}{2\pi}(ap\cos\varphi+a'h\sin\varphi) \\ a(\mathfrak{b}^2 k-\mathfrak{q}^2 k-Fv)\sin\varphi+a'(\mathfrak{a}^2 q-\mathfrak{q}^2 q-Gv)\cos\varphi \\ \qquad\qquad =-K_2\frac{\lambda}{2\pi}(aq\cos\varphi+a'k\sin\varphi) \\ a(\mathfrak{c}^2 l-\mathfrak{q}^2 l-Fw)\sin\varphi+a'(\mathfrak{a}^2 r-\mathfrak{q}^2 r-Gw)\cos\varphi \\ \qquad\qquad =-K_3\frac{\lambda}{2\pi}(ar\cos\varphi+a'l\sin\varphi) \end{array}\right\} (13)$$

Die rechten Theile dieser Gleichungen sind gleich Null zu setzen, wenn wir es mit gewöhnlichen doppelbrechenden Krystallen zu thun haben. Aber auch im Falle der Circularpolarisation sind, wie die Beobachtung lehrt, diese Gieder immer sehr klein. Da nun für die drei Constanten K_1, K_2, K_3 dasselbe gilt, was wir früher für die Gröfsen J_1, J_2, J_3 sagten, und da auch die Gröfse λ, d. i. die Wellenlänge im Krystalle, obwohl sie eigentlich eine Function von u, v, w, nur zwischen nicht sehr weiten Gränzen variiren kann, so werden wir

$$K_1\frac{\lambda}{2\pi}=K_2\frac{\lambda}{2\pi}=K_3\frac{\lambda}{2\pi}=\mathfrak{d}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

setzen und $\mathfrak{d}$ als eine von u, v, w unabhängige Constante betrachten. Die nachfolgenden Entwicklungen haben daher

allerdings nur approximative Geltung, doch ist die eingeführte Näherung zur Darstellung der Beobachtungen weitaus hinreichend.

Da nun die Gleichungen (13) für jeden Werth von φ gelten müssen, so müssen die Factoren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ einzeln gleich Null seyn. Man erhält so statt der Gleichungen (13) folgende sechs

$$\left.\begin{aligned}\left(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a'}{a}\mathfrak{d}^2\right)h&=Fu\\ \left(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a'}{a}\mathfrak{d}^2\right)k&=Fv\\ \left(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a'}{a}\mathfrak{d}^2\right)l&=Fw\end{aligned}\right\}(15)\qquad \left.\begin{aligned}\left(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a}{a'}\mathfrak{d}^2\right)p&=Gu\\ \left(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a}{a'}\mathfrak{d}^2\right)q&=Gv\\ \left(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2+\frac{a}{a'}\mathfrak{d}^2\right)r&=Gw\end{aligned}\right\}(16)$$

III.

Um vor allem die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ der Lichtbewegung als Function von u, v, w zu finden, multipliciren wir die Gleichungen (15) und (16) miteinander und erhalten so

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)^2+(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)\left(\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}\right)\mathfrak{d}^2+\mathfrak{d}^4&=FG\frac{u^2}{hp}\\ (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)^2+(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)\left(\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}\right)\mathfrak{d}^2+\mathfrak{d}^4&=FG\frac{v^2}{kq}\\ (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)^2+(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)\left(\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}\right)\mathfrak{d}^2+\mathfrak{d}^4&=FG\frac{w^2}{lr}\end{aligned}\right\}(17)$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)$, die dritte mit $(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)$ und subtrahirt, so wird

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)-\mathfrak{d}^4(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)&\\ =FG\left[\frac{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2}{kq}v^2-\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2}{lr}w^2\right]&\end{aligned}$$

und wenn man durch $(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)$ dividirt

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)-\mathfrak{d}^4&=\left[\frac{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2}{kq}v^2-\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2}{lr}w^2\right]\frac{FG}{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}\\ (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)-\mathfrak{d}^4&=\left[\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2}{lr}w^2-\frac{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2}{hp}u^2\right]\frac{FG}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2}\\ (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)-\mathfrak{d}^4&=\left[\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2}{hp}u^2-\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2}{kq}v^2\right]\frac{FG}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}\end{aligned}\right\}(18)$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen beziehungsweise mit u^2, v^2, w^2 und addirt, so erhält man rechts für den Factor von FG

$$\left.\begin{aligned} N = & \left[\frac{1}{(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2)\,lr} - \frac{1}{(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\,kq}\right](\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)\,v^2w^2 \\ & + \left[\frac{1}{(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\,hp} - \frac{1}{(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)\,lr}\right](\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)\,w^2u^2 \\ & + \left[\frac{1}{(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)\,kq} - \frac{1}{(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2)\,hp}\right](\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)\,u^2v^2 \end{aligned}\right\} \quad (19).$$

Dieser Factor ist aber gleich Null, wie sogleich nachgewiesen werden soll. Multiplicirt man die Gleichungen (16) der Reihe nach mit h, k, l und addirt, so wird zufolge der Gleichungen (11)

$$\mathfrak{a}^2hp + \mathfrak{b}^2kq + \mathfrak{c}^2lr = 0 \quad . \; . \; . \quad (20),$$

subtrahirt man hiervon die Gleichung

$$\mathfrak{a}^2(hp + kq + lr) = 0,$$

so erhält man die erste der folgenden Gleichungen, die sich sämmtlich auf demselben Wege ergeben:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\,kq - (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2)\,lr = 0 \\ (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)\,lr - (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\,hp = 0 \\ (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2)\,hp - (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)\,kq = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (21).$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich alsogleich, daſs wirklich

$$N = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

und es folgt aus den Gleichungen (18)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)\,u^2 + (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)\,v^2 \\ + (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)\,w^2 - \mathfrak{b}^4 = 0 \quad . \; . \; . \quad (23). \end{aligned}$$

Diese Gleichung giebt zwei Werthe für $\mathfrak{q}$, die wir, sowie alle anderen zugehörigen Gröſsen durch die Indices 1 und 2 unterscheiden wollen. Die vorhergehende Gleichung ist natürlich identisch mit

$$(\mathfrak{q}^2-\mathfrak{q}_1^2)(\mathfrak{q}^2-\mathfrak{q}_2^2) = 0 \quad . \; . \; . \quad (24)$$

und es ist daher

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_1^2+\mathfrak{q}_2^2 &= (\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)\,u^2 + (\mathfrak{a}^2+\mathfrak{c}^2)\,v^2 + (\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)\,w^2 \\ \mathfrak{q}_1^2\,\mathfrak{q}_2^2 &= \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2u^2 + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2v^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2w^2 - \mathfrak{b}^4 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Von der ersten dieser Gleichungen machen wir gleich Anwendung, um auch das Verhältniſs $\frac{a}{a'}$ der Ellipsenaxen

durch u, v, w auszudrücken. Die Gleichungen (16) geben nämlich mit p, q, r multiplicirt und addirt

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}^2 p^2 + \mathfrak{b}^2 q^2 + \mathfrak{c}^2 r^2 - \mathfrak{q}^2 + \frac{a}{a'}\mathfrak{b}^2 = 0 \\ \mathfrak{a}^2 h^2 + \mathfrak{b}^2 k^2 + \mathfrak{c}^2 l^2 - \mathfrak{q}^2 + \frac{a'}{a}\mathfrak{b}^2 = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (26),$$

indem die zweite dieser Gleichungen auf analoge Weise aus den Gleichungen (15) folgt. Die letzten Gleichungen aber geben

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a'} + \frac{a'}{a}\right)\mathfrak{b}^2 &= -\mathfrak{a}^2(h^2+p^2) - \mathfrak{b}^2(k^2+q^2) - \mathfrak{c}^2(l^2+r^2) + 2\mathfrak{q}^2 \\ &= -\mathfrak{a}^2(v^2+w^2) - \mathfrak{b}^2(w^2+u^2) - \mathfrak{c}^2(u^2+v^2) + 2\mathfrak{q}^2 \\ &= -\mathfrak{q}_1^2 - \mathfrak{q}_2^2 + 2\mathfrak{q}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27) \end{aligned}$$

und hieraus erhält man für die beiden Wellen

$$\left(\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a'_1}{a_1}\right)\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{q}_1^2 - \mathfrak{q}_2^2 \quad \left(\frac{a_2}{a'_2} + \frac{a'_2}{a_2}\right)\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{q}_2^2 - \mathfrak{q}_1^2 \; (28).$$

Diese Gleichungen können nun dazu dienen, das Verhältnifs der Axen einer elliptischen Welle zu bestimmen, wenn einmal die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben bekannt ist. Die erste Gleichung (28) liefert nach $\frac{a_1}{a'_1}$ aufgelöst zwei Werthe, von welchen nur einer in dem betrachteten speciellen Falle zu brauchen seyn wird. Hat man aber den richtigen Werth von $\frac{a_1}{a_1}$, so bleibt in Betreff des Werthes von $\frac{a'_2}{a_2}$ keine Unbestimmtheit mehr übrig. Denn man hat aus den letzten Gleichungen

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a'_1}{a_1} = -\left(\frac{a_2}{a'_2} + \frac{a'_2}{a_2}\right)$$

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} = -\left(\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2}\right) = -\left(\frac{1}{\frac{a_1}{a'_1}} + \frac{1}{\frac{a_2}{a'_2}}\right) = -\frac{\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2}}{\frac{a_1}{a'_1} \cdot \frac{a_2}{a'_2}}$$

und somit

$$\frac{a_1}{a'_1} = -\frac{a'_2}{a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Ellipsen, welche zu zwei Wellen gehören, die sich nach derselben Richtung fortpflanzen, sind daher confocal,

werden aber im entgegengesetzten Sinne beschrieben. Die betreffenden Axen der zwei Ellipsen müssen daher aufeinander senkrecht stehen, und die bloſsen Richtungen der Axen sind somit parallel.

Letztere Behauptung ergiebt sich auch folgendermaaſsen. Die erste Gleichung (15) giebt auf die erste und zweite Welle angewandt

$$\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}_1^2+\frac{a'_1}{a_1}\mathfrak{b}^2=F_1\frac{u}{h_1}\qquad \mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}_2^2+\frac{a'_2}{a_2}\mathfrak{b}^2=F_2\frac{u}{h_2}\qquad(30),$$

woraus durch Subtraction mit Rücksicht auf Gleichung (29) folgt

$$-\mathfrak{q}_1^2+\mathfrak{q}_2^2+\left(\frac{a'_1}{a_1}+\frac{a_1}{a'_1}\right)\mathfrak{b}^2=\left(\frac{F_1}{h_1}-\frac{F_2}{h_2}\right)u\ .\ \ .\ \ (31).$$

Da der linke Theil dieser Gleichung zufolge der ersten Gleichung (28) Null ist, so muſs seyn

$$F_1h_2=F_2h_1;\quad F_1k_2=F_2k_1;\quad F_1l_2=F_2l_1\quad(32),$$

indem die zwei letzten Gleichungen auf ähnliche Weise erhalten werden. Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so wird

$$F_1^2=F_2^2\quad(33);\quad\text{also}\quad F_1=\pm F_2\quad(34).$$

Behalten wir bloſs das obere Zeichen bei, so gelten die Gleichungen (32)

$$h_1=h_2,\quad k_1=k_2,\quad l_1=l_2\quad .\ \ .\ \ (35),$$

d. h. die Axen der beiden Ellipsen sind parallel.

IV.

Um die Richtung der optischen Axen zu finden, betrachten wir zuerst die aus den Gleichungen (23) und (24) folgende identische Gleichung

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)u^2+(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)v^2\\&+(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)w^2-\mathfrak{b}^4\equiv(\mathfrak{q}^2-\mathfrak{q}_1^2)(\mathfrak{q}^2-\mathfrak{q}_2^2)\quad(36).\end{aligned}$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{q}^2$ der Reihe nach $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$, so wird

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)u^2-\mathfrak{b}^4&=(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}_1^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}_2^2)\\(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2)v^2-\mathfrak{b}^4&=(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}_1^2)(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}_2^2)\\(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{b}^2)w^2-\mathfrak{b}^4&=(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}_1^2)(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}_2^2)\end{aligned}\right\}\ .\quad(37),$$

aus welchen Gleichungen u, v, w gefunden werden können, wenn die Geschwindigkeiten q_1, q_2 beider Wellen nach der gesuchten Richtung gegeben sind. Nimmt man an, daſs

$$a^2 > b^2 > c^2, \quad q_1^2 > q_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (38),$$

so muſs der zweiten Gleichung (37) zufolge, deren linker Theil negativ ist, auch sein

$$q_1^2 > b^2 > q_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Die Geschwindigkeit der schnelleren Welle ist also immer gröſser, die der langsameren aber immer kleiner als b.

Suchen wir nun die Richtung, für welche beide Wellen circular polarisirt sind, für welche also

$$\frac{a_1}{a'_1} = -\frac{a'_2}{a_2} = \pm 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

ist, und es soll der Index 0 zur Bezeichnung der Gröſsen für diesen speciellen Fall angewandt werden. Alsdann giebt jede der Gleichungen (28)

$$q_{10}^2 - q_{20}^2 = \pm 2 b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Der Relation (39) zufolge ist hier das obere Zeichen beizubehalten, wenn wir die mit b^2 bezeichnete Constante als eine positive Gröſse betrachten. Setzt man den letzten Werth für b^2 in die Gleichungen (37), so geben dieselben für den gegenwärtigen Fall

$$\left.\begin{aligned} (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) u_0^2 &= \left(a^2 - \frac{q_{10}^2 + q_{20}^2}{2}\right)^2 \\ (b^2 - c^2)(b^2 - a^2) v_0^2 &= \left(b^2 - \frac{q_{10}^2 + q_{20}^2}{2}\right)^2 \\ (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) w_0^2 &= \left(c^2 - \frac{q_{10}^2 + q_{20}^2}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (42).$$

In der zweiten dieser Gleichungen ist der linke Theil negativ, der rechte dagegen positiv, hieraus folgt, daſs nothwendig

$$v_0^2 = 0, \quad u_0^2 + w_0^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

seyn muſs.

Demzufolge giebt die erste Gleichung (25)

$$q_{10}^2 + q_{20}^2 = (b^2 + c^2) u_0^2 + (a^2 + b^2) w_0^2 = a^2 w_0^2 + b^2 + c^2 u_0^2 \quad (44).$$

Setzt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung (42), so wird dieselbe

$$(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)u_0^2=\tfrac{1}{4}[(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)+(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)u_0^2]^2$$

oder anders geschrieben

$$\tfrac{1}{4}[(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)-(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)u_0^2]^2=0 \quad . \quad . \quad (45).$$

Somit ist, wenn man die letzte Gleichung (42) ähnlich behandelt

$$u_0^2=\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}; \quad v_0^2=0; \quad w_0^2=\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2} \quad . \quad (46).$$

Durch diese Gleichungen sind aber in den gewöhnlichen doppelbrechenden Krystallen die Richtungen der *optischen Axe* bestimmt, d. i. die Richtungen, nach denen keine Doppelbrechung stattfindet. Diese Richtungen sind also in circular polarisirenden Krystallen dadurch ausgezeichnet, dafs die Polarisation beider Wellen eine circulare ist.

V.

Wir wollen die Lichtbewegung in zweiaxigen circular polarisirenden Krystallen nicht weiter verfolgen, sind ja doch solche Krystalle noch nicht mit Sicherheit bekannt: wir wenden uns vielmehr zu dem speciellen Falle einaxiger Krystalle. Betrachten wir noch insbesondere einen positiven Krystall, wie den Quarz, so haben wir in den vorhergehenden Formeln die zwei gröfseren Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten einander gleich zu setzen, und haben also

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Hierdurch werden die Differentialgleichungen (8) mit Rücksicht auf die Gleichungen (14)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2}-\mathfrak{a}^2\Delta^2\xi+\frac{di}{dx}&=\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{b}^2\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)\\
\frac{d^2\eta}{dt^2}-\mathfrak{b}^2\Delta^2\eta+\frac{di}{dy}&=\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{b}^2\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\mathfrak{c}^2\Delta^2\zeta+\frac{di}{dz}&=\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{b}^2\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (48).$$

Die Theorie der Lichtbewegung solcher circular polarisirender einaxiger Krystalle wurde von mir schon einmal

gegeben [1]). Es handelte sich damals darum, für zwei von Cauchy aufgestellte, von Jamin durch die Beobachtung verificirte Formeln die Ableitung zu geben. Die dazu nöthigen Differentialgleichungen unterscheiden sich aber von den Gleichungen (48) nur dadurch, dafs die Constante $\mathfrak{b}$ noch mit w multiplicirt ist, also mit dem Cosinus des Winkels, welchen die Wellennormale mit der z-Axe, d. i. mit der optischen Axe bildet.

Dieser Factor w hat allerdings den Effect, dafs senkrecht zur optischen Axe alle Erscheinungen der Circularpolarisation verschwinden und der Krystall sich wie ein gewöhnlicher einaxiger verhält. Ich werde jedoch zeigen, dafs die Beobachtungen gleich gut dargestellt werden, ob man den Factor w beibehält oder nicht. Es läfst sich aber nicht leugnen, dafs ein solcher Factor, der von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes abhängt, gar nicht in Differentialgleichungen wie (48) hineinpafst.

Von Beobachtungen am Quarze, welche mit der Theorie verglichen werden können, existiren zweierlei: erstens die schon früher erwähnten Beobachtungen Jamin's [2]) und zweitens meine Messungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Nähe der optischen Axe des Quarzes [3]). Wir wollen mit den Letzteren beginnen.

VI.

Die Substitution $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ verwandelt Gleichung (23) in

$$(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{q}^2)(\mathfrak{a}^2 \cos\varrho^2 + \mathfrak{c}^2 \sin\varrho^2 - \mathfrak{q}^2) = \mathfrak{b}^4 \quad . \quad (49)$$

wenn wir mit ϱ den Winkel bezeichnen, welcher die Wellennormale mit der optischen Axe bildet.

Nennen wir nun V die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft und setzen

$$\frac{V}{\mathfrak{a}} = \alpha, \quad \frac{V}{\mathfrak{c}} = \gamma, \quad \frac{V}{\mathfrak{b}} = \chi, \quad \frac{V}{\mathfrak{q}} = n \quad . \quad . \quad (50),$$

so giebt die letzte Gleichung

1) Pogg. Ann. Bd. 119 (1863), S. 74.

2) *Ann. Chim. phys.* 3. *Sér.*, *t.* 30 (1850), *pag.* 55.

3) Wien. Ber. Bd. 60, Abth. 2 (1869). — Pogg. Ann. Bd. 140, S. 460.

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\sin\varrho^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2 \sin\varrho^4+\frac{1}{\chi^4}} \quad (51).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varrho = 90°$, so erhält man daraus für den ordentlichen und außerordentlichen Brechungsquotienten, wenn dieselben nach der gewöhnlichen Methode ermittelt werden,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2+\frac{1}{\chi^4}}\\ \frac{1}{\varepsilon}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2+\frac{1}{\chi^4}}\end{aligned}\right\} \quad (52).$$

Meine Messungen ergaben für die *D*-Linie

ϱ	n_1	n_2
0° 27,0′	1,5441887	1,5442605
1 54,7	1927	2649
2 48,4	1942	2766
4 40,0	2043	3009
5 4,8	2088	3043.

Wie die Gleichungen (52) und die nachfolgenden Zahlenwerthe lehren, sind α und γ sehr wenig von ω und ε verschieden, so daſs jedenfalls für die Gröſse $\gamma - \alpha$ die Gröſse $\varepsilon - \omega$ gesetzt werden kann. Für letztere Gröſse fand aber Rudberg den Werth 0,0091. Demzufolge geben die für $\varrho = 0° \, 27{,}0'$ angegebenen Werthe von n in Gleichung (51) gesetzt

$$\alpha = 1{,}5442243; \quad \chi = 226{,}470$$

wozu noch $\gamma = \alpha + 0{,}0091 = 1{,}5533243$

kommt. Mit Hülfe dieser Gröſsen kann man nun den Werth von n für die anderen Winkelwerthe ϱ berechnen und erhält so für die Differenzen

Beobachtung — Rechnung.

ϱ	n_1	n_2
1° 54,7′	— 0,0000011 (11)	— 0,0000007 (07)
2 48,4	34 (35)	40 (40)
4 40,0	32 (32)	00 (02)
5 4,8	05 (06)	58 (57).

Die eingeklammerten Zahlen sind die entsprechenden Werthe, welche ich seinerzeit erhielt, ausgehend von Cauchy's Theorie, nach welcher

$$\frac{1}{n_2}=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\sin\varrho^2\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2\sin\varrho^4+\frac{\cos\varrho^4}{\chi^4}} \quad (51^*)$$

$$\omega=\alpha,\quad \varepsilon=\gamma\,.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \quad (52^*)$$

seyn müfste. Die vorliegenden Messungen werden aber ersichtlich durch beiderlei Formeln gleich gut dargestellt.

Mit Hülfe der obigen Werthe von α, γ und χ geben die Gleichungen (52)

$$\omega=1{,}5442242;\quad \varepsilon=1{,}5533244$$

und es können daher auch nach der gegenwärtigen Theorie, wenigstens soweit als unsere Beobachtungsmittel reichen, die Constanten α und γ als ordentlicher und außerordentlicher Brechungsquotient aufgefafst werden.

Einen genaueren Werth von χ erhält man aber aus dem Winkel D, um welchen die Polarisationsebene durch eine zur optischen Axe senkrechte Quarzplatte gedreht wird. Für diesen Winkel hat man nämlich

$$D=\frac{e}{L}\,180^0(n_{20}-n_{10}) \quad .\;.\;.\;. \quad (53),$$

wo e die Dicke der Platte und L die Wellenlänge des Lichtes in der Luft bedeutet. Nun ist sowohl nach Gleichung (51), wie (51*) für $\varrho=0$

$$\frac{1}{n_0^2}=\frac{1}{\alpha^2}\pm\frac{1}{\chi^2}$$

oder

$$n_0=\alpha\left(1\pm\frac{\alpha^2}{\chi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\alpha\left(1\mp\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\chi^2}+\frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{\chi^4}\mp\frac{5}{16}\frac{\alpha^6}{\chi^6}+\ldots\right) \quad (54)$$

und daher

$$n_{20}-n_{10}=\alpha\left(\frac{\alpha^2}{\chi^2}+\frac{5}{8}\frac{\alpha^6}{\chi^6}+\ldots\right) \quad .\;. \quad (55).$$

Den früher gegebenen Zahlenwerthen zufolge ist aber das zweite Glied rechts schon ohne Einflufs, so dafs wir haben

$$\chi^2=\frac{e}{L}\,\frac{180}{D}\alpha^3 \quad .\;.\;.\;.\;.\;. \quad (56).$$

Nun ist nach meinen Beobachtungen [1]) bei einer Temperatur von 21° C. für $e = 1^{mm}$ und für die Natriumflamme $D = 21° 727$; somit, da $L = 0{,}0005888^{mm}$

$$\chi = 227{,}624.$$

VII.

Was nun die Beobachtungen Jamin's betrifft, so hat derselbe an mehreren zur Axe senkrechten Quarzplatten für verschiedene Einfallswinkel i das Verhältniſs der Ellipsenaxen $\left(\frac{a}{a'}\right)$ und den Gangunterschied (ϑ) der beiden Wellen bestimmt.

Betrachten wir zuerst die erstere Gröſse, so finden wir aus den Gleichungen (28)

$$\frac{a}{a'} = \pm H \pm \sqrt{H^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

wenn wir zur Abkürzung

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\chi^2 \sin\varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

setzen. Nach Cauchy's Theorie würde nur der Werth von H zu ersetzen seyn durch

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\chi^2 \operatorname{tang}\varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad (58^*),$$

Die Zahlenwerthe der in den vorstehenden Formeln vorkommenden Gröſsen α, γ, χ sind im Vorhergehenden angegeben, der Winkel ϱ aber ergiebt sich, freilich nur näherungsweise, aus der Gleichung

$$\sin i = \omega \sin \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59),$$

so daſs man beispielsweise für $\frac{a}{a'}$ hat

i	beobachtet	Gleichung (58)	Gleichung (58*)
18° 28′	0,094	0,093	0,089 (0,086)
22 0	0,057	0,067	0,063 (0,060)

Die eingeklammerten Zahlen sind die von Jamin nach Formel (58*) gerechneten Werthe, welche mit meinen auf

1) Wien. Ber. Bd. 74 (1876).

dieselbe Art gerechneten nicht übereinstimmen, da Jamin nur ungenaue Werthe der optischen Constanten des Quarzes zu Gebote standen.

Da die gerechneten Werthe bei Jamin meist sehr beträchtlich hinter der Beobachtung zurückbleiben, so würde eine vollständigere Berechnung wohl für Formel (58) eine bessere Uebereinstimmung mit der Beobachtung geben, als für Formel (58*). Es ist aber kein besonderes Gewicht hierauf zu legen, da die Differenz der Formeln (58) und (58*) fast immer viel kleiner ist als die Abweichung jeder Formel von der Beobachtung.

VIII.

Was schlieſslich den Wegunterschied betrifft, so erhält man eine Näherungsformel für denselben auf folgende Weise, wie ich schon in Pogg. Ann. loc. cit. gezeigt habe. Es ist für gewöhnliche einaxige Krystalle

$$\vartheta = \frac{eV}{2L\mathfrak{a}^3}\left[(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2)\sin\varrho^2\right] = \frac{eV}{2L\mathfrak{a}^3}\left[\mathfrak{q}_2^2 - \mathfrak{q}_1^2\right]$$

$$= \frac{e}{2L}\alpha^3\left[\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Läſst man diese Formel auch jetzt noch gelten und setzt nur für n_1 und n_2 die richtigen Werthe aus Gleichung (51), so wird

$$\vartheta^2 = \frac{e^2}{L^2}\alpha^6\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2 \sin\varrho^4 + \frac{1}{\chi^4}\right] \quad . \quad (61).$$

Hieraus erhält man für den Gangunterschied längs der optischen Axe, d. i. für $\varrho = 0$ und mit Rücksicht auf Gleichung (53)

$$\vartheta_0^2 = \frac{e^2}{L^2}\alpha_0^6\frac{1}{\chi^4} = \left(\frac{D}{180}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (62).$$

Somit ist auch

$$\vartheta^2 = p^2 \sin\varrho^4 + \vartheta_0^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (63),$$

worin

$$p = \frac{e}{L}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\alpha^3 \quad . \; . \; . \quad (64).$$

Nach Cauchy wäre zu setzen:

$$\vartheta^2 = p^2 \sin\varrho^4 + \vartheta_0^2 \cos\varrho^4 \quad . \; . \; . \quad (63^*).$$

Aus den Gleichungen (62) und (63) folgt

$$\vartheta_0 = 0{,}12071; \quad p = 15{,}31957,$$

womit man beispielsweise für ϑ findet

i	Beobachtet	Gleichung (63)	Gleichung (63*)
18° 28′	0,691	0,656	0,655 (0,680)
22 0	0,958	0,910	0,908 (0,945)

Für die eingeklammerten Zahlen gilt wieder die in VII gemachte Bemerkung. Jamin findet nämlich $p = 16{,}034$; wenn nun dies auch nicht der theoretische Werth von p ist, so kann er doch als empirischer Werth gelten. Bei den verschiedenen Vernachlässigungen, die zur Ableitung der Gleichung (63) nöthig waren, ist es begreiflich, daſs diese Gleichung die Beobachtungen quantitativ nicht hinreichend streng darstellt, daſs sie das aber thut, wenn nur ihre Form beibehalten wird.

Auf diese Weise ist jedoch die Gleichung (63) nicht geeignet ein Kriterium für die Richtigkeit der vorliegenden Theorie abzugeben. Es dürfte aber wohl kaum auch eine strengere Formel wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler besser zum Ziele führen.

Soviel können wir jedoch immerhin sagen, daſs die vorliegende Theorie mit allen Beobachtungen stimmt, wenn sie dies auch nicht besser als Cauchy's Theorie thut. Sie hat aber vor letzterer den Vorzug der Einfachheit und ist auch noch durch folgenden Umstand ausgezeichnet. In unserer Theorie sind die isotropen circular polarisirenden Krystalle specielle Fälle der einaxigen, wie dies ja auch bei den Krystallen ohne Circularpolarisation stattfindet, bei Cauchy ist dies jedoch nicht der Fall, oder nur durch ziemlich complicirte Annahmen zu erreichen.

VII. *Ueber die Krystallisation des Markasits und seine regelmäfsigen Verwachsungen mit Eisenkies; von A. Sadebeck.*

Das grofse Interesse, welches die regelmäfsigen Verwachsungen verschiedener Mineralien und insbesondere diejenigen verschiedener heteromorpher Zustände derselben Substanz haben, veranlafste mich solche am Markasit und Eisenkies einem genaueren Studium zu unterwerfen.

Es stellte sich dabei bald heraus, dafs zunächst die Formen des Markasits für sich eine erneute Bearbeitung erheischten, da dieselben bisher speciell nur von Laurent Pierre Dejussieu [1]) unter Haüy's Leitung, ferner von Bernhardi [2]) und Hausmann [3]) monographisch behandelt sind. Weitere durch neuere Messungen und Zeichnungen präcisirte Angaben finden sich in den Lehrbüchern von Phillips (Brooke und Miller) [4]) und Mohs [5]), aus denen Quenstedt, Naumann und Dana geschöpft haben. Dejussieu hat zuerst die Formen des Markasits (*fer sulfuré blanc*) von denen des Eisenkieses (*fer sulfuré*) abgetrennt, jedoch hatten Bernhardi und Hausmann noch Bedenken ihm beizustimmen.

Die chemische Gleichheit der beiderlei Krystalle wurde später von Berzelius [6]) mit Sicherheit nachgewiesen.

Für die Bestimmung der Krystallisation des Markasits handelte es sich darum, neue Messungen anzustellen, die einzelnen Typen festzustellen, die Zwillinge in ihrer mannigfaltigen Erscheinungsweise kennen zu lernen und schliefs-

1) *Journal des Mines XXX, Oct.* 1811.
2) Schweigger's Journal III, 1811, S. 56.
3) *De pyrite gilva, hepatico et radiato auctorum,* Göttingen 1814.
4) *An elementary introduction to mineralogy, London* 1823.
l. c. 1852, *new edition.*
5) Leicht fafsliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreiches. II. Physiographie, bearbeitet von Zippe, Wien 1839.
6) *Ann. d. Chim. et de Phys. XII,* 29.

lich in die Art und Weise des Baues, also die Krystallotektonik des Markasits, einzudringen.

Die regelmäſsigen Verwachsungen sind schon von Breithaupt[1]), Haidinger[2]) und Kenngott[3]) erwähnt, nur Haidinger illustrirt seine Darstellung durch eine Zeichnung, dieselbe Art der Verwachsung giebt Breithaupt an, aber im Jahre 1837 noch eine andere, welche jedoch nicht deutlich charakterisirt ist, Kenngott läſst die krystallographische Seite unberührt. Es handelte sich nun darum festzustellen, ob in der That verschiedene Arten der Verwachsung vorkommen und wie sich die beiden Mineralien dabei verhalten.

Das genauere Studium dieser Verwachsungen lehrte, daſs bei ihnen die Art und Weise des Aufbaues der Krystalle eine Hauptrolle spielt. Die Krystallotektonik giebt hier, wie in vielen anderen Beziehungen, Aufschlüsse und Erklärungen, welche man durch das einfache Formenstudium nie erlangen könnte.

Die erhaltenen Resultate forderten zu einer Betrachtung der regelmäſsigen Verwachsungen verschiedener Mineralien überhaupt auf, aus denen hervorgeht, daſs für alle derartige Verwachsungen der Parallelismus gewisser Richtungen das charakteristische ist.

Das erste untersuchte Material, schöne Stufen von Littmitz in Böhmen erwarb ich von Herrn Mineralienhändler C. F. Pich in Berlin, eine weitergehende Bearbeitung wurde mir durch die Güte des Herrn Professor Websky ermöglicht, welcher mir die Benutzung der Berliner Sammlung gestattete, Hr. Prof. Weisbach sendete mir Stufen aus der Sammlung der Kgl. Bergakademie in Freiberg und Hr. G. Seligmann in Coblenz stellte mir das in seiner Sammlung befindliche Material zur Ver-

1) Erdmann's J. II, S. 249, 1835.
Vollständiges Handbuch der Mineralogie I, S. 309. 1836.
Bericht des Vereins Deutscher Naturf. in Prag 1837, S. 145.

2) Handbuch der best. Min. 1845, S. 281.

3) Mineral. Not. II, Wiener Ber. 1853.

fügung. Allen diesen Herren spreche ich hiermit meinen Dank aus.

I. Krystallisation des Markasits.

1. Winkelmessungen.

Die Krystalle des Markasits sind im Allgemeinen wenig zu Winkelmessungen geeignet, da die Flächen gröfstentheils gestreift, vielfach unterbrochen und gekrümmt, sowie häufig angelaufen sind. Dejussieu (l. c.) und Phillips (l. c.) haben nur das Anlegegoniometer benutzt, Brooke und Miller (l. c.) das einfache Reflexionsgoniometer. Deshalb schien es mir wichtig Messungen mi dem Fernrohrgoniometer auszuführen. Böhmische Krystalle (Speerkiese) aus der Sammlung des Hrn. G. Seligmann gestatteten derartige Messungen. Dieselben wurden von Hrn. G. Seligmann und mir gemeinschaftlich in Coblenz gemacht und der Umstand, dafs die beiderseitigen Ablesungen stets gut übereinstimmten, spricht für die Zuverlässigkeit derselben.

Die Bilder waren allerdings nicht auf allen Flächen gleich scharf, auch waren zuweilen mehrere Bilder zu sehen, wiederholte Messungen jedoch, sowie die Uebereinstimmung gemessener und berechneter Winkel lieferten befriedigende Resultate.

An der durch die Flächen $l\, l\, \underline{l}\, \underline{l}$ $l = (\infty a : b : c) = 101$ gebildeten Spiesspitze (Fig. 4) ergab der stärkste Reflex auf $l / l = 78^{\circ}\, 2'$, auf $l / \underline{l}$ $56^{\circ}\, 24'$, beide Winkel wurden dann mit Einstellung auf den schwächsten Reflex, welcher am weitesten vom Hauptreflex entfernt war, gemessen und so gefunden:

$$l / l = 78^{\circ}\, 32', \qquad l / \underline{l} = 56^{\circ}\, 30',$$

die Reflex-Differenzen betragen also nur 30′ und 6′.

Die Messung $l / \underline{l}$ über Eck ergab mit etwas verschwommenen Bildern $103^{\circ}\, 21'$. Dieser Winkel wurde aus den ersten Messungen zu $103^{\circ}\, 50'$ berechnet, die Differenz von 29′ zwischen gemessenem und berechnetem Winkel

ist nicht als zu grofs zu betrachten. Berechnet man nun denselben Winkel aus den Messungen mit den schwachen Reflexen, so erhält man 104° 34', also eine viel gröfsere Differenz; dies beweist, dafs die mit dem starken Reflex gemessenen Winkel der mathematisch genauen Ecke am nächsten kommen. Die beiden Winkel l/l und $l/\underline{l}$ genügen zur Bestimmung der Axenverhältnisse, so dafs man aus ihnen auch alle andern Winkel berechnen kann. Es wurde gefunden

$$a : b : c = 0,6208 : 0,8103 : 1 = 1 : 1,3052 : 1,6108$$
$$m/m = 105^0\ 5',\ m = (a : b : \infty c) = 110.$$

In Folgendem sind die gefundenen Winkel mit den älteren zusammengestellt:

	Dejussieu	Bernhardi	Philips	Brooke u. Miller	Breithaupt	Sadebeck
m/m =	106° 36'	103°	106°	106° 5'	105° 28'	105° 5'
l/l =	81 46	79 35'	80	80 20	80 20	78 2.

Die älteren Angaben weichen also wesentlich ab, was wohl in der unvollkommeneren Methode der Messung seinen Grund haben mufs. Jedenfalls ist es wünschenswerth, dafs noch an guten Krystallen scharfe Messungen ausgeführt werden.

Bei Englischen Speerkiesen gestattete ein flacheres Längsprisma Winkelmessungen, welche in der b-Axe 52° 30' ergaben. Dieser Winkel stimmt sehr gut zu 52° 32', dem Winkel, welchen das Längsprisma $y = (\infty a : b : \frac{2}{5}c) = 205$ in b bildet. Berechnet man nun den Winkel zweier an der Zwillungsgrenze zusammenstofsender Flächen, so erhält man 148° 46' 20" gegen 149° 30'. Die etwas grofse Differenz erklärt sich hier leicht aus den schlechten Reflexen.

Die gute Uebereinstimmung des gemessenen Winkels y mit dem aus den Messungen an Böhmischen Krystallen berechneten Winkel erhöht den Werth der Messungen.

2. Einfache Formen und Typen.

Einfache Krystalle kommen beim Markasit nur selten vor, meist sind es Zwillinge und durch die Zwillingsbil-

dung sind die verschiedenen Ausbildungsformen in den meisten Fällen bestimmt, so daſs die Abgrenzung der Typen von der Zwillingsbildung zwar unzertrennlich ist, jedoch sollen im Folgenden die einzelnen Typen, abgesehen von der Zwillingsbildung, behandelt werden. Die Buchstaben für die Formen sind die zuerst von Dejussieu in Anwendung gebrachten und durch Phillips vermehrten.

I. *Typus*, Krystalle von Schemnitz in Ungarn Fig. 1, Taf. IX, Dejussieu's Fig. 3 (l. c.), Bernhardi's Fig. 3 (l. c.) stellt die Combination dar:

Grundoktaëder	$h = (a : b : c) = 111$
Verticales Prisma	$m = (a : b : \infty c) = 110$
Längsprisma	$l = (\infty a : b : c) = 101$
Querprisma	$g = (a : \infty b : c) = 011$
Endfläche	$p = (\infty a : \infty b : c) = 001.$

Diese Krystalle sind nicht unähnlich der Combination von Oktaëder, Dodekaëder und Hexaëder im regulären System, so daſs man sie auf den ersten Blick leicht für Eisenkies halten kann. Abgesehen von der später zu besprechenden Flächenbeschaffenheit, zeigen die Winkel bedeutende Unterschiede, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

	Dejussieu	Bernhardi	Brooke u. Miller	Sadebeck
h/h vord. Endk.	115° 52′	112° 42′	115° 10′	113° 53′ ber.
h/h seitl. Endk.	89 10	92 19	89 6	89 12 ber.
h/h Seitenkante	125 16	125 0	126 10	127 32 ber.
g/g in c	65 40	67 23	64 52	63 40 ber.
l/l in c	81 46	79 35	80 20	78 2 gem.
g/l	110 48	110 48		109 24 ber.
m/m	106 36	103 0	106 5	105 5 ber.
m/l	116 42		116 31 30″	118 12 gem.

Dieser Typus ist noch durch die vorherrschende Ausbildung in der Richtung der Hauptaxe c ausgezeichnet, während bei den meisten Krystallen der andern Typen die Hauptaxe nur niedrig ist.

Man kann die beiden nächsten Haupttypen nach der Ausbildung des verticalen Hauptprismas unterscheiden.

II. *Typus*, Kammkiese, als Haupttypus ist die Combination von verticalem Hauptprisma mit Hauptlängsprisma im Gleichgewicht zu betrachten, also Oblongoktaëder, derartige Krystalle kommen bei Clausthal, Freiberg etc. vor, vergl. die Fig. 6, Taf. X gezeichneten Zwillinge.

Einen Subtypus II*a* bilden solche Krystalle, welche nach der Endfläche tafelförmig, in der Richtung der *b*-Axe ausgedehnt sind, seitlich Längsprisma *l* und Längsfläche haben, am Ende das verticale Prisma *m*; Fig. 5, Taf. X stellt Krystalle von Tavistock dar.

III. *Typus*, Speerkiese, die Längsprismen bilden beim Haupttypus Fig. 1, Taf. X mit der Endfläche die alleinige Begränzung, was nur durch die Zwillingsbildung ermöglicht wird. Aufser dem Hauptlängsprisma sind noch folgende Längsprismen beobachtet:

	Brooke u. Miller	Sadebek ber.	Dejussieu
$z = (\infty a : b : \frac{1}{2} c) = 102$,			
Neigung in c	118° 44′	116° 21′ 20″	
$y = (\infty a : b : \frac{2}{5}) = 205$,			
Neigung in c		127° 28′	
$b = (\infty a : b : \frac{1}{3} c) = 103$,			
Neigung in c	136° 54′	135° 16′ 40″	
$r = (\infty a : b : \frac{1}{4} c) = 104$,			
Neigung in c	147°	145° 42′	147° 48′

Nach der einen Gränzform, der Endfläche, können die Krystalle tafelförmig werden, die andere Gränzform, die Längsfläche, ist nur schmal.

Aufser End- und Längsfläche kommen zuweilen beim Haupttypus noch verticales Prisma, Oktaëder und Querprisma vor, so bei den Böhmischen Krystallen, denen von Folkestone, Misdroy etc. In dem Auftreten des verticalen Prismas besteht der Uebergang zum II. Typus. Als Subtypus III*a* Fig. 5, Taf. X sind die tafelförmigen Englischen Krystalle mit flachen und schmalen Längsprismen zu be-

trachten. Subtypus III*b* stellen tafelförmige Krystalle von Freiberg dar (Fig. 11, Taf. IX) mit Oktaëder und schliefslich Subtypus III*c* (Fig. 3, Taf. IX) die Combination von Längsprisma *l*, verticalem Prisma *m* und Endfläche, dieser Subtypus bildet den Uebergang zum I. Typus.

3. Zwillinge.

Von den beiden bekannten Zwillingsgesetzen, denen zufolge die Normale einer Fläche des verticalen Hauptprismas *m* oder des Hauptquerprismas *g* Zwillingsaxe ist, ist das erstere das bei weitem am häufigsten vorkommende.

I. Gesetz, Zwillingsaxe die Normale auf *m*.

Nach der Ausbildung der Individuen unterscheidet man die sog. Kammkiese und Speerkiese, zu denen sich noch die Schemnitzer Zwillinge gesellen. Diese drei Zwillingsbildungen entsprechen genau den drei Haupttypen, die Schemnitzer Zwillinge dem I., die Kammkiese dem II., und die Speerkiese dem III. Typus. Wie die einfachen Formen, so zeigen auch die Zwillinge nicht selten Uebergänge der Typen untereinander und die Subtypen treten durch eigenthümliche Zwillingsgestalten hervor.

a) Schemnitzer Zwillinge Fig. 2, Taf. IX.

Diese Zwillinge hat im Allgemeinen schon Bernhardi beschrieben und gezeichnet (l. c. Fig. 7). Die Einzelindividuen sind, wie Fig. 1, Taf. IX darstellt, ausgebildet, an dem einen Ende der Hauptaxe sind sie aufgewachsen. Die Flächen des Hauptlängsprismas *l* bilden auf der einen Seite ein-, auf der andern ausspringende Winkel, erstere kommen mehr oder weniger deutlich zur Erscheinung, die schmalen Endflächen schneiden sich knieförmig, so dafs die parallel der *a*-Axe verlaufenden Streifen an der Zwillingsgränze federartig zusammentreffen. Eine charakteristische Pseudosymmetrie tritt bei dieser Zwillingsbildung nicht hervor.

Eingeschaltete Zwillingslamellen kann man häufig, wenn auch nicht in grofser Anzahl, beobachten.

Aufser bei Schemnitz in Ungarn kommen diese Zwillinge noch bei Mineral Point in Wisconsin vor, sie bilden hier einen zusammenhängenden Ueberzug auf Hexaëdern von Bleiglanz, in der Art, dafs die Basen nahezu mit den Hexaëderflächen zusammenfallen, ohne dafs jedoch eine regelmäfsige Verwachsung zu Grunde liegt.

b) **Kammkieszwillinge.**

Geht man von dem einfachen Zwillinge (Fig. 6, Taf. X in verschiedenen Lagen) aus, welchem das vom verticalen Hauptprisma *m* und Hauptlängsprisma *l* gebildete Oblongoktaëder zu Grunde liegt, so hat derselbe, wenn die beiden Individuen Hälften eines Individuums sind, das Aussehen eines einfachen Spinellzwillings. Dieses Aussehen ändert sich aber meist dadurch, dafs die Endfläche hinzutritt und vielfach herrscht, ferner dafs die der Zwillingsebene parallelen Flächen des verticalen Prismas sich ausdehnen (Fig. 9, Taf. IX). Die andern Prismenflächen bilden dann an dem einen Ende ein-, an dem andern ausspringende Winkel. Dem entsprechend sind die Krystalle meist so aufgewachsen, dafs die Zwillingsebene vertical steht, wobei am häufigsten der ausspringende Winkel $m/\underline{m}$ nach aufsen gekehrt ist.

Einfache Zwillinge sind sehr selten, meist ist die *Zwillingsbildung eine wiederholte* und zwar zunächst *mit parallelen Zwillingsebenen.* Die einzelnen Individuen haben dann von der Zwillingsebene an gerechnet eine gleiche oder verschiedene Entfernung der äufsern Flächen *m*. Den ersten Fall stellt Hausmann's Fig. 28 (l. c.) dar, drei Zwillinge liegen so parallel übereinander, dafs immer das obere Individuum sich mit dem einspringenden Winkel auf den ausspringenden Winkel des untern legt. Bei dem zweiten Fall werden die einzelnen Zwillinge nach oben immer schmäler und schmäler, was treppenartige Absätze zur Folge hat. Bei Fig. 2, Taf. X, welche Claus-

thaler Krystalle darstellt, geht die Treppenbildung in der Weise vor sich, wie bei den Schemnitzer Quarzen, die Zwillingsindividuen verjüngen sich von der Zwillingsebene aus beiderseits gleichmäfsig nach oben, so dafs die Gruppe ein thurmförmiges Aussehen erhält. Bei Fig. 9, Taf. IX ragt aus einem, im Wesentlichen einfachen Individuum ein Zwilling heraus, wodurch ein theilweiser Ineinanderwachsungszwilling zum Vorschein kommt. Wieder bei andern Zwillingen tritt die Wiederholung nicht nach oben, sondern nach den Seiten hin, parallel der Zwillingsebene ein, wobei einfach parallel und zwillingsartig gegeneinander gestellte Individuen vielfach abwechseln, so dafs eine grofse Mannigfaltigkeit in der Erscheinungsweise entsteht.

Die wiederholte Zwillingsbildung mit parallelen Zwillingsebenen äufsert sich auch vielfach in eingeschalteten Zwillingslamellen, welche von verschiedener Breite den Krystall ganz oder theilweise durchsetzen, jedoch nie mit der Regelmäfsigkeit, wie bei Kalkspath, Albit etc. Indem diese Lamellen verschiedenen Prismenflächen parallel liegen können, ist schon ein Uebergang zur *wiederholten Zwillingsbildung mit geneigten Zwillingsebenen* vorhanden. Diese ist dann besonders bei den Speerkiesen ausgebildet, kommt aber auch hier vor, wenn die Krystalle an der Basis aufgewachsen sind. Sie findet dann kreisförmig statt und zwar so, dafs die scharfen Winkel des Zwillingsprismas nach innen zu liegen kommen. Da nun nach meinen Messungen der scharfe Prismenwinkel 74° 55′ beträgt, so schliefsen die Prismenflächen von Individuum III und IV einen Winkel von 299° 40′ ein, es hat also, da nur ein einspringender Winkel von 60° 20′ frei bleibt, ein V. Individuum keinen vollkommenen Platz mehr, wie Fig. 4, Taf. IX zeigt.

Auch *Durchwachsungszwillinge* (Fig. 10, Taf. IX) kommen vor, sie stellen, wenn die der Zwillingsebene parallelen Prismenflächen beider Individuen keinen einspringenden Winkel zwischen sich lassen, Zwillinge mit einsprin-

genden Winkeln an den beiden Enden dar, wie sie in ähnlicher Weise auch beim Gyps vorkommen. Der überdeckte einspringende Winkel beträgt hier 30° 10′, so daſs für ein III. Individuum kein Platz wäre. Ein solches keilt sich jedoch zuweilen ein und setzt sich dann über das eine Individuum fort. Auf einer Freiberger Stufe habe ich den Fall beobachtet, daſs von einem Durchwachsungszwilling (Fig. 10, Taf. IX) ein Individuum, z. B. das linke obere verkümmert, dagegen an das linke untere sich ein anderes zwillingsartig anlegt, die Wiederholung zum Drilling hier also durch Verkümmerung eines Individuums ermöglicht wird. Uebergänge von den Durchwachsungszwillingen zu den Ineinanderwachsungszwillingen sind nicht selten.

Bemerkenswerth ist es, daſs ich nie eine solche wiederholte Zwillingsbildung beobachtet habe, bei welcher die stumpfen Prismenwinkel nach innen zu liegen kommen, während diese Art der Wiederholung, verbunden mit Durchwachsung gerade bei andern Mineralien des rhombischen Systems, z. B. Aragonit so häufig ist. Eine Erklärung läſst sich darin finden, daſs beim Aragonit und allen Krystallen mit Prismenwinkeln von nahezu 120° durch drei Individuen der Kreis fast geschlossen ist und durch Durchwachsung eine hexagonale Pseudosymmetrie hervorgerufen wird. Von drei Individuen würden beim Markasit II und III einen Raum von 44° 45′ freilassen, während es z. B. beim Aragonit nur 11° 12′ sind. Die der Zwillingsbildung zu Grunde liegende neue Symmetrie ist hier eine rhombische, welche in der ausgezeichnetsten Weise bei den Speerkieszwillingen zum Ausdruck gelangt.

c) Speerkieszwillinge.

Die Speerkieszwillinge sind dadurch charakterisirt, daſs sich die Flächen der Längsprismen sehr stark ausdehnen und die einspringenden Winkel der Flächen des Zwillingsprismas, sowie des Oktaëders, ganz oder zum groſsen Theil verdecken. Denkt man sich einen einfachen oktaëdrischen

Kammkieszwilling mit dem ausspringenden Zwillingswinkel aufgewachsen und nur die Flächen des Hauptlängsprismas vorhanden, so bilden diese eine oktaëdrische Ecke (vergl. die obere Ecke bei Fig. 1, Taf. X), wie man sie bei Böhmischen Krystallen, solchen aus den Kreidemergeln von Folkestone, Misdroy auf Wollin etc. beobachten kann. Die Hauptaxe dieses Oktaëders liegt in der Zwillingsebene und Basis, sie ist eine der Linie *ab* parallele Linie, also eine Zwischenaxe bei beiden Individuen, die Axe *a* ist deren Hauptaxe und die Axe *b* die Zwillingsaxe.

Die Winkelmessungen ergaben:

Vordere Endkante	$l/\underline{l}$	= 123° 30'
Seitliche Endkante	l/l	= 101 58
Seitenkante (nicht ausgebildet)		= 103 50.

Die bei den Kammkieszwillingen noch versteckte rhombische Pseudosymmetrie ist also hier aufs Deutlichste entwickelt. Dafs man es in der That mit Zwillingen zu thun hat, ergiebt sich leicht aus den Uebergängen zu Formen mit einspringenden Winkeln an der Spitze, aus der wiederholten Zwillingsbildung und aus den Schliffflächen.

Schleift man an eine Speerspitze eine Pseudobasis an, so tritt die Zwillingsgränze dadurch deutlich hervor, dafs die beiden Flächentheile seitlich von derselben einen verschiedenen Glanz haben, die eine Schliffseite ist matter, die andere glänzender. Dreht man um 180°, so wird die vorher mattere Seite glänzender und umgekehrt.

Ein anderes Pseudooktaëder zeigen Englische Krystalle (vergl. Fig. 5, Taf. IX), bei denen die Begränzung der einzelnen Individuen $y = (\infty a : b : \frac{3}{8} c)$ bildet, der Zwillingswinkel $y/\underline{y}$ beträgt hier 148° 46' 20".

Die *wiederholte Zwillingsbildung* kann zunächst, wie bei den Kammkieszwillingen, eine *mit parallelen Zwillingsebenen* seyn, die Kanten l/l erscheinen dann sägenartig eingeschnitten und wenn die Wiederholung sich nur in eingeschalteten Lamellen äufsert, so gilt dasselbe wie von den Kammkieszwillingen.

Von gröfserer Bedeutung ist hier die *wiederholte Zwillingsbildung mit geneigten Zwillingsebenen.* Meist sind es *Vierlinge*, indem sich an jedes der Zwillingsindividuen I und II ein neues III und IV anlegt. Zwischen III und IV bleibt bei idealer Ausbildung ein leerer Raum, welcher jedoch nicht zu sehen ist, da hier die Gruppe aufgewachsen ist. Denkt man sich die Individuen III und IV bis zu gegenseitiger Berührung ausgedehnt, so entsteht eine spitze Ecke (Fig. 1, Taf. X, die gestrichelten Linien). Der Vierling ist nun in Bezug auf die Zwillingsebene der Individuen I und II vollkommen symmetrisch, aber in Bezug auf die bei der Figur vertical gestellte Axe hemimorph, indem an jedem Ende der Axe ein anderes Oktaëder liegt, am oberen Ende ein stumpferes, am unteren ein spitzeres.

Sind die Vierlinge an der Basis aufgewachsen, so macht sich der leere Raum zwischen Individuum III und IV geltend. Dafs sich in diesen Raum kein neues Individuum vollständig einfügen kann, wurde schon bei den Kammkieszwillingen gezeigt. Es ist nun eine symmetrische Ausfüllung des Raumes, wie sie bei wiederholten Zwillingsbildungen häufig stattfindet, nur auf doppelte Art möglich.

1. Das neue Individuum V theilt sich mit demjenigen, mit welchem es sich nicht in Zwillingsstellung befindet, gewissermaafsen in den Raum, so dafs es bei idealer Ausbildung dasselbe in der Fortsetzung der Querfläche des I. Individuums schneidet (Fig. 5, Taf. IX).

Die Gruppe stellt dann einen *Fünfling* dar, welcher in Bezug auf die Querfläche des I. Individuums symmetrisch ist. Diese Symmetrie entspricht jedoch nicht der schon bei den Vierlingen ausgesprochenen pseudorhombischen. Ich selbst habe einen derartigen Fünfling nie beobachtet und es ist mir sehr wahrscheinlich, dafs die Figur desselben bei Mohs (l. c.) nur idealisirt ist.

2. Sowohl an Individuum III wie IV legt sich ein Zwillingsindividuum V und VI (Fig. 6, Taf. IX), diese Individuen theilen sich in den leeren Raum und treffen sich bei idealer Ausbildung in der Verlängerung der Zwil-

lingsebene von Individuum I und II. Auf diese Weise entsteht der dargestellte *Sechsling*, welcher in Bezug auf dieselbe Ebene, wie der Vierling, symmetrisch ist, sich also vollkommen der durch die Zwillingsbildung angebahnten Symmetrie fügt und dadurch schon eine theoretisch grofse Wahrscheinlichkeit hat.

Ein solcher Sechsling ist noch nicht beschrieben, wurde aber von mir bei Englischen Krystallen beobachtet. Es sind an demselben 5 Zwillingsecken und eine einspringende Ecke, in welcher die Kanten l/l 97° 17½′ bilden.

Noch einen andern Sechsling habe ich in der Berliner Sammlung gesehen. Bei demselben sind vier Individuen gleichmäfsig ausgebildet und der leere Raum ist von zwei kleinern ausgefüllt, von denen V gegen III und VI gegen V sich in Zwillingsstellung befindet (Fig. 7, Taf. IX). Nur in seltenen Fällen kann man die Wiederholung bis zum Fünfling und Sechsling beobachten, da gerade an der Stelle, wo der leere Raum ausgefüllt seyn müfste, andere Krystalle herausragen oder die Gruppe selbst aufgewachsen ist.

Wirkliche *Durchwachsungszwillinge* habe ich bei den Speerkiesen nicht beobachtet, mit Ausnahme der Drillinge (Fig. 4, Taf. X) aus Böhmen, welche als eine Folge der regelmäfsigen Verwachsung mit Eisenkies zu betrachten sind und deshalb erst später geschildert werden sollen. Dagegen kommen beim Subtypus III*a* eigenthümliche Bildungen vor, welche sich mit Durchwachsungen in Verbindung bringen lassen. Tafelförmige Speerkiese zeigen häufig auf der Endfläche kleinere Speerecken, welche meist als Drillinge ausgebildet sind (Fig. 8, Taf. IX) und so liegen, dafs die Kante l/l des mittleren Individuums nahezu senkrecht auf einer Zwillingskante der unterliegenden Gruppe steht und umgekehrt eine Kante l/l der letztern nahezu senkrecht auf einer Zwillingskante der aufliegenden. Dies Verhalten kann man auf folgende Weise erklären.

Das eine Individuum der aufliegenden gestrichelten Gruppe (Fig. 8, Taf. IX) hat die Lage des IV. Individuums

der unterliegenden Gruppe, dessen Kante l/l schneidet dann die Zwillingskante zwischen I und III unter einem Winkel von 82° 42½', und unter demselben Winkel schneiden die Zwillingskanten der aufliegenden Gruppe die Kanten l/l der unterliegenden, wie leicht aus der schematischen Figur zu ersehen ist, bei welcher 7 Individuen eine verschiedene Stellung haben. Bei dem Subtypus II*a* sind häufig zwillingsartig aufgelagerte und eingelagerte Individuen, so dafs die Speerspitzen nur untergeordnet auftreten, bei dem Subtypus III*b* bilden die Oktaëderflächen einspringende Zwillingsecken (Fig. 12, Taf. IX) und schliefslich der Subtypus III*c* zeigt knieförmige Zwillinge (Fig. 3, Taf. IX), bei denen auch an der Stelle der Speerspitze die Flächen des verticalen Prismas einspringende Winkel bilden können, wie es Hausmann's Fig. 29 (l. c.) darstellt.

Zwillinge nach dem II. Gesetz.

Das Hauptquerprisma g, dessen Flächennormalen Zwillingsaxen sind, hat in der a-Axe einen Winkel von 116° 20', die hierher gehörigen Zwillinge schliefsen sich somit den im rhombischen System so sehr verbreiteten an, bei welchen das Zwillingsprisma ein Prisma von nahezu 120° ist. Dieser Anschlufs ist jedoch ein mehr äufserlicher, da gerade die für derartige Zwillinge in Folge von Durchwachsung hervorgerufene hexagonale Pseudosymmetrie hier nicht zum Ausdruck gelangt; auch bei den isomorphen Mineralien, Arsenikkies und Glaukodot, gehört sie zu den Seltenheiten.

Einfache Zwillinge (Fig. 11, Taf. IX) habe ich an einer Freiberger Stufe beobachtet, welche mir Hr. Prof. A. Weisbach in Freiberg gütigst zur Ansicht gesendet hat. Die Krystalle gehören dem Subtypus III*b* an und man erhält den Zwilling durch Drehung der einen Hälfte des Krystalls gegen die andere um die Normale einer Fläche g. Die Endflächen bilden dann auf der einen Seite ein-, auf der andern ausspringende Winkel von 116° 20', unter

welchem Winkel natürlich auch die Kanten des Längsprismas in der Längsfläche zusammenstofsen. Häufig gehen die einfachen Aneinanderwachsungen durch Ineinanderwachsungen in Durchwachsungen über.

Die vorherrschende Neigung zur Zwillingsbildung nach dem I. Gesetz zeigt sich auch hier darin, dafs sich an eines der beiden Individuen oder an beide Zwillingsindividuen nach dem I. Gesetz anlegen, also *Doppelzwillinge* entstehen.

Eine vollkommen symmetrische Vierlingsgruppe zeichnet Mohs Fig. 61 (l. c.), je zwei Individuen sind hier nach dem I., je zwei nach dem II. Gesetz verwachsen und je zwei haben gegen einander keine Zwillingsstellung. Von diesen letztern fallen die Flächen des Längsprismas $(\infty a : b : \frac{1}{2} c) = 102$ nahezu in eine Ebene, genau in eine Ebene würden die Flächen des Längsprismas fallen, dessen Flächen in der Hauptaxe c 114° 32′ bilden, gegen 116° 21′ bei 102, die Normale auf der gemeinschaftlichen Ebene schneidet die Axen $b : c = 1 : 1,2605 = 1 : \frac{5}{4}$. Die einspringende Kante zwischen den beiden Basen hat bei beiden Individuen die Lage 4,8429 $a : b$, oder abgerundet $5a : b$. Die Ebene also, mit welcher die beiden Individuen verwachsen sind, mufs nahezu durch die Linien $b : \frac{5}{4} c$ und $5a : b$ gehen, kommt also der Oktaëderfläche $(5a : b : \frac{5}{4} c) = (a : \frac{1}{5} b : \frac{1}{4} c) = 514$ sehr nahe. Die beiden Individuen, welche weder nach dem I. noch II. Gesetz zwillingsartig verwachsen sind, stehen demnach ungefähr in Zwillingsstellung nach einem neuen Gesetz, welches sich ausdrücken läfst, Zwillingsaxe der Normale einer Oktaëderfläche 514. Mithin wird hier, wie bei andern Doppelzwillingen ein neues Zwillingsgesetz wenigstens annähernd hervorgerufen.

Fig. 12, Taf. IX stellt gleichfalls einen symmetrischen Doppelzwilling dar, bei welchem die nach dem II. Gesetz verbundenen Individuen die Anfangsindividuen eines Drillings nach dem I. Gesetz sind, so dafs die Gruppe 6 Individuen in verschiedener Stellung aufzuweisen hat. Alle

derartige Doppelzwillinge kommen auch in Durchwachsungen vor.

Die schon oben beschriebenen Englischen Speerkieszwillinge mit dem Längsprisma *y* zeigen öfters Doppelzwillinge, bei ihnen kann man deutlich wahrnehmen, wie die Flächen des Längsprismas der nicht in Zwillingsstellung befindlichen Individuen nahezu in eine Ebene fallen. Daneben kommen auch Durchwachsungen vor, welche sich auf kein Zwillingsgesetz beziehen lassen, äufserlich aber den Doppelzwillingen sehr ähnlich sind, so dafs man sich vor Verwechselungen hüten mufs.

4. Krystallotektonik.

Die *Gestalt der Subindividuen* bietet wenig Mannigfaltigkeit dar, sie läfst sich nur an den Flächenzeichnungen bestimmen, da die Aetzversuche keine guten Resultate lieferten. Besonders charakteristisch für die Subindividuen ist die *Zone der a-Axe.* In dieser Zone findet eine starke Flächenentwickelung statt und neben den bestimmten Längsprismen treten auch vicinale auf. Durch die Intermittenz erscheinen sowohl die Längsprismen, als auch die Endfläche vielfach gewölbt und gestreift, so dafs verschiedene componirte Längsprismen zur Erscheinung kommen, deren weitere Bestimmung natürlich keinen Werth hat. Die Streifen sind mehr oder weniger regelmäfsig, häufig abgebrochen, theilweise auch hypoparallel. Sie sind seitlich begrenzt von Prismen- oder Oktaëderflächen aus der Zone der Oktaëderkante *ab*, zuweilen auch von Querprismen.

Bei den Schemnitzer Krystallen tritt noch als eine zweite tektonische Zonenaxe die Kante *ab* des Oktaëders hervor, indem die Prismenflächen *m* parallel der Combinationskante mit dem Oktaëder gestreift, durch Flächenwölbungen in die Oktaëderflächen übergehen. Diese tektonische Zone kann man auch bei Speerkiesen beobachten. Der *Schalenbau* tritt sehr deutlich auf der Endfläche und den Flächen des Längsprismas auf. Im ersteren Falle sieht man parallel den Kanten *l*/*l* treppenförmige Absätze, welche

zum Theil scharf abgränzen, zum Theil durch die Streifen mehr zurücktreten. Den Schalenbau nach den Längsflächen *l* zeigen besonders die nur von solchen Flächen begränzten Speerspitzen. Unvollständige Bedeckung der Kanten bewirkt Kerbung derselben, wie ich sie beim Diamant[1]) geschildert habe, oder verschiedenartige Zeichnungen. Findet eine hypoparallele Auflagerung von Schalen statt, so nimmt die Speerspitze eine andere Form an, sie wird spitzer und ihre Kanten erscheinen zuweilen gewölbt (Fig. 4*a*, Taf. X). An solchen Speerspitzen, welche am Ende einspringende Ecken, von Oktaëderflächen gebildet, haben, kann man auf letztern zuweilen Absätze parallel den Kanten mit *l* beobachten, die sich durch übereinanderliegende Hüllen erklären.

Durch den Schalenbau kommen auch die ***tektonischen Axen*** besonders bei gewissen Speerkiesen zum Vorschein. Geht man von einem einfachen Zwilling aus, gebildet von den Flächen $l\,l\,\underline{l}\,\underline{l}$, welcher nach unten von der Endfläche und der der Zwillingsebene parallelen Prismenfläche *m* begrenzt ist, so zeigt dieser häufig skelettartige Bildungen, ganz ähnlich denjenigen beim Oktaëder des Bleiglanzes[2]) in Combination mit dem Hexaëder. Auf die Pseudo-Oktaëderflächen legen sich Schalen, welche von der obern Ecke ausgehend sich längs den Kanten hinziehen, den mittlern Theil der Flächen *l* freilassen und ebenso die untern Ecken. Durch Auflagerung einer ganzen Anzahl solcher Schalen, welche sich nicht zu rasch nach oben verjüngen, erhält der Krystall eine starke Ausdehnung in der Richtung der Hauptaxe des Pseudooktaëders, also nach der in der Zwillingsebene liegenden Zwischenaxe *a*/*b* parallel. Es entstehen auf diese Weise die eigenthümlichen kreuzförmigen Gestalten, welche die Fig. 5 Bernhardi's (l. c.) darstellt und die den Doppelzwillingen des Harmotom von Andreasberg sehr ähnlich sehen. Die

1) Abh. der Kgl. Akad. d. Wissensch. in Berlin 1876.

2) A. Sadebeck, angewandte Krystallographie, Berlin 1876, Fig. 178.

einspringenden verticalen Kanten bilden die der Zwillingsebene parallelen Prismenflächen *m* und die Endfläche, diese verticalen Flächen sind in Folge der Intermittenz vielfach unterbrochen und gewölbt. Basis und Zwillingsebene erscheinen hier als tektonische Ebenen, als welche sie auch häufig sowohl am ausgebildeten Ende, als auch an durchbrochenen Krystallen zu erkennen sind. Am ausgebildeten Ende zeigen einige Speerkieszwillinge, z. B. von Misdroy statt der einfachen oktaëdrischen Ecke eine abgestumpfte Ecke. Diese Abstumpfung besteht aus vier gewölbten Flächen, welche an der Zwillingsgränze und senkrecht dagegen, also parallel der wirklichen Basis, flache einspringende Winkel bilden, da die Wölbung über den Mitten der Flächen *l* am stärksten ist. Oktaëder und Prisma in Intermittenz rufen diese gewölbten Flächen hervor. An dem verbrochenen Ende Böhmischer Zwillinge habe ich gleichfalls in der Richtung der Zwillingsebene und Basis Nähte beobachtet. Schleift man aber einen solchen Krystall an, so kann man nur noch die Zwillingsgränze an dem verschiedenen Glanz der an ihr zusammenstoſsenden Individuen erkennen. Dies ist die Folge davon, daſs gegen die Zwillingsebene die Subindividuen eine verschiedene, gegen die Basis eine gleiche Stellung haben.

Die den Stamm an der Zwillingsgränze bildenden Subindividuen sind Zwillinge, was man nicht bloſs an der Streifung auf der Basis erkennt, sondern auch an der Ausbildung, indem es häufig knieförmige Zwillinge wie Fig. 3, Taf. IX sind. Einzelne der Subindividuen gewinnen auch mehr Selbstständigkeit und ragen aus den übrigen heraus.

Die Kreuzform ist immer eine derartige, daſs die Krystalle parallel der Basis mehr ausgedehnt sind, als parallel der Zwillingsebene, so daſs beiderseits von dem Hauptbalken gröſsere Theile der Basis sichtbar werden. Auf diesen kann man dann zuweilen noch die der *b*-Axe entsprechende Richtung durch parallele oder hypoparallele Balken ausgedrückt sehen, wodurch sich diese Axe auch als tektonische Axe geltend macht. Die Balken selbst

sind häufig unregelmäfsig, wulstig, eine Erscheinung, welche ich auch beim Bleiglanz beobachtet habe und die als die Folge einer ungleichmäfsigen Einigung der Subindividuen zu betrachten ist.

Es fallen beim Markasit, wie bei andern Mineralien, die Axen der tektonischen Hauptzonen mit den tektonischen Axen zusammen.

Sind Vierlinge in der Richtung der Zwillingsebene von Individuum I und II aufgewachsen, so erkennt man häufig Balkensysteme nach allen drei Zwillingsebenen (Fig. 1, Taf. X). Das verticale Balkensystem ist auch hier am meisten ausgebildet, die seitlichen sind kleiner und wiederholen sich öfters parallel. Die verticalen Prismenflächen, welche bei den oben beschriebenen Skelettbildungen die seitliche Begränzung bildeten, fallen hier fort, an ihrer Stelle liegen die untern Flächen *l*, so dafs die seitliche Begränzung nur von Zwillingsecken gebildet wird, welche sägenartig übereinander liegend verticale Scheinflächen darstellen. Die Figur zeigt zugleich, wie beiderseits vom Hauptbalken, also an der Zwillingsebene, die Individuen verschieden ausgebildet sind, rechts ziemlich regelmäfsig entwickelt mit einem schmalen Balken an der Zwillingsgränze von Individuum I und IV, links dagegen mehrere dicke Balken, entsprechend der Zwillingsebene zwischen II und III. Diese seitlichen Balken verjüngen sich nach dem Hauptbalken hin.

Bei den tafelförmigen Englischen Verwachsungen, welche nach keiner Zwillingsebene eine vorherrschende Ausdehnung haben, sind hervorragende Balken nur dann zu sehen, wenn es Doppelzwillinge sind. Wulstartige Hervorragungen treten an der Zwillingsgränze derjenigen Individuen auf, an welche sich zwei Individuen nach verschiedenen Gesetzen anlegen, die also gewissermaafsen einer doppelten Attraction unterworfen sind. Auf diese Weise kann man hier wirkliche Doppelzwillinge von unregelmäfsigen Verwachsungen unterscheiden.

Die *Kammkiese* zeigen keine eigentlichen Skelettbildungen, lassen aber auch tektonische Ebenen und Axen erkennen. Zunächst spielt bei den Zwillingen die Zwillingsebene wieder eine Hauptrolle, indem die Zwillinge an dem einen Ende derselben aufgewachsen sich in der Richtung derselben ausdehnen, wie es bei den schon beschriebenen Zwillingen (Fig. 9, Taf. IX und Fig. 2, Taf. X) der Fall ist. Die Kammbildung ist aber nicht an die Zwillingsbildung gebunden, sie kommt auch bei einfachen Krystallen vor, in der Art, dafs sich eine ganze Anzahl von Individuen parallel einer Prismenfläche aneinander legt, so dafs die am Ende liegenden Prismenflächen mit dieser einspringende Winkel bilden, wenn sich die Individuen nach der Ansatzstelle hin verjüngen, oder sägenartige Bildungen, wenn die Prismenkanten in gleicher oder nahezu gleicher Höhe liegen (Hausmann Fig. 25*a*, l. c.) Auch hier ist der *Hypoparallelismus* häufig und zwar zunächst in der Art, dafs die verticalen Prismenflächen der einzelnen Individuen etwas gegen einander geneigt sind, die Endflächen parallel bleiben (Hausmann Fig. 25*c*, l. c.), der Hypoparallelismus ist also ein *partieller*, seine Axe die Hauptaxe. Das Resultat sind hahnenkammartige Gruppirungen, wie sie z. B. beim Kammkies von Clausthal häufig vorkommen. Diese Art der hypoparallelen Verwachsung hat mit den Zwillingen nach dem I. Gesetz das gemeinsam, dafs die Hauptaxen der Individuen parallel sind.

Bei den Krystallen nach dem Subtypus II*a* ist die Axe des Hypoparallelismus die *b*-Axe, um sie blättern sich die Individuen beiderseitig auf, wodurch garbenförmige Gebilde entstehen, ganz ähnlich wie beim Desmin. Die gemeinsame *b*-Axe haben diese Gruppirungen mit den Zwillingen nach dem II. Gesetz gemeinsam.

So treten die beiden Arten des Hypoparallelismus in eine interessante Beziehung zu den Zwillingsbildungen, indem in beiden Fällen die Zwillingsstellungen in den Bereich der hypoparallelen Stellungen hineinfallen.

Der partielle Hypoparallelismus ist durch vielfache Uebergänge mit dem *totalen* verbunden, hierher gehören eigenthümliche Gruppirungen mit hypoparallelen Basen, welche aufserordentliche Aehnlichkeit mit den bekannten Eisenrosen der Schweiz haben. Bei Felsöbanya kommen derartige Gebilde als Pseudomorphosen nach Kalkspath vor.

Andere Verwachsungen, bei denen eine Gesetzmäfsigkeit mehr und mehr zurücktritt, haben *stalaktitische* Bildungen zur Folge. Die Schemnitzer Krystalle setzen Röhren zusammen, welche im Innern häufig hohl sind. Die Hauptaxen der einzelnen Individuen divergiren von der Centralaxe der Röhren aus und die Individuen begränzen sich mit Druckflächen in der Art, dafs sie sich nach dem Centrum hin verjüngen, es ist also eine deutliche Radialordnung, wie sie überhaupt bei derartigen Gebilden Regel ist. Henkel[1]) nennt dieselben *Pyrites fistulosus* (Taf. X) und wenn die Radialordnung von einem Centrum ausgeht, so dafs Kugeln entstehen, *Pyrites globulosus*: Interessant ist es, dafs er auf Taf. XII ganz richtig die einzelnen Individuen derartiger Gruppen oben von Krystallflächen, unten von Druckflächen begränzt zeichnet. Die hierher gehörigen mannigfaltigen, nierförmigen Gestalten haben kein weiteres krystallographisches Interesse.

Zum Schlufs müssen noch andere *unregelmäfsige Verwachsungen* erwähnt werden, welche ich bei tafelförmigen Speerkieszwillingen aus England beobachtet habe. Die Krystalle durchdringen sich oder verwachsen einfach unter Winkeln, welche einem rechten nahe stehen. Verwachsen auf diese Weise 3 Krystalle, so entstehen trichterförmige Gruppen. Dadurch, dafs sich derartige Verwachsungen durchdringen und die einzelnen Krystalle wieder parallele oder wenig hypoparallele haben, bilden sich Gruppen mit netzartigem Aussehen im Querschnitt. Derartige Gebilde, besonders die trichterförmigen, haben ein so regelmäfsiges Aussehen, dafs ich lange glaubte, es läge ihnen ein

1) Pyritologia oder Kieshistorie. Leipzig 1754.

bestimmtes Gesetz, vielleicht neues Zwillingsgesetz zu Grunde.

Die genauere Betrachtung lehrt jedoch, dafs die einzelnen Individuen in Bezug auf ihre seitliche Begränzung ganz verschiedene Stellungen haben. Die oben beschriebenen Doppelzwillinge, welche auf derselben Stufe auftreten, sind sogleich an den schon erwähnten Wülsten, sowie an dem Winkel zu unterscheiden, unter welchem sich die Tafeln schneiden. Ferner kommen noch in Derbyshire Verwachsungen vor, welche auf den ersten Blick an Doppelzwillinge erinnern, da sich die Individuen unter ungefähr 120° schneiden. Wiederholte Messungen haben jedoch gezeigt, dafs keine Constanz in den Winkeln vorhanden ist.

Beziehungen zwischen den Formen des Markasits und Eisenkieses.

Da der Markasit im rhombischen System, der Eisenkies dagegen regulär pyritoëdrisch krystallisirt, können die rein krystallographischen Beziehungen sich nur auf Pseudosymmetrieen und gewisse Analogien in den Winkeln erstrecken. Bei der Betrachtung der Formen des Markasits wurde darauf hingewiesen, dafs einzelne Krystalle eine reguläre Pseudosymmetrie haben, nämlich die von Schemnitz in Ungarn grofse Aehnlichkeit mit der regulären Combination von Oktaëder, Dodekaëder und Hexaëder. Diese Pseudosymmetrie giebt sich als solche sofort zu erkennen, indem nur die eine Hexaëderfläche (Endfläche des Markasits) ausgebildet ist, die andere, Querfläche und Längsfläche dagegen nicht auftreten. Ferner weichen die Winkel dieser Form sehr bedeutend von den betreffenden im regulären System ab. Dies sieht man schon daraus, dafs gerade die Flächen am Ende, welche in der Lage den Dodekaëderflächen entsprechen, die Flächen des Hauptquerprismas *g* und Hauptlängsprismas *l* für sich ein Oblongoktaëder bilden, dessen Endkantenwinkel 109° 24', also dem Winkel des regulären Oktaëders nahe steht, die Winkel des Pseudooktaëders selbst nur in der vordern Endkante von 113° 54' sich dem

Winkel des regulären Oktaëders nähern. Der Winkel m/l 118° 12′ weicht allerdings nicht allzu sehr von 120° ab, während andere Winkel keine Vergleichung gestatten. Von dem Oblongoktaëder g, l sind auch die Endkantenwinkel beträchtlich von den Winkeln des regulären Oktaëders verschieden, so dafs sich die Pseudosymmetrie auf den Seitenkantenwinkel beschränkt.

Eine andere Pseudosymmetrie könnte man in der Speerspitze $l l \underline{l} \underline{l}$ mit dem regulären Oktaëder finden, aber auch hier stimmen die Winkel sehr schlecht. Aeufserlich ist in Folge des Aufbaues die bedeutende Winkeldifferenz zuweilen so wenig auffallend, dafs man sich vor Verwechselung hüten mufs. Weitere Pseudosymmetrieen können wohl hier und da noch zur Erscheinung kommen, sind jedoch für die Vergleichung der Formen beider Mineralien ohne Belang.

Winkelähnlichkeiten aufzufinden hat sich Alb. Müller[1]) bemüht, er stellt einander gegenüber:

m/m = 106° 36′ und den Grundkantenwinkel von $(a : \infty a : \frac{3}{4} a)$ = 106° 16′
l/l = 98° 14′ und den Grundkantenwinkel von $(a : \infty a : \frac{5}{6} a)$ = 100° 23′
man könnte noch hinzufügen:
r/r = 145° 42′ und den Grundkantenwinkel von $(a : \infty a : \frac{1}{3} a)$ = 143° 8′
y/y = 127° 28′ und den Grundkantenwinkel von $(a : \infty a : \frac{1}{2} a)$ = 126° 52′,

dagegen ist der Vergleich von g/g mit $(a : \infty a : \frac{5}{8} a)$ und v/v mit $(a : \infty a : \frac{2}{5} a)$ schon sehr gesucht, da diese Formen beim Eisenkies nicht vorkommen.

Wie wenig auf diese Winkelähnlichkeiten zu geben ist, geht daraus hervor, dafs gerade die Flächen g und l, welche man auf das reguläre Oktaëder beziehen könnte, nach Müller mit Flächen von Pentagondodekaëdern zu

1) Ueber eine Eisenkiesdruse von Britzwyl im Canton Basel, Verh. der naturf. Ges. in Basel IX, 37 u. 38.

vergleichen sind und letztere demnach Pentagondodekaëdern in verschiedener Stellung angehören müfsten, wie sie beim Eisenkies so überaus selten sind.

Fragt man sich nun, woher es kommt, dafs bei den seltenen Pseudosymmetrieen und geringen Winkelähnlichkeiten frühere Autoren, wie Bernhardi und Hausmann, obgleich ihnen die von Haüy angeregte Trennung des Markasits von Eisenkies bekannt war, doch den Unterschied nicht anerkennen wollten, so läfst sich die Antwort leicht mit Berücksichtigung der Krystallotektonik finden.

Schon oben wurde hervorgehoben, dafs die skelettartigen Speerkieszwillinge kreuzförmige Gestalten bilden. Ganz ähnliche Bildungen zeigt der Eisenkies von Grofs-Almerode in Hessen, die Oktaëderflächen entsprechen den Flächen *l*, die verticalen Prismenflächen und die Basis den Hexaëderflächen. Die Krystalle sind in der Richtung einer Grundaxe pseudoquadratisch und indem der verticale Aufbau vornehmlich in den Ebenen der Grundaxen vor sich ging, bleiben die an den Endpunkten der rhombischen Zwischenaxen liegenden Kanten in der Entwickelung zurück, so dafs hier die prismatisch ausgebildeten Hexaëderflächen einspringende Winkel bilden. Durch den Schalenbau können zur Vervollständigung der Aehnlichkeit mit Markasitskeletten noch an Stelle der Oktaëderkanten einspringende Winkel entstehen, sowie durch Hypoparallelismus die wahren Winkel äufserlich verdeckt werden und die Krystalle viel spitzer erscheinen, als sie es in Wirklichkeit sind, wie es auch bei den gleichen Bildungen des Silberglanzes der Fall ist. Wären beim Eisenkies die Flächen des Pentagondodekaëders $(a : \infty a : \frac{3}{4} a)$ an den seitlichen Endkanten des Oktaëders entwickelt, so würden sie nahezu dieselbe Lage haben, wie an der Speerspitze die Längsflächen, da ihr Grundkantenwinkel 106° 16′ beträgt, die Längsflächen beim Markasit aber an der Zwillingsgränze 105° 5′ bilden. Bemerkenswerth jedoch ist die Winkelähnlichkeit, welche in der Zone der verticalen Axe hervortritt, die bei beiden Mineralien tektonische Zonenaxe ist,

wie sich aus der ihr parallelen Streifung ergiebt. In dieser Zone bilden beim Eisenkies die Flächen des Pentagondodekaëders ($a : \infty a : \frac{1}{2}$) 126° 52′ in den Grundkanten, es sind ihnen also nahezu parallel die verticalen Oktaëderflächen, deren Seitenkantenwinkel 127° 32′ beträgt.

Im Innern zeigen die Eisenkiesskelette eine eigenthümliche Structur, von der ich beim Markasit nichts habe wahrnehmen können. Schleift man quer gegen die stark ausgedehnte Grundaxe einen Eisenkies an, so zeigt die Schliffläche eine mehr oder minder deutliche Radialstructur. Die Strahlen gehen zunächst vom Centrum in der Richtung der Grundaxen, von hier aus werden sie nach den rhombischen Zwischenaxen hin kleiner und hypoparallel, so dafs schliefslich die kleinsten Strahlen in den rhombischen Zwischenaxen selbst liegen. Tritt gegen diesen strahligen Bau der schalige Bau auf den Oktëaderflächen mehr und mehr zurück, so entsteht schliefslich eine Hülle um das Skelett, welche mit einer glaskopf- und nierenförmigen Oberfläche die ursprüngliche Gestalt nur in allgemeinen Umrissen erkennen läfst. Hausmann zeichnet Fig. 41 (l. c.) ein derartiges Gebilde, aus welchem die Oktaëderecke frei herausragt, seine Fig. 40 zeigt am Ende eine Hexaëderfläche, auf welcher wie beim Markasit Kanten nach den tektonischen Hauptebenen (den verticalen Hexaëderflächen) und Hüllenbau zu sehen ist. Hier steht also eine einheitliche Fläche vier sich in einer einspringenden Ecke schneidenden Flächen des Markasits gegenüber. Auf eine weitere Beschreibung dieser Eisenkiese kann ich hier verzichten, da nach Hausmann noch Köhler[1]) dieselben ausführlich bearbeitet hat.

Die Beziehungen zwischen den Formen des Markasits und Eisenkieses sind im wesentlichen krystallotektonische. Beide Mineralien stimmen darin überein, dafs einzelne ihrer Typen zwei vorherrschende, auf einander senkrechte Ebenen haben, in denen der Aufbau vorzugsweise stattfindet, es

1) Pogg. Ann. Bd. 14, S. 51.

entsprechen hierbei die Zwillingsebene und Basis des Markasits zwei Hexaëderflächen.

Diese krystallotektonischen Beziehungen ändern sich, wenn bei den Markasiten nicht mehr die in der Zwillingsebene liegende Zwischenaxe tektonische Hauptaxe ist, sondern die Hauptaxe *c* und die Krystalle an einem Ende derselben aufgewachsen sind. Dann erscheint die Nebenaxe *a* als zweite tektonische Axe, so dafs die Kante *l*/*l* einer Oktaëderkante entspricht.

Diese Beziehungen in der Tektonik der Mineralien bethätigen sich aufs unzweideutigste in den regelmäfsigen Verwachsungen der beiden Mineralien.

Regelmäfsige Verwachsungen von Markasit und Eisenkies.

Markasit und Eisenkies kommen nach zwei Gesetzen regelmäfsig verwachsen vor. Das I. Gesetz lautet: die Hauptaxe *c* und eine Zwischenaxe (*a b*) des Markasits fallen mit zwei Grundaxen des Eisenkieses zusammen; das II. Gesetz: die Hauptaxe *c* des Markasits fällt mit einer Grundaxe des Eisenkieses, die Nebenaxe *a* mit einer prismatischen Zwischenaxe zusammen.

Bei beiden Gesetzen liegt also die Hauptaxe des Markasits wie eine Grundaxe des Eisenkieses, die Endfläche und eine Hexaëderfläche sind mithin parallel. Bei dem I. Gesetz liegen in der gemeinsamen Fläche die andern Grundaxen des Eisenkieses, wie eine Zwischenaxe *ab* des Markasits und die darauf senkrechte Linie, die Nebenaxen *a* und *b* theilen den Winkel dieser auf einander senkrechten Axen im Verhältnifs von 52° 32′ und 37° 28′. Bei dem II. Gesetz kreuzen die Grundaxen des Eisenkieses die Nebenaxen des Markasits unter 45°, der Markasit ist also gewissermaafsen gegen das I. Gesetz um 7° 32′ in der Hauptaxe gedreht.

Allgemein lassen sich beide Gesetze so zusammenfassen; die Hauptaxe des Markasits fällt mit einer Grundaxe des Eisenkieses zusammen, die andern Grundaxen mit Zwischen-

axen des Markasits oder umgekehrt die Nebenaxen des Markasits mit prismatischen Zwischenaxen des Eisenkieses.

I. Verwachsungsgesetz.

Dieses Gesetz kommt sehr schön bei Böhmischen Speerkieszwillingen vor und zwar in der Weise, dafs der Eisenkies auf dem Markasit aufgewachsen ist (Fig. 3, Taf. X). Es sind dann zwei Hexaëderflächen mit der Basis und Zwillingsebene des Markasits parallel, die dritte Hexaëderfläche liegt gegen den Markasit nicht krystallonomisch.

Die krystallographischen Beziehungen der beiderlei Krystalle wurden schon oben beim Vergleich der skelettartigen Speerkieszwillinge mit den äufserlich ähnlichen kreuzförmigen Krystallen von Grofs-Almerode erörtert. Hier sey nur noch hervorgehoben, dafs die Oktaëderkanten des Eisenkieses mit den Kanten *l*/*l* in einer Ebene liegend einen Winkel von 7° 32′ bilden, in der Art, dafs die letztern Kanten nach aufsen verlaufen. Dieser Winkel läfst sich in vielen Fällen mit Sicherheit constatiren, zuweilen aber tritt er weniger hervor, indem die Eisenkieskrystalle häufig hypoparallel aufgelagert sind. In Folge des Hypoparallelismus können einzelne Eisenkiese die Stellung einnehmen, welche ihnen nach dem II. Gesetz gebühren würde, der Hypoparallelismus kann aber auch über 7° 32′ hinausgehen und ich habe sogar Fälle beobachtet, dafs die Hexaëderflächen des Eisenkieses gegeneinander bis 90° gedreht waren, also die Stellung hatten, welche zwillingsartig verbundenen Individuen nach dem Gesetz „Zwillingsaxe eine prismatische Axe" zukommt. Diese Stellung liefs sich leicht daran erkennen, dafs die Streifen auf den beiderlei Individuen 90° miteinander bildeten. Man hat es hier meist mit partiellem Hypoparallelismus zu thun, was dadurch hervortritt, dafs sämmtliche Hexaëderflächen gleichzeitig einspiegeln, die Axe des Hypoparallelismus ist natürlich die Grundaxe, welche mit der Hauptaxe des Markasits zusammenfällt. In einzelnen Fällen jedoch ist der Hypoparallelismus ein totaler, die Hexaëderflächen des Eisen-

kieses sind dann nicht mehr genau parallel der Basis des Markasits und weichen auch untereinander vom Parallelismus ab. Diese Erscheinung des Hypoparallelismus ist in ähnlicher Weise auch bei andern regelmäſsigen Verwachsungen beobachtet, z. B. bei den von G. vom Rath[1]) beschriebenen Paramorphosen von Rutil nach Arkansit. Im vorliegenden Falle hat sie um so weniger auffallendes, als die Betrachtung der Krystallotektonik des Markasits gelehrt hat, daſs auch bei diesem die Subindividuen vielfach hypoparallel geeinigt sind.

Die Anordnung der Eisenkiese auf dem Markasit ist zuweilen eine gewissermaaſsen geordnete, die Eisenkiese bedecken vornehmlich die Basis und sind parallel der Zwillingsebene stabförmig aneinandergereiht, wie die Subindividuen beim Markasit. Ferner kann man auch mitunter eine Anordnung auf der Basis und den *l*-Flächen parallel der Kante *l*/*l* beobachten, diese Kante selbst bleibt dann aber meist frei. Bei den Vierlingen herrscht auch die Verticalrichtung in der Anordnung vor, daneben erkennt man aber deutlich eine solche nach den beiden andern Zwillingsebenen. Auf jedem Individuum des Markasits liegen dann die Eisenkiese nach zwei Richtungen, zwischen denen sich die Lage befindet, welche den Eisenkiesen nach dem II. Gesetz zukommt. Wenn hierbei die Eisenkiese auch hypoparallel gestellt sind, so lassen sie sich doch meist auf eine der beiden Richtungen beziehen. Berühren sich die einzelnen Eisenkiesreihen und werden wieder von neuen Eisenkiesen überlagert, so erscheint der Markasit vollkommen umrindet, ganz in ähnlicher Weise, wie es bei den Fahlerzkrystallen von der Zilla bei Clausthal[2]) der Fall ist, welche mit einer Rinde von Kupferkies bedeckt sind. Ebensowenig wie bei diesen ist hier an Umwandlung der unterliegenden Substanz zu denken, da man die Hülle einfach abheben kann. Zwischen den Eisenkiesen treten zuweilen noch Subindividuen des Markasits hervor, welche auch theilweise wieder den Eisenkies be-

1) Pogg. Ann. Bd. 158 und neues Jahrb. f. Mineral. etc. 1875.

2) A. Sadebeck, Zeitschr. d. D. geol. Ges. 24, S. 427.

decken. Dies kann man leicht aus einer abwechselnden Bildung von Markasit und Eisenkies erklären, eine gleichzeitige Bildung beider Mineralien anzunehmen liegt hier kein zwingender Grund vor.

Da die Eisenkiese gegen den Markasit dieselbe Lage haben, wie die Eisenkies-Skelette von Groſs-Almerode gegen die Speerkies-Skelette, wenn man die beiderseitigen tektonischen Hauptebenen zusammenfallen läſst, so geht daraus hervor, daſs für die Art der Verwachsung die gleiche Tektonik ein ebenso einfacher wie natürlicher Grund ist.

Die nahezu gleichen Winkel der Seitenkanten des Oktaëders *h* und des Pentagondodekaëders ($a : \infty a : \frac{1}{2}a$) in der Verticalzone müssen als nebensächlich betrachtet werden, da diese Flächen nur selten vorkommen und, wenn sie auftreten, nur untergeordnet. Daſs man in ihnen keinen Grund für die Art der Verwachsung suchen kann, zeigt recht deutlich eine 2. Art der Verwachsung nach dem I. Gesetz, welche ich auf einer Freiberger Stufe des Berliner Museums beobachtet habe (Fig. 6, Taf. X). Diese Verwachsung stellt den umgekehrten Fall dar, daſs der Markasit auf dem Eisenkies aufgewachsen ist. Aus Hexaëdern desselben ragen Markasitzwillinge heraus, welche einfachen Oktaëderzwillingen des regulären Systems ähnlich sehen, indem die Individuen die Combination des verticalen Prismas *m* und Längsprismas *l* darstellen. Durch parallele Wiederholung tritt zuweilen Kammkiesbildung hervor.

Theoretisch sind zwölf verschiedene Stellungen der Markasitzwillinge möglich, da sich dieselben auf jede Hexaëderfläche mit der Zwillingsebene in vier Stellungen auflegen können, von denen je zwei mit ihren ein- und ausspringenden Winkeln umgekehrt liegen. Die Figur stellt drei Zwillinge dar, deren Zwillingsebenen den drei Hexaëderflächen parallel sind.

Aehnlicher Art scheinen die von Kenngott l. c. beschriebenen Verwachsungen von Tavistock in Devonshire zu seyn, für welche er jedoch kein Verwachsungsgesetz

angiebt; ein Unterschied liegt darin, dafs die Markasite nicht Kammkiese, sondern Speerkiese sind.

Kenngott glaubt hier eine gleichzeitige Bildung annehmen zu müssen, was mir jedoch nicht nothwendig zu seyn scheint, da eine abwechselnde Bildung die Erscheinung erklärt, dafs aus den Hexaëderflächen die Markasite herausragen. Man braucht sich nur zu denken, dafs auf einem fertigen Hexaëder von Eisenkies sich Markasite bilden, dann um das Hexaëder eine Hülle von Eisenkies entstand, welche die Markasite umgab, so dafs bei weitergehender Bildung schliefslich die Markasite als Einschlufs im Eisenkies liegen. Während bei den zuerst beschriebenen Verwachsungen die Richtungen der Zonen, in denen die oben erwähnten Winkelähnlichkeiten auftreten, stark entwickelt sind, wenn auch die betreffenden Flächen selbst nur sehr selten, so treten bei diesem zweiten Fall der Verwachsung diese Zonen nicht besonders hervor und die betreffenden Flächen sind nicht vorhanden, so dafs von einem Einflufs dieser Winkelähnlichkeit auf die Art und Weise der Verwachsung nicht die Rede seyn kann.

II. Gesetz der regelmäfsigen Verwachsungen.

Diese zweite Art der regelmäfsigen Verwachsungen ist am deutlichsten bei den Fig. 4, Taf. X abgebildeten Krystallgruppen von Littwitz in Böhmen. Als Kern treten hier meistentheils Eisenkies-Oktaëder mit abgestumpften Ecken auf, als Umhüllung Markasit, jedoch kann auch der Eisenkies nur auf dem Markasit aufsitzen oder es kann der Eisenkies gewissermaafsen in den Markasit eingekeilt seyn. Im Gegensatz zu den vorigen Verwachsungen sind hier die Markasite so aufgewachsen, dafs die Hauptaxe *c* vertical steht.

Die Fig. 4 stellt den einfachsten Fall der Verwachsung dar. Zwei einander gegenüberliegende Oktaëderflächen sind mit den Flächen *l* des Markasits bedeckt, welche nach oben mit der Basis abschliefsen. Die Basis tritt nicht ganz an die Hexaëderfläche heran, sondern läfst

schmale Säume der Oktaëderflächen frei, so dafs der Parallelismus der Kanten *o* / *a*, *o* / *p* und *p* / *l* deutlich sichtbar ist. Man erkennt auch leicht schon bei einfacher Betrachtung der Gruppen, dafs die Flächen *l* gegen die Basis weniger geneigt sind, als die Oktaëderflächen, der erstere Winkel beträgt 129° 1′, der letztere 125° 16′.

Mit dieser Verwachsung hängt noch eine eigenthümliche Art der wiederholten Zwillingsbildung zusammen, die seitliche Begränzung der Flächen *l* des gegen den Eisenkies orientirten Individuums wird nämlich lediglich von zwillingsartig angefügten Flächen *l* gebildet, so dafs die Gruppe vier in die Basis und Ecken des Oktaëders fallende Speerspitzen trägt. Da je zwei einander gegenüberliegende Markasittheile eine gleiche Lage haben, was in der Figur an den römischen Zahlen zu erkennen ist, so stellt das Ganze einen Durchwachsungsdrilling dar, wie er beim Markasit für sich nicht beobachtet ist. Die Kanten *l* / *l* der beiden Zwillingsindividuen weichen in der Lage sehr beträchtlich von den Oktaëderkanten ab, mit welchen sie einen Winkel von 15° 5′ bilden, so dafs sich die Kanten der Individuen II und III, welche gegen einander keine Zwillingsstellung haben, unter 145° 50′ treffen. Die Gränze zwischen diesen beiden Individuen verläuft auf den Flächen *l* ganz unregelmäfsig, indem bald die Subindividuen der einen, bald die der andern über die ideale Gränze übergreifen oder gegen dieselbe zurücktreten. Beide Individuen machen gewissermaafsen auf denselben Raum Anspruch und stören sich gegenseitig in ihrer seitlichen Ausbildung. Auch auf der Basis kann man den unregelmäfsigen Verlauf der Gränze an der Richtung der Streifung leicht verfolgen.

Diese Art der Verwachsung lehrt, dafs die Zwillingsbildung so recht eigentlich zum Wesen der Markasitkrystalle gehört, da eine andere Ausbildung der Markasite, das Oblongoktaëder *g* / *l* sich viel besser mit den Seitenecken dem Oktaëder angeschmiegt hätte, als die Speerspitzen. Die Gruppen sind nicht immer so regelmäfsig

ausgebildet, wie es die Figur darstellt, zunächst kann von den beiden nicht in Zwillingsstellung befindlichen Individuen das eine bedeutend vorherrschen, so daſs es das andere zum gröſsten Theil überdeckt, oder es kann sich an das eine wieder ein Zwillingsindividuum anfügen. Noch weitere Stellungen erhält der Markasit, indem der umgebene Eisenkies selbst aus hypoparallel gestellten Individuen besteht, wodurch eine so groſse Mannigfaltigkeit entsteht, daſs sie sich nicht durch die Beschreibung erschöpfen läſst.

Die Art und Weise der Verwachsung wird von Breithaupt, welcher sie zuerst beschreibt (l. c.), nicht angegeben, dagegen giebt Haidinger (l. c.) eine Zeichnung derselben. Die auf einem Vierling des Markasits aufliegenden Eisenkiese haben auf jedem Individuum eine verschiedene Lage, es ist also der Eisenkies nach dem Markasit orientirt. Auf jedem der beiden oberen Individuen des Markasits zeichnet er in Zwillingsstellung befindliche Eisenkiese. Die ganze Gruppe hat mit den Verwachsungen nach dem I. Gesetz eine gröſsere Aehnlichkeit, als mit den nach dem II., wie man schon daraus ersieht, daſs sie in der Richtung der Zwillingsebene der beiden ersten Individuen aufgewachsen ist. Deshalb ist es mir sehr wahrscheinlich, daſs Haidinger eine Verwachsung nach dem I. Gesetz vor Augen gehabt hat, bei welcher die Individuen des Eisenkieses nach den drei Zwillingsebenen angeordnet und zum Theil hypoparallel gestellt sind.

Da die Eisenkiese meist von den Markasiten umhüllt, aber auch zuweilen auf diesen aufzusitzen scheinen, war es wichtig, die Gränze der Mineralien im Innern zu verfolgen. Dies konnte nur durch Schliffe geschehen, welche nach zwei verschiedenen Richtungen gelegt wurden. Der eine Schliff (Fig. 4*a*, Taf. X) geht ungefähr parallel einer Fläche *l* des Individuums I. Auf der polirten Schliffläche λ trat die Begränzung der beiden Mineralien durch ihre verschiedene Färbung deutlich hervor, die Farbe des Eisen-

kieses geht etwas ins tombackbraune, die des Markasits dagegen eher ins stahlgraue über. Die Begränzung der beiden Mineralien nach unten war eine geradlinige und liefs erkennen, dafs der Eisenkies mit einer breiten Hexaëderfläche auf der Markasitbasis aufsitzt und eigentlich nur die eine Hälfte eines Oktaëders ist. Seitlich schneidet der Eisenkies auch scharf ab gegen die Markasitmasse einer andern seitlichen Gruppe.

Nach der Figur könnte es den Anschein haben, als ob der Eisenkies nur auf die Basis des Markasits aufgesetzt wäre, nicht von letzterem umgeben, das kommt aber nur daher, dafs die äufsere Markasitmasse abgeschliffen ist, und seitlich, sowie hinten, sieht man den Markasit auf dem Eisenkies.

Der zweite Schnitt wurde bei einer andern Gruppe nahezu parallel der Basis geführt, und zeigte, dafs sich hier der Eisenkies weit ins Innere erstreckt. Fig. 4*b*, Taf. X stellt die eigenthümliche Gestalt des Eisenkieskernes auf der Schliffläche dar; der einspringende Winkel kann von Hexaëder- oder Dodekaëderflächen herrühren, es war, als noch weniger Masse abgeschliffen war, nicht zu sehen und erklärt sich leicht daraus, dafs zwei Individuen den Kern bilden. Bei dem einspringenden Winkel ist die Begränzung am schärfsten, an den vier andern Seiten war sie etwas mehr verwischt.

Dieser zweite Schliff zeigt aufs deutlichste, dafs der Eisenkies einen wirklichen Kern bildet.

Fafst man alle Beobachtungen zusammen, so ergiebt sich in paragenetischer Beziehung, dafs sich sämmtliche Erscheinungen durch eine abwechselnde Bildung von Eisenkies und Markasit erklären lassen, zur Annahme einer gleichzeitigen Bildung ist man hier ebensowenig, wie bei der ersten Verwachsung, gezwungen.

Der Grund für diese, von der nach dem I. Gesetz abweichenden Verwachsung, liegt auch lediglich in der Tektonik des Markasits. Im vorliegenden Falle ist die Hauptaxe erste tektonische Axe, die *a*-Axe zweite, es

müssen also diese beiden Axenrichtungen mit tektonischen Axen des Eisenkieses zusammenfallen und da bei letzteren das Oktaëder herrscht, so ist es natürlich, dafs die Kanten *l*/*l* den Oktaëderkanten parallel zu liegen kommen, wodurch die Flächen *l* des Markasits und die Oktaëderflächen des Eisenkieses eine gemeinsame Zonenaxe haben. So erklärt es sich leicht, dafs auf einer Stufe des Kieler Museums von Littwitz beide Arten der Verwachsung zusammen vorkommen, die nach dem I. Gesetz bei Zwillingen, deren Zwillingsaxe vertical steht, die nach dem II. bei solchen, deren Hauptaxe *c* vertical ist.

Die seitliche Begränzung der Gruppe Fig. 4*b*, an welcher der Schnitt nahezu parallel der Basis geführt wurde, zeigt das eigenthümliche Verhalten, dafs die beiden Kanten *l*/*l* der Individuen I nicht parallel sind, sondern die eine gegen die andere und gegen die Kanten *l*/*p* divergirt. Der Grund hierfür ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der Streifen auf *l*, welche nicht untereinander parallel sind, sondern in der Nähe der Kanten nach der Zwillingsebene divergiren. Die Zwillingsebene gewinnt also beim Weiterbau an den Speerspitzen an Bedeutung, so dafs nach hier hin sich die Subindividuen hypoparallel gruppiren. Dieser Einflufs macht sich sogar auf den Eisenkies in der Weise geltend, dafs die der Basis parallele Hexaëderfläche nach derselben Ecke hin einen etwas spitzern Winkel, als einen rechten zeigt.

Die Annahme, dafs das II. Verwachsungsgesetz in der Unterlage des Eisenkieses seinen Grund haben könnte, trifft schon deshalb nicht zu, da auch bei unterliegendem Eisenkies Verwachsungen nach dem I. Gesetz vorkommen und umgekehrt bei unterliegendem Markasit solche nach dem II, wie eine von mir beobachtete Verwachsung von Tavistock in Devonshire (Fig. 5, Taf. X) zeigt. Der als Unterlage dienende Markasit gehört dem Subtypus II*a* an und zeigt nur untergeordnet Zwillingsbildung in Form von ein- und aufgelagerten Zwillingsstücken, der Eisenkies hat die Form des Hexaëders. Nur eine Fläche desselben fällt

mit einer Markasitfläche, der Basis zusammen, die *b*-Axe des Markasits mit der Diagonale der Hexaëderfläche, keine gemeinsame Zone ist ausgebildet.

Schliefslich könnte man auch dieses Verwachsungsgesetz als die Folge gewisser Winkelähnlichkeiten ansehen. Diese Annahme ist jedoch völlig ausgeschlossen, da die einzige Winkelbeziehung zwischen der Oktaëderkante von 109° 28′ und der Kante *l*/*l* von 101° 58′ gefunden werden könnte und diese Winkel eine Differenz von 7° 30′ haben.

Allgemeine Betrachtungen über die regelmäfsigen Verwachsungen verschiedener Mineralien.

Für die regelmäfsigen Verwachsungen des Markasits und Eisenkieses hat sich aus dem Vorhergehenden Folgendes ergeben.

1. Der Grund für die Verwachsungen ist in dem Zusammenfallen tektonischer Hauptaxen zu suchen, so dafs mit der Aenderung der Gesetze der Tektonik des Markasits sich auch die Verwachsung ändert.

2. Gewisse Winkelähnlichkeiten bei beiden Mineralien sind nicht als maafsgebend für die Verwachsung zu betrachten, sondern als eine Folge der Verwachsung, da sie in die Zonen der gemeinsamen tektonischen Axen fallen. Dafs sie nicht charakteristisch sind, ergiebt sich ferner auch aus der II. Verwachsung, welche keine nennenswerthen Winkelähnlichkeiten darbietet.

Zur Prüfung dieser Resultate auf ihre allgemeine Gültigkeit sollen aufser den, in der angewandten Krystallographie (l. c.) von mir aufgeführten regelmäfsigen Verwachsungen noch folgende in Betracht gezogen werden:

1. Rutil und Arkansit, G. vom Rath, Pogg. Ann. 158 und neues Jahrb. f. Mineral. etc. 1876.
2. Rutil und Magneteisen, G. Seligmann, Zeitschr. für Krystallogr. 1877.
3. Eisenglanz und Magneteisen, Bücking, Zeitschr. für Krystallogr. 1877, G. vom Rath, neues Jahrbuch etc. 1876.

4. Augit und Biotit, G. vom Rath, neues Jahrb. etc 1876.
5. Augit und Hornblende, Haidinger, Handb. der bestimmenden Mineralogie 1845.

Zunächst lehrt die folgende Tabelle, dafs bei allen diesen Verwachsungen wie bei denen des Markasits und Eisenkieses gewisse Axen der beiderlei Mineralien zusammenfallen und dafs diese einen ebenso einfachen, wie natürlichen Anhaltspunkt zu einer systematischen Eintheilung der verschiedenen regelmäfsigen Verwachsungen darbieten.

I. Die Grundaxen coïncidiren sämmtlich.

A. Innerhalb desselben Systems.

Im regulären System:

1. Fahlerz und Blende.

Im quadratischen System:

2. Zirkon und Xenotim.

Im hexagonalen System:

3. Kalkspath und Eisenspath,
4. Kalkspath und Bitterspath,
5. Kalkspath und Dolomit.

Im monoklinen System:

6. die Glimmer untereinander.

B. Bei verschiedenen Systemen.

Im regulären und quadratischen:

7. Fahlerz und Kupferkies,
8. Blende und Kupferkies.

Im quadratischen und rhombischen:

9. Rutil und Brookit.

II. Nur zwei Grundaxen coïncidiren.

A. Innerhalb desselben Systems.

10. Augit und Hornblende, mit den beiden aufeinander senkrechten Axen.

B. Bei verschiedenen Systemen.

11. Pennin und Glimmer,
12. Eisenglanz und Glimmer,
    Hauptaxe und zweite Nebenaxe mit Hauptaxe und Nebenaxe *b*.

III. Die Hauptaxen coïncidiren.

A. Die übrigen Grundaxen der einen mit Zwischenaxen der andern.

13. Eisenkies und Markasit (I. Gesetz),
14. Markasit und Eisenkies (II. Gesetz).

B. Hauptaxe und eine Normale auf derselben.

15. Orthoklas und Albit } Normalen auf den Längsflächen.
16. Orthoklas und Oligoklas }
17. Augit und Hornblende,
    Normale auf der Querfläche mit Normale einer Prismenfläche.
18. Staurolith und Cyanit,
    b-Axe und Normale der Hauptspaltungsfläche.

C. Hauptaxe und eine Kante.

19. Kalkspath und Barytocalcit,
    Endkante des Hauptrhomboëders mit Kante *ac*.

IV. Eine Nebenaxe coïncidirt.

20. Eisenglanz und Rutil,
    Hauptaxe mit der andern Nebenaxe.
21. Augit und Biotit,
    Nebenaxe *b*
    Hauptaxe Normale auf *b* und *c*
22. Quarz und Kalkspath,
    Schiefe Diagonale einer Fläche des Hauptrhomboëders mit einer solchen des ersten stumpfen Rhomboëders.
23. Aragonit und Kalkspath,
    Nebenaxe *a* mit einer Nebenaxe,
    Nebenaxe *b* mit einer scharfen Kante des Skalenoëders ($a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} c$).

V. Die Hauptaxe des einen Minerals coïncidirt mit einer Neben- oder Zwischenaxe des andern.

24. Eisenglanz und Magneteisen,
Hauptaxe mit rhomboëdrischer Zwischenaxe,
erste Nebenaxen mit den Diagonalen der Oktaëderfläche.

25. Rutil und Magneteisen.
Hauptaxe mit einer prismatischen Zwischenaxe,
eine erste Nebenaxe mit einer rhomboëdrischen Zwischenaxe.

VI. Eine Grundaxe coïncidirt mit einer Kante.

26. Rutil und Brookit,
Hauptaxe mit einer Oktaëderkante.

In wiefern die bei den genannten Verwachsungen coïncidirenden Axen Beziehungen zu der Tektonik von je zwei Mineralien haben, weiter auszuführen, würde den Rahmen dieser Abhandlung überschreiten und ein genaueres Studium der tektonischen Verhältnisse der verschiedenen Mineralien erheischen, worüber für die meisten Mineralien Angaben in der Litteratur noch fehlen. Für die Bedeutung der gemeinsamen Axenrichtungen sprechen unter anderm besonders die Verwachsungen der drei Mineralien Rutil, Eisenglanz und Magneteisen, bei letztern beiden fallen nämlich gerade die Richtungen zusammen, welche beide Mineralien mit dem Rutil gemeinsam haben.

Prüft man die bei den verschiedenen Verwachsungen vorhandenen Winkelbeziehungen, so ergiebt sich zunächst, dafs solche wie bei dem II. Verwachsungsgesetz des Markasits und Eisenkieses auch bei andern fehlen, so bei den Verwachsungen von Augit und Hornblende (No. 17), Quarz und Kalkspath (No. 22), Kalkspath und Aragonit (No. 23), Rutil und Magneteisen (No. 25), Rutil und Brookit (No. 26). Für die Mehrzahl sind sie allerdings vorhanden, jedoch lediglich in den durch die coïncidirenden Axen bestimmten Zonen. So konnte das Studium nur einzelner Verwach-

sungen leicht zu der Annahme führen, dafs die Winkelähnlichkeiten die regelmäfsigen Verwachsungen bewirken. Wäre z. B. bei der Verwachsung von Rutil und Eisenglanz die Winkelähnlichkeit die Ursache, so wäre es nicht ersichtlich, warum der Rutil in der von G. Seligmann beschriebenen Weise mit Magneteisen verwächst und dieses wieder in der entsprechenden Stellung mit Eisenglanz.

Wie bei den Zwillingen spielen bei den regelmäfsigen Verwachsungen verschiedener Mineralien die Axen die Hauptrolle und die von Weifs zuerst als ideale Linien eingeführten Axen gewinnen mehr und mehr Realität, indem sie nicht nur den Formen, sondern auch dem Bau der Krystalle zu Grunde liegen.

Erklärung der Figuren.

Tafel IX.

Fig. 1. Markasit von Schemnitz in Ungarn, einfacher Krystall, S. 629

Fig. 2. Desgleichen, Zwilling nach dem I. Gesetz, S. 631.

Fig. 3. Markasit von Littwitz in Böhmen, Zwilling nach dem 1. Gesetz, S. 638.

Fig. 4. Markasit von Freiberg, Vierling, S. 633.

Fig. 5. Markasit aus England, Fünfling, mit Ausgleichung der Individuen IV und V, S. 635.

Fig. 6. Desgleichen, symmetrischer Sechsling, S. 636.

Fig. 7. Desgleichen, Schema eines Sechslings mit zwei kleineren Individuen, S. 637, 644.

Fig. 8. Desgleichen, Vierling mit Durchwachsung des IV. Individuums und zwillingsartiger Anreihung an letzteres, so dafs die Gruppe 7 Individuen in verschiedener Stellung zeigt; die kleine Ecke stellt das Vorkommen einer derartigen wiederholten Zwillingsbildung in der Natur dar, S. 637.

Fig. 9. Markasit von Clausthal, Kammkies mit zwillingsartig eingeschalteten Lamellen und einem herausragenden Zwilling, S. 632.

Fig. 10. Markasit von Freiberg, Durchwachsungszwilling, S. 633.

Fig. 11. Desgleichen, Zwilling nach dem II. Gesetz, S. 638.

Fig. 12. Desgleichen, von zwei Drillingen nach dem I. Gesetz sind die beiden I. Individuen nach dem II. Gesetz verwachsen, S. 638, 639.

Tafel X.

Fig. 1. Speerkiesartiger Vierling von Littwitz in Böhmen, mit erkennbarer Tektonik, S. 636, 643.

Fig. 2. Kammkies, thurmförmig, von Clausthal, S. 632.

Fig. 3. Markasit von Littwitz, Speerkies; Vierling mit Intermittenz der Individuen II und III, sowie I und IV und nach dem I. Verwachsungsgesetz aufgewachsenen Hexaëdern von Eisenkies, S. 651.

Fig. 4. Desgleichen, Eisenkies, Oktaëder und Hexaëder, umhüllt von Markasit nach dem II. Verwachsungsgesetz, so daſs der Markasit für sich einen Durchwachsungsdrilling darstellt, S. 654.

Fig. 4*a*. Desgleichen, Schnitt nach der Basis, die Schliffflächen sind π beim Markasit, α beim Eisenkies, an der Spitze $l^I\, l^{II}$ hypoparallele Streifung, S. 656.

Fig. 4*b*. Desgleichen, Schnitt nach einer Fläche l, so daſs ω beim Eisenkies und λ beim Markasit Schliffflächen sind, S. 657.

Fig. 5. Markasit von Tavistock in Devonshire, nach der Endfläche tafelförmig, Subtypus II*a*, mit nach dem II. Verwachsungsgesetz aufgewachsenem Hexaëder von Eisenkies, S. 658.

Fig. 6. Eisenkies von Freiberg, Hexaëder, drei Markasitzwillinge sind so aufgewachsen, daſs die drei Zwillingsebenen den drei Hexaëderflächen parallel sind, S. 632, 653.

VIII. *Ueber Himmelswärme, Temperatur und mittlere Temperatur der Atmosphäre; von O. Frölich.*

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Fourier und Poisson haben bekanntlich die Theorie der Erdwärme in ihren Grundzügen entwickelt, und Poisson hat eine Formel gegeben, welche sich auf jede Stelle der Erdoberfläche anwenden läſst. Der Grund davon, daſs diese Formel noch so wenig Anwendung in der Meteorologie gefunden hat, liegt hauptsächlich darin, daſs die Bestimmung der wichtigsten Wärmequellen, der Sonnen-, Sternen- und Luftwärme, namentlich der beiden letzteren,

zu unsicher ist; wenn diese Gröfsen genauer bekannt wären, so müfste nach unserer Ansicht die Anwendung der Theorie auf die Meteorologie für die letztere einen Gewinn abwerfen, welcher durch kein anderes Mittel zu ersetzen wäre.

Ich war defshalb seit längerer Zeit bemüht, einen Apparat zusammen zu stellen, welcher gestattet, die Himmelswärme (Luft- und Sternenwärme) sowohl, als auch die Sonnenwärme mit Sicherheit und doch in möglichst einfacher Weise zu messen, und glaube dies Ziel erreicht zu haben; aufserdem gelang es mir, eine *neue Methode* zur Bestimmung der *Temperatur des Weltraums* und der *mittleren Temperatur der Atmosphäre* aus Messungen der Himmelswärme aufzustellen und dieselbe mittelst des Apparates praktisch durchzuführen.

Der Apparat besteht in einer Thermosäule, deren Construction dem vorliegenden Zweck angepafst ist, und bei welcher namentlich dafür gesorgt ist, dafs die äufseren Einflüsse zum Theil vermieden, zum Theil genau bestimmt werden. (Die eingehendere Beschreibung desselben, sowie seiner Behandlung erscheint im Repertorium der Meteorologie von H. Wild.)

Jeder Apparat, welcher zur Messung der Himmelswärme tauglich seyn soll, mufs folgende Bedingungen erfüllen: seine Angaben müssen in einem *absoluten Maafse* erfolgen, d. h. in einem solchen, das nicht von der Individualität des Apparates abhängt, und ferner müssen seine Angaben noch zuverlässig seyn, wenn auch alle auf denselben einwirkenden *Wärmequellen* sich fortwährend *verändern* — denn eine stete Veränderung der Temperaturen ist bei der Aufstellung des Apparates im Freien nicht zu vermeiden.

Das absolute Maafs, welches angewendet wurde, bestand in der *Temperatur einer schwarzen Fläche.* Der Apparat wurde nämlich vor der Anwendung auf Himmelswärme folgender Normalbestimmung unterworfen: vor die Thermosäule, deren „Aussicht“ eine beschränkte ist, wurde

eine, die ganze Aussicht bedeckende schwarze Fläche gesetzt, deren Temperatur sich möglichst genau bestimmen liefs; man ertheilte der Fläche nach einander verschiedene Temperaturen und maafs die entsprechenden Ausschläge der Thermosäule. Es liefs sich alsdann umgekehrt aus den Ausschlägen der Säule die entsprechende Temperatur der schwarzen Fläche bestimmen; und wenn der Apparat gegen den Himmel gerichtet wurde, so konnte man die Wärme des auf die Säule einwirkenden Stückes Himmel ausdrücken als die Wärme einer schwarzen Fläche, von derselben Ausdehnung, von einer gewissen Temperatur, welche wir im Folgenden die ***Himmelstemperatur*** nennen.

Die Ausschläge der Thermosäule hängen ab: von der Temperatur des die Säule umgebenden Rohres, von der Temperatur des Trichters und von derjenigen der schwarzen Fläche oder des Himmels. Die Einwirkung des Trichters, welche übrigens sehr bedeutend ist, kann proportional der Temperaturdifferenz zwischen Trichter und Rohr gesetzt werden, da diese Differenz stets nur einige Grade beträgt. Die Einwirkung der schwarzen Fläche müfste theoretisch nach dem von Dulong und Petit für den Wärmeaustausch zweier Körper gegebenen Gesetze erfolgen; nachdem die Versuche längere Zeit abweichende Resultate ergeben hatten, wurde schliefslich, durch gröfsere Sorgfalt, Uebereinstimmung mit diesem Gesetze gefunden, ein Umstand, der die Ueberzeugung der Zuverlässigkeit des Apparates verstärkt.

Die Sicherung der Angaben der Thermosäule vor den ***Temperaturänderungen*** des Rohres, des Trichters und des Himmels geschah durch theoretische Aufstellung einer Relation, ***welche bei beliebigen Aenderungen der äufseren Temperatur*** den dem betreffenden Augenblick entsprechenden Endausschlag der Säule aus dem momentanen Ausschlag derselben und dessen Veränderung mit der Zeit zu bestimmen lehrt. Um diese Relation zu prüfen, wurden Controllversuche angestellt, bei welchen die Temperaturen des Rohres, des Trichters und der schwarzen Fläche fort-

währenden Aenderungen unterworfen wurden; es ergab sich beinahe vollkommene Uebereinstimmung zwischen den mittelst jener Relation berechneten Gröfsen und der Wirklichkeit.

Mittelst dieses und ähnlicher Apparate habe ich bereits seit 1871 Messungen der Himmelswärme *bei klarem Nachthimmel* angestellt; die folgende Tabelle enthält die Beobachtungen des Jahres 1876, zu deren Berechnung die letzte, mit dem Dulong'schen Gesetze übereinstimmende Normalbestimmung verwendet werden konnte. Jede dieser Beobachtungen sollte eine Art *Aufnahme des thermischen Zustandes des Himmels* bilden: dem Apparat wurden nach einander verschiedene Azimute gegeben, und bei jedem Azimut in allen vier Himmelsrichtungen gemessen; die Azimute wurden so gewählt, dafs der denselben entsprechende Weg durch die Atmosphäre (z) eine einfache numerische Beziehung zu der Höhe (h) der Atmosphäre hatte.

Es ergab sich, dafs die Himmelswärme bei klarem Nachthimmel in verschiedenen Himmelsrichtungen, bei demselben Azimut, nur geringe Differenzen zeigt; in der Tabelle sind daher nur Mittelwerthe aus den in verschiedenen Himmelsrichtungen angegeben. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Messungen ist ein Zwischenraum von $\frac{1}{2}$ Stunde zu denken; die Tabelle giebt die Himmelstemperaturen, nach der oben mitgetheilten Definition berechnet, in Celsius'schen Graden.

1876.

Himmelstemperaturen, bei klarem Nachthimmel.

$z =$	14. Aug.	15. Aug.	17. Aug.	14. Okt.	20. Okt.	21. Okt.	23. Okt.
h	—37,2	—39,7	—43,6	—39,1	—82,4	—85,3	—69,3
$\frac{3}{2}h$	—26,5		—31,7	—27,0	—69,8	—71,9	—56,6
$2h$	—16,5	—18,9	—23,9	—16,3	—61,6	—61,8	—50,0
$\frac{3}{2}h$				—25,5	—72,5	—71,3	—58,4
h	—40,9	—39,3	—46,5	—34,6	—90,6	—82,8	—69,8
t[1])	21,8	20,5	20,0	19,7	3,3	4,5	5,5.

1) t ist die Lufttemperatur.

Wenn man voraussetzt, daſs die Atmosphäre aus lauter horizontalen, oder auch der Erdoberfläche parallelen Schichten bestehe, so zeigt eine einfache Betrachtung, daſs sich aus Messungen der Himmelstemperatur in verschiedenen Azimuten die *Temperatur des Weltraums* ableiten läſst, indem man die Curve, welche jene Messungen darstellt, bis $z = 0$ verlängert; der Werth der Himmelstemperatur bei Abwesenheit der Atmosphäre ist die Temperatur des Weltraums, d. h. die Temperatur, welche ein schwarzer Körper, ohne Atmosphäre, annehmen würde, wenn er sich an Stelle der Erde im Weltraum befände, bei Abwesenheit der Sonne.

Aber auch das andere Ende der Curve, die Himmelstemperatur für $z = \infty$, d. h. für eine Atmosphäre von unendlicher Dicke, hat eine einfache Bedeutung. Diese Temperatur ist die *mittlere Temperatur der Atmosphäre*; es ist der Werth, welchen die Himmelstemperatur erreicht, wenn der Weg der von der äuſsersten Schicht der Atmosphäre kommenden Strahlen zum Apparat so groſs ist, daſs dieselben beinahe gänzlich von den zwischenliegenden Schichten absorbirt werden und keine merkbare Einwirkung auf den Apparat ausüben.

Es ist leicht zu zeigen, daſs diese Bedeutung der beiden Enden der Curve für jede beliebige Lagerung der atmosphärischen Schichten, sowie für jede beliebige Veränderlichkeit der Absorptionscoëfficienten der Luft mit der Dichtigkeit, gilt und nur von der Voraussetzung paralleler Schichten abhängt; daſs diese aber zulässig ist, zeigt die Uebereinstimmung der Messungen in verschiedenen Himmelsrichtungen, bei demselben Azimut.

Die Temperatur des Weltraums ist der Punkt, in welchem die Curven der Himmelswärme in verschiedenen Jahreszeiten, verschiedenen Breiten und verschiedenen Höhen über dem Meere zusammenstoſsen müssen; ihr Werth wird sich daher auch erst aus einer Reihe unter so verschiedenen Umständen angestellter Beobachtungen ganz sicher feststellen lassen; ferner muſs wahrscheinlich

mit mehreren Apparaten zugleich gemessen werden, um die erforderliche Genauigkeit zu erzielen. Die mittlere Temperatur der Atmosphäre dagegen ist für jede Curve eine andere, sie läfst sich aber aus einer einzelnen Curve auch besser bestimmen, weil die beobachteten Werthe der Himmelstemperatur diesem Ende der Curve näher liegen, als dem andern.

Endlich läfst sich noch eine dritte Gröfse von praktisch meteorologischem Interesse aus obigen Beobachtungen berechnen, nämlich die *Temperatur*, *welche die Erdoberfläche annehmen würde*, *wenn sie berufst und blofs dem Einflufs der Himmelswärme ausgesetzt wäre*, wenn sie also namentlich von den tiefer liegenden Schichten der Erde keine Wärme empfinge.

Ich will nun die genannten drei Gröfsen aus der besten Sommer- und der besten Winterbeobachtung 1876 berechnen, mufs jedoch bemerken, dafs, nach der Einrichtung der Beobachtungen, nur für die mittlere Temperatur der Atmosphäre und diejenige der berufsten Erdoberfläche ein sicheres Resultat zu erwarten ist.

Die Formel, welche die Messungen der Himmelswärme in verschiedenen Azimuten am besten darstellt und auch wenig von der theoretischen, für den Fall einer homogenen Atmosphäre geltenden abweicht, ist eine Exponentialfunction; dieselbe gestattet auch, die oben erwähnten drei Gröfsen in einfacher Weise zu berechnen. Die Resultate sind:

	17. Aug.	23. Okt.
Temperatur des Weltraums	—131°	—127°
Mittlere Temperatur der Atmosphäre	— 17	— 36
Temperatur der berufsten Erdoberfläche	— 34	— 57
Lufttemperatur an der Erdoberfläche .	20°,0	5°,5.

Zum Schlufs habe ich Hrn. Dr. Siemens für die Freundlichkeit zu danken, mit welcher er die Ausführung der vorliegenden Arbeit in seinem Laboratorium gestattete.

IX. *Ueber die Absorption des Lichts durch Wasser, Steinöl, Ammoniak, Alkohol und Glycerin; von J. L. Schönn in Stettin.*

Gegenwärtig mit der Untersuchung der atmosphärischen Linien beschäftigt, war es mir von Interesse die Absorption des Lichts durch Wasser zu beobachten. Zu diesem Zwecke benutzte ich eine mit destillirtem Wasser angefüllte Glasröhre von 1,95 Meter Länge und beiläufig von 40 Millimeter Durchmesser. Als Lichtquelle diente abwechselnd eine Stearinkerze und eine gewöhnliche Petroleumlampe. Die Glasröhre war von aufsen durch eine Umhüllung von schwarzem Tuche für Lichtstrahlen undurchdringlich gemacht. Da aber so die Möglichkeit vorlag, dafs die Absorptionserscheinung von den Glaswänden herrührte, indem das Licht die Glaswände vielfach durchstrahlt und wieder von der äufsern Begränzungsfläche zurückgeworfen wird, so wurde die Lichtquelle ebenfalls durch die *leere* Röhre beobachtet, wobei die unten angeführte Absorptionserscheinung nicht eintrat; später wurde in die Glasröhre eine Zinkröhre geschoben, um jeden Zweifel zu beseitigen. Zur Zerlegung des Lichts benutzte ich ein Spectroskop *à vision directe* von A. Hilger in London, das er „meteorologisches Spectroskop" nennt. Die Construction desselben entspricht der des gröfsern Instruments, das auf S. 125, Bd. 1, Stück 2 der Beiblätter dieser Zeitschrift beschrieben ist; nur mufs es, wie mir Hilger mittheilt, anstatt 22 Ctm. Länge 127 Millimeter heifsen. Für das „meteorologische Spectroskop" wählt Hilger nur aufsergewöhnlich gute Prismen vom feinsten Flint- und Crownglas.

Mit diesem Spectroskop fand ich einen Absorptionsstreifen H_2O_α ziemlich nahe der Natriumlinie auf der Seite des rothen Endes des Spectrums. Derselbe wird bei engem Spalt schärfer.

Als ich ferner das Licht einer sehr grofsen Petroleumflamme durch eine Wasserschicht von 3,8 Meter gehen liefs und vermittelst des Spectroskops *à vision directe* untersuchte, zeigte sich aufser dem Absorptionsstreifen H_2O_α bei *D* ganz deutlich ein zweiter H_2O_β bei *C*. Die Lage des ersten Streifens konnte ich vermittelst eines gewöhnlichen Spectroskops mit einem Prisma und Ocularmikrometer bestimmen. Wenn die Entfernung der rothen Lithiumlinie von der grünen Thalliumlinie 43 Theile beträgt, so liegt dieser Absorptionsstreifen etwa $2\frac{1}{2}$ solcher Theile von *D* ab nach dem rothen Ende hin. Seine Breite betrug zwei Theile, während die Natriumlinie einen Theil einnahm, so dafs die zweite Begränzung dieses Streifens also $4\frac{1}{2}$ Theile von *D* absteht.

Die Lage des zweiten Absorptionsstreifens vermochte ich so nicht zu bestimmen, da der gewöhnliche Spectralapparat nicht so vollkommen das rothe Licht erkennen liefs, wie das Spectroskop *à vision directe*. Da an dem letzteren sich aber kein Vergleichungsprisma oder Mikrometer befindet, so habe ich Lithium- und Natriumlicht vermittelst eines passend aufgestellten Prismas auf den Spalt fallen lassen, was allerdings mit Schwierigkeiten verknüpft war, da derselbe nur 5 Millimeter lang ist. Diese Vergleichung ergab, dafs der zweite Absorptionsstreifen etwa eben so weit (vielleicht etwas weniger) von der Lithiumlinie nach dem violetten Ende hin absteht als der erste Absorptionsstreifen von *D*; er mufs also sehr nahe bei *C* oder auf *C* selbst liegen. Jenseits dieses zweiten Streifens wird rothes Licht noch in ziemlicher Ausdehnung durchgelassen. Genaueres hierüber läfst sich erst angeben, wenn man Lichtquellen anwendet, die nach dem rothen Ende hin ein längeres Spectrum liefern als Petroleumlicht. Die Resultate der Untersuchung des Eises denke ich in einer folgenden Mittheilung zu geben.

Nachdem ich zwei Absorptionsstreifen des Wassers zwischen den Fraunhofer'schen Linien *C* und *D* gefunden hatte, schien es mir von Interesse, diese Absorption des

sichtbaren Lichts mit der Absorption der Wärmestrahlen zu vergleichen, indem ich der Ansicht bin, daſs es sich hierbei um *ein* System von Absorptionsstreifen handelt, das sich von den äuſsersten Wärmestrahlen bis ins sichtbare Spectrum hineinerstreckt. — Desains und Aymonnet[1]) fanden mittelst eines Prismas von Steinsalz von 60 Grad im dunkeln Wärmespectrum vier Stellen, an denen die Thermosäule ein Wärmeminimum zeigte, und zwar 19,8, 30,6, 42,0 und 52,0 Minuten entfernt vom äuſsersten Roth. Die mittlere gegenseitige Entfernung der vier kalten Streifen beträgt 10,7 Minuten. Wenn man nach Baden-Powell für Steinsalz den Brechungsexponenten der Fraunhofer'schen Linien *B* und *G* gleich 1,5403 und 1,5622 setzt, ferner annimmt, daſs das Steinsalzprisma so aufgestellt war, daſs das Minimum der Ablenkung für denjenigen Lichtstrahl eintrat, dessen Brechungsexponent das Mittel aus den beiden angegebenen Brechungsexponenten ist, ferner daſs die Brechungsexponenten für Steinsalz sich nach demselben Gesetze ändern wie beim Sylvin[2]), so würde sich für die beiden Absorptionsstreifen des Wassers für das Steinsalzprisma eine gegenseitige Entfernung von 14,7 Minuten ergeben. Wie zuverlässig diese Berechnung ist, ergiebt sich daraus, daſs ich nach von Lamansky[3]) für Steinsalz gegebenen Daten als Brechungsindex für die Fraunhofer'sche Linie *D* 1,54481 erhielt, während die obige Berechnung 1,5448 ergab. — Hiernach muſs man annehmen, daſs die gegenseitigen Entfernungen der Absorptionsstreifen nach der sichtbaren Seite des Spectrums hin zunehmen. Das Mittel aus 10,7 und 14,7, nämlich 12,7 Minuten ist in der Entfernung des ersten kalten Streifens vom ersten sichtbaren Streifen gerade dreimal enthalten, so daſs es mir sehr wahrscheinlich ist, daſs dazwischen noch zwei Absorptionsstreifen liegen. Der eine 12,7 Minuten von *C* entfernt, also bei

1) *C. R. t. LXXXI, p.* 423.
2) Gmelin-Kraut, Handbuch d. anorgan. Chemie I, S. 794.
3) Pogg. Ann. Bd. 146, S. 224.

den Fraunhofer'schen Linien *a*, der andere etwa so weit vor *A*, wie *B* von *C* entfernt ist. Sichtbar würde der Streifen bei *a* seyn müssen, wenn von der Lichtquelle Licht dieser Brechbarkeit ausgestrahlt würde. Sonnenlicht würde als Lichtquelle weniger geeignet seyn wegen der Fraunhofer'schen Linien *a*.

Die Untersuchung einer etwa 8 Meter langen Wassersäule mittelst Magnesiumlichts ergab keine neuen Absorptionsstreifen. Der Streifen H_2O_β war nicht mehr deutlich zu sehen, H_2O_α dagegen sehr gut. Die den Fraunhofer'schen Linien *b* entsprechenden, ferner die zwischen *b* und *F* liegenden Linien des Magnesiumdampfs waren genau zu erkennen, und ferner reichte das durchgelassene Licht bis etwa zur Fraunhofer'schen Linie *F*. Mit bloſsem Auge betrachtet sah das durchgelassene Licht blaugrün aus.

Als zweite verhältniſsmäſsig einfache Verbindung wählte ich Steinöl zur Untersuchung. Gewöhnliches Petroleum zeigte in einer Röhre von 1,9 Meter Länge vom Sonnenlichte durchstrahlt eine schöne braungelbe Farbe, etwa wie brauner Zirkon. Mit dem Spectroskop untersucht ergab sich, daſs das rothe Ende des Sonnenspectrums wohl wenig verändert war, dagegen sonst nur Licht bis etwas über *F* hinaus durchgelassen wurde, so daſs fast alles blaue und violette Licht absorbirt erschien. Bei Anwendung einer hellen Petroleumlampe fand ich zwei scharfe nahe an einander liegende Absorptionsstreifen zwischen *C* und *D*. Die Lage derselben konnte mittelst der Mikrometerschraube genau ermittelt werden. Wenn man die Entfernung von der rothen Lithiumlinie α bis zur Natriumlinie *D* in 69 Theile theilt, so ist die Entfernung

$$\begin{aligned} Li_\alpha \text{ bis Steinöl } \beta &= 14, \\ \text{Steinöl } \beta \text{ bis Steinöl } \alpha &= 12, \\ \text{Steinöl } \alpha \text{ bis } D &= 43. \end{aligned}$$

Sehr concentrirte und sehr farblose Ammoniaklösung giebt schon in einer Röhre von 460 Millimeter Länge einen sehr scharfen Absorptionsstreifen, dessen Entfernung von

der rothen Li-Linie 1, von der Na-Linie 3 ist, wenn der Abstand beider Linien gleich 4 ist.

Durch eine Säule Aethylalkohol von 1,9 Meter Länge erscheint das Tageslicht dem bloſsen Auge grünlich gelb und weit weniger geschwächt als durch eine gleich lange Wassersäule. Mit Kerzenlicht oder einer Petroleumflamme als Lichtquelle, bemerkt man einen starken Absorptionsstreifen ($C_2H_6O_\alpha$), der bei Anwendung von Sonnenlicht gerade auf die atmosphärische Linie C_6 von Brewster fällt. Mittelst einer Alkoholsäule von 3,7 Meter Länge und einer sehr starken Petroleumlampe wird ein zweiter weit schwächerer Absorptionsstreifen β zwischen dem Streifen α und der Li-Linie etwa in der Mitte, ein dritter feiner Streifen $C_2H_6O_\gamma$ im Grün zwischen der Na-Linie und Tl-Linie sichtbar. Ist deren Abstand gleich 9, so ist seine Entfernung von der Na-Linie gleich 5. Er liegt eben so weit nach der grünen Seite von der Na-Linie wie der sehr auffällige Streifen α nach der rothen, zugleich erscheint eine allgemeine Absorption des violetten Endes des Spectrums.

Glycerin läſst in 1,9 Meter dicker Schicht das Tageslicht mit grünlicher Farbe, das Petroleumlicht mit röthlich gelber Farbe durch; am besten zu sehen, wenn man es auf weiſsem Papier auffängt. Einen scharfen Absorptionsstreifen konnte ich an keiner Stelle bemerken, jedoch ist das Licht in der Gegend der Na-Linie geschwächt. Das äuſserste Violett wird absorbirt. Dieses Verhalten würde den theoretischen Ausführungen Sellmeier's nicht widersprechen. Sind τ_1 τ_2 usw. die relativen Schwingungsdauern der Fraunhofer'schen Linien B, C usw. und construirt man die Curve der Brechungsexponenten so, daſs $\frac{1}{\tau_1{}^2}$ . . . als Abscissen und die entsprechenden Brechungsexponenten des Glycerins (nach Listing) als Ordinaten aufgetragen werden, und ist β die Neigung der Curve zur Abscissenaxe, so ergiebt sich $\log \operatorname{tg} \beta$ für die Mitten zwischen zwei Fraunhofer'schen Linien:

B		C		D		E		F		G
	8,332—10		8,244		8,214		8,225		8,238	

Die Zunahme der Werthe von *F* ab deutet der Theorie nach auf eine Absorption des violetten Endes des Spectrums hin. Für die Brechungsexponenten von Alkohol und Ammoniakflüssigkeit liegen für den vorliegenden Zweck nicht hinlänglich genaue und sichere Daten vor.

X. *Ueber das Dichtigkeitsmaximum einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser;* *von F. Kohlrausch.*

Gelegentlich einer Untersuchung über das elektrische Leitungsvermögen der Schwefelsäure (Pogg. Ann. CLIX, 240, 243), fand ich das specifische Gewicht einer nahe gesättigten Säure (H_2SO_4) etwas kleiner als dasjenige einer etwa 97 procentigen Lösung. Die hiernach entstehende Vermuthung, dafs die wässrige Schwefelsäure unterhalb der vollständigen Concentration ein Maximum der Dichtigkeit besitzt, schien mir interessant genug, um sie besonders zu prüfen; nicht nur wegen der Bedeutung des specifischen Gewichts für die Praxis, sondern auch, weil hier das schlagendste Beispiel einer Verdichtung der Substanz durch chemische Kräfte vorliegen würde. Man weifs freilich von der Essigsäure, dafs das specifische Gewicht ihrer wässrigen Lösung anfangs zunimmt, um später wieder abzunehmen. Bei dem geringen Unterschied der Dichtigkeit von Wasser und Essigsäure ist diefs jedoch weniger zu verwundern, als wenn ein Gemisch aus Schwefelsäure und dem etwa halb so dichten Wasser dichter ist als die erstere für sich allein.

Die mehrfach aufgestellten bekannten Tabellen über das specifische Gewicht der wässrigen Schwefelsäure (z. B. von

Ure, Bineau, Kolb) führen freilich eine bis zu der Verbindung H_2SO_4 stets wachsende Dichtigkeit auf, indessen sind diese Tabellen aus weiter auseinanderliegenden Beobachtungen interpolirt, wobei die unerwartete Eigenthümlichkeit entgehen konnte.

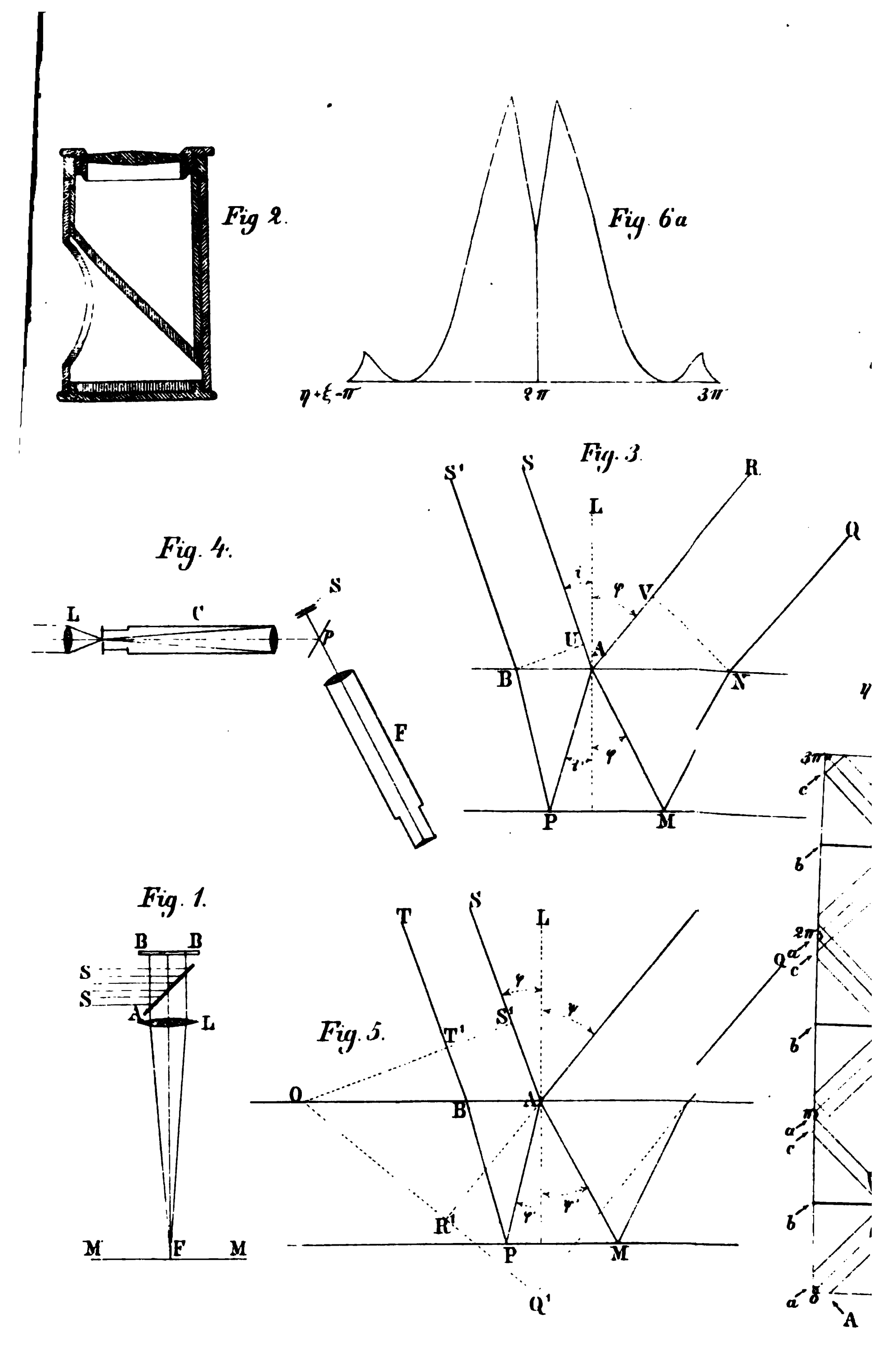
Mit Hülfe einer Schwefelsäure, die ich durch zweimaliges Umkrystallisiren einer nur schwach rauchenden Nordhäuser Säure erhielt, liefs sich die obige Vermuthung leicht bestätigen. Ein wenig Wasser, auf diese Säure vorsichtig aufgespritzt, gab langsam untersinkende Tropfen [1]).

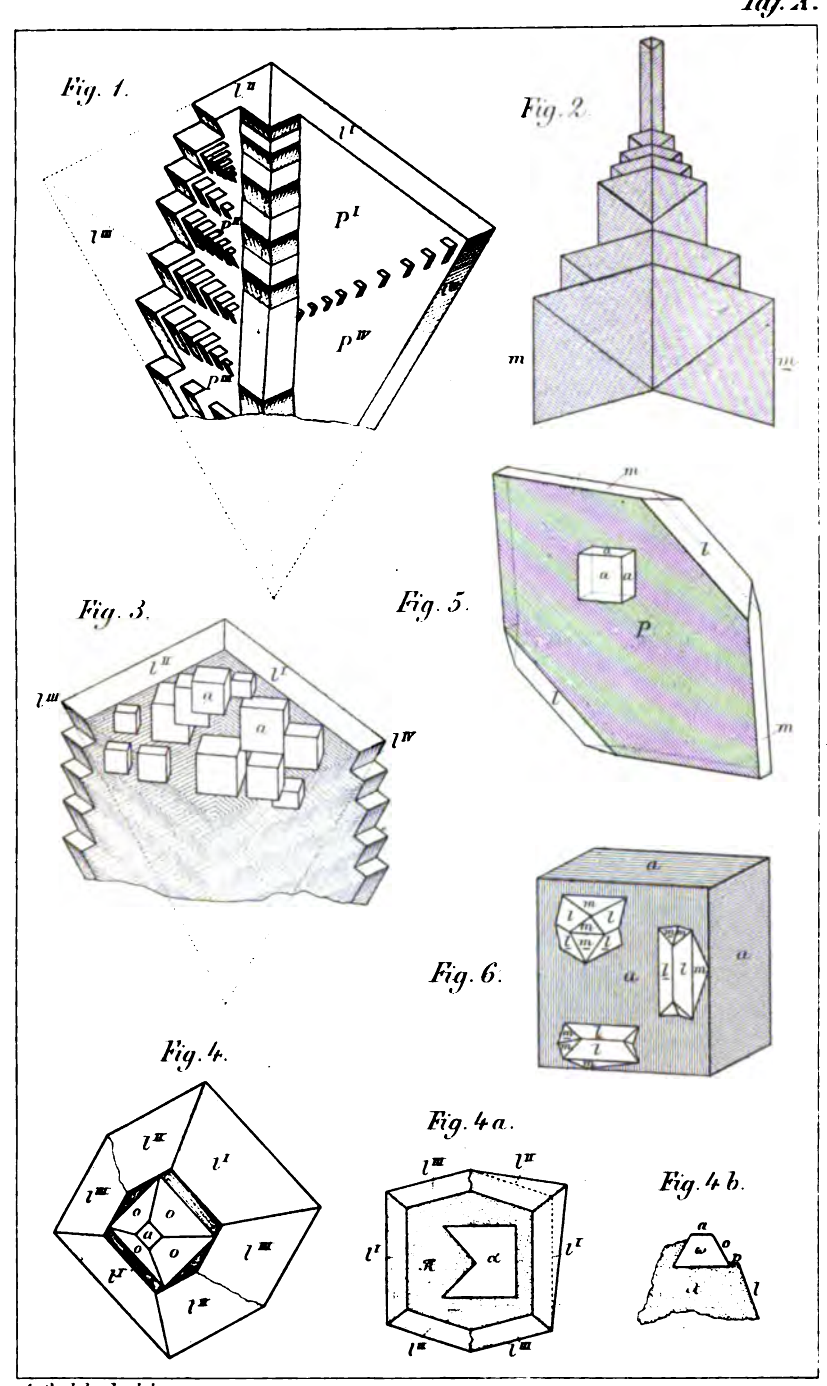
Nach einigen Dichtigkeitsbestimmungen von Flüssigkeiten, welche man durch allmähliches Verdünnen mit gewogenen Wassermengen erhielt, ist der Gang des specifischen Gewichtes (bei 18°; Wasser von 4° gleich Eins) zwischen 90 und 100 Proc. etwa der folgende.

Gewichtsproc. an H_2SO_4	Spec. Gew.	Gewichtsproc. an H_2SO_4	Spec. Gew.
90	1,8147	96	1,8372
91	1,8200	97	1,8383
92	1,8249	98	1,8386
93	1,8290	99	1,8376
94	1,8325	100	1,8342.
95	1,8352		

1) Durch Zusatz von ein wenig salpetersaurem Diphenylamin zum Wasser entsteht in der Schwefelsäure eine starke blaue Färbung der Tropfen, welcher, von Hrn. Dr. Conrad mir angegebene Versuch in einer Vorlesung gezeigt werden kann.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.


Fig 2.
Fig. 6a
$\eta+\xi-\pi$
2π
3π
Fig. 3.
S'
S
R
L
Q
V
U
A
B
N
P
M
Fig. 4.
L
C
S
p
F
Fig. 1.
B
B
S
S
A
L
M
F
M
Fig. 5.
T
S
L
T'
S'
O
B
A
R'
P
M
Q'
Q
A
Lith. Anst. Berlin



A. Sadebeck del.



